

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

УДК 621.1.016
ББК 31.31
Ц 274

Рецензенты: кафедра теоретических основ теплотехники
Казанского государственного технологического университета;
главный науч. сотр. ИВТРАН, доктор техн. наук А.Ф. Поляков

Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А.
Ц 274 Тепломассообмен: Учебное пособие для вузов. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство МЭИ, 2005. — 550 с., ил.

ISBN 5-7046-1270-9

Изложены основы теории и методы расчета процессов теплопроводности в твердых телах, конвективного теплообмена в однофазной среде, теплообмена при конденсации и кипении, теплообмена излучением между телами, разделенными прозрачной или поглощающей и излучающей средой. Рассмотрены теоретические основы совместных процессов массо- и теплообмена применительно к задачам теплотехники, в том числе и промышленной. Приведены основные положения теплотехнического расчета теплообменных аппаратов.

Теоретический материал дополнен большим количеством примеров решения задач. Для студентов теплотехнических специальностей вузов.

УДК 621.1.016
ББК 31.31

ISBN 5-7046-1270-9

© Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А., 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Список основных обозначений	11
Введение	13

Часть первая. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Глава первая. Математическое описание процесса теплопроводности	17
1.1. Температурное поле. Градиент температуры	17
1.2. Тепловой поток. Вектор плотности теплового потока	18
1.3. Закон Фурье. Теплопроводность	22
1.4. Уравнение теплопроводности	25
1.5. Условия однозначности	28
Глава вторая. Стационарные процессы переноса теплоты в твердых телах	31
2.1. Передача теплоты через плоскую стенку	31
2.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку	38
2.3. Передача теплоты через сферическую стенку	45
2.4. Температурное поле при действии источников теплоты в пластине и круглом стержне	49
2.5. Двухмерное температурное поле и тепловой поток в плоском ребре	54
2.6. Теплопроводность стержня (ребра) при малых значениях числа Био	61
2.7. Передача теплоты через круглое ребро	65
2.8. Теплопередача через ребристую стенку	68
2.9. Численный метод решения стационарных задач теплопроводности	70
2.10. Задачи с решениями	82

Глава третья. Нестационарная теплопроводность	90
3.1. Предварительные замечания	90
3.2. Температурное поле в процессе охлаждения (нагревания) пластины	91
3.3. Температурное поле в процессе охлаждения (нагревания) бесконечно длинного цилиндра, шара и некоторых тел конечных размеров	100
3.4. Нестационарное температурное поле в полуграниченном массиве	106
3.5. Охлаждение (нагревание) тел, имеющих форму параллелепипеда или цилиндра конечной длины	110
3.6. Регулярный режим теплопроводности	112
3.7. Численный метод решения нестационарных задач теплопроводности	114
3.8. Задачи с решениями	121

Часть вторая. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

<i>Глава четвертая. Уравнения теории конвективного теплообмена</i>	124
4.1. Предварительные замечания	124
4.2. Два способа наблюдения за движущейся жидкостью. Субстанциональная производная. Вектор плотности потока энthalпии.....	126
4.3. Уравнение неразрывности. Понятие несжимаемой жидкости.....	128
4.4. Силы, действующие в движущейся жидкости. Закон внутреннего трения Ньютона. Вязкость.....	131
4.5. Уравнения движения	134
4.6. Уравнение энергии	136
4.7. Безразмерные параметры (числа подобия), характеризующие процессы конвективного теплообмена.....	139
4.8. Ламинарный и турбулентный режимы течения. Уравнения Рейнольдса.....	144
<i>Глава пятая. Ламинарный пограничный слой</i>	147
5.1. Понятие пограничного слоя	147
5.2. Теоретический анализ динамического пограничного слоя.....	151
5.3. Ламинарный пограничный слой при обтекании пластины. Задача Блазиуса.....	156
5.4. Теоретический анализ теплового пограничного слоя.....	159
5.5. Тепловой пограничный слой при обтекании пластины. Задача Польгаузена	162
5.6. Автомодельные решения уравнений пограничного слоя.....	165
5.7. Пограничный слой при обтекании тела сжимаемым газом	171
5.8. Интегральные соотношения импульсов и энергии	177
5.9. Задачи с решениями.....	182
<i>Глава шестая. Турбулентный пограничный слой</i>	188
6.1. Развитие пограничного слоя при продольном обтекании пластины	188
6.2. Структура турбулентного пограничного слоя.....	192
6.3. Уравнения турбулентного пограничного слоя. Турбулентная вязкость и турбулентная теплопроводность	196
6.4. Аналогия Рейнольдса.....	200
6.5. Теплообмен в турбулентном пограничном слое при обтекании пластины	203
6.6. Метод Кутателадзе—Леонтьева.....	209
6.7. Задачи с решениями.....	213
<i>Глава седьмая. Свободная конвекция</i>	217
7.1. Общие сведения о свободной конвекции	217
7.2. Теплоотдача при свободной конвекции жидкости около вертикальной пластины или вертикальной трубы.....	221
7.3. Свободная конвекция около горизонтальной пластины или горизонтальной трубы. Конвекция в ограниченном пространстве	226
7.4. Задачи с решениями.....	231

Глава восьмая. Течение и теплообмен в трубах. Общие сведения

8.1. Режимы течения. Начальный гидродинамический участок	235
8.2. Гидравлическое сопротивление при течении в трубе	239
8.3. Первый закон термодинамики для течения в трубе	240
8.4. Местный и средний коэффициенты теплоотдачи. Начальный термический участок	242
8.5. Расчет температур стенки трубы, жидкости и теплового потока.....	244

Глава девятая. Теплообмен при ламинарном течении жидкости в трубе.....

9.1. Основные особенности процесса теплообмена в трубах при ламинарном течении теплоносителей	247
9.2. Теплообмен в плоском канале при однородном профиле скорости.....	249
9.3. Теплообмен при ламинарном течении в круглой трубе. Задача Гретца—Нуссельта.....	251
9.4. Теплообмен в круглой трубе при постоянной плотности теплового потока на стенке	254
9.5. Вязкостный режим. Режим смешанной конвекции	257
9.6. Задачи с решениями.....	262

Глава десятая. Теплообмен при турбулентном течении в трубах

10.1. Аналогия Рейнольдса.....	264
10.2. Интеграл Лайона.....	266
10.3. Теплообмен при турбулентном течении в круглой трубе	267
10.4. Теплообмен при турбулентном течении в кольцевом канале	273
10.5. Теплообмен при смешанной (вынужденной и свободной) турбулентной конвекции	275
10.6. Особенности теплообмена в около- и сверхкритической области параметров состояния вещества	278
10.7. Задачи с решениями.....	281

Глава одиннадцатая. Теплообмен при поперечном обтекании трубы и пучка труб

11.1. Зависимость характера обтекания цилиндра от числа Рейнольдса.....	286
11.2. Теплоотдача при обтекании цилиндра	289
11.3. Конструктивные особенности пучков труб, теплоотдача при их обтекании, а также характер течения жидкости в этих пучках	291
11.4. Задачи с решениями.....	294

Часть третья. ТЕПЛОБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Глава двенадцатая. Теплообмен при конденсации пара

12.1. Виды конденсации. Термические сопротивления в процессе конденсации пара на охлаждаемой стенке.....	297
12.2. Теория пленочной конденсации на охлаждаемой вертикальной стенке (теория Нуссельта). Влияние различных факторов на теплоотдачу при ламинарном течении пленки	301

12.3. Конденсация пара на вертикальной стенке при смешанном режиме течения пленки	308
12.4. Конденсация пара на наружной поверхности горизонтальных труб	312
12.5. Теплообмен при конденсации пара в трубах	317
12.6. Капельная конденсация	321
12.7. Задачи с решениями	323
Глава тринадцатая. Теплообмен при кипении	330
13.1. Основные сведения о механизме парообразования	330
13.2. Кривая кипения	339
13.3. Теплоотдача и критические тепловые потоки при кипении в большом объеме	343
13.4. Общие сведения о кипении при вынужденной конвекции в трубах	348
13.5. Теплоотдача при кипении в трубах	352
13.6. Кризисы теплоотдачи при кипении в трубах	356
13.7. Задачи с решениями	361
Часть четвертая. МАССООБМЕН	
Глава четырнадцатая. Уравнения теории массо- и теплообмена	369
14.1. Основные понятия	369
14.2. Закон Фика. Коэффициент диффузии	372
14.3. Уравнения диффузии и неразрывности	375
14.4. Уравнения движения смеси	377
14.5. Уравнение энергии. Число Льюиса	379
14.6. Уравнения баланса массы и энергии для межфазной границы	382
14.7. Диффузионный пограничный слой. Уравнения теории пограничного слоя при наличии массообмена	385
14.8. Коэффициент массоотдачи. Аналогия процессов переноса массы, теплоты и количества движения	388
Глава пятнадцатая. Массо- и теплообмен при испарении, конденсации и химических реакциях	397
15.1. Стефанов поток массы	397
15.2. Массо- и теплообмен при испарении в парогазовую среду	399
15.3. Массо- и теплообмен при конденсации из парогазовой смеси	401
15.4. Особенности процессов тепломассопереноса при химических реакциях	403
15.5. Задачи с решениями	406
Часть пятая. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ	
Глава шестнадцатая. Основные понятия и законы теплового излучения	417
16.1. Общие сведения о тепловом излучении	417
16.2. Интенсивность излучения и плотность потока излучения. Вектор плотности потока излучения	420
16.3. Закон Кирхгофа	424
16.4. Законы излучения абсолютно черного тела	427

16.5. Поглощательная и отражательная способности тел. Степень черноты	430
16.6. Задачи с решениями	435

Глава семнадцатая. Теплообмен излучением между телами, разделенными прозрачной средой

17.1. Два метода изучения процессов теплообмена излучением. Классификация потоков излучения	438
17.2. Лучистый теплообмен между двумя безграничными пластинами	440
17.3. Лучистый теплообмен в системе, состоящей из двух концентрических сфер или двух коаксиальных цилиндров	443
17.4. Угловые коэффициенты излучения	445
17.5. Расчет теплообмена излучением в произвольной системе тел. Зональный метод	451
17.6. Теоретическое обоснование зонального метода. Интегральные уравнения теории теплообмена излучением	455
17.7. Метод Сурникова	457
17.8. Задачи с решениями	460

Глава восемнадцатая. Инженерный метод расчета лучистого теплообмена в системе тел, заполненной излучающей и поглощающей средой

18.1. Поглощательная способность и степень черноты среды	464
18.2. Расчет теплообмена излучением в системе типа «газ в черной оболочке»	472
18.3. Обобщенные угловые коэффициенты излучения	474
18.4. Зональный метод расчета теплообмена излучением в замкнутой системе тел, заполненной поглощающей средой	478
18.5. Теплообмен излучением в системе типа «серый газ в серой оболочке» и «несерый газ в несерой оболочке»	480
18.6. Задачи с решениями	482

Глава девятнадцатая. Перенос энергии излучения в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде

19.1. Уравнение переноса энергии излучения и его решение	485
19.2. Интенсивность и плотность потока излучения в плоском слое среды	489
19.3. Оптически тонкий и оптически толстый слои	496
19.4. Сложный тепломассообмен	498

Часть шестая. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

Глава двадцатая. Общие сведения о теплообменных аппаратах

20.1. Основное назначение теплообменных аппаратов	502
20.2. Рекуперативные теплообменники	504
20.3. Регенеративные теплообменные аппараты	506
20.4. Аппараты смешивающего типа	507

Глава двадцать первая. Расчет теплообменных аппаратов	511
21.1. Уравнение теплового баланса. Уравнения баланса массы	511
21.2. Средний температурный напор	512
21.3. Уравнение теплопередачи	518
21.4. Поверочный расчет теплообменного аппарата. Сравнение прямотока с противотоком	519
21.5. Гидравлический расчет аппаратов	523
21.6. Тепловой расчет регенеративных теплообменников	525
21.7. Задачи с решениями	527
Приложения	534
Список литературы	544
Алфавитно-предметный указатель	547

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначена для студентов, обучающихся по направлению «Теплоэнергетика» и специализирующихся в области промышленной теплоэнергетики и теплотехники. Она представляет собой учебное пособие по курсу «Тепломассообмен» — составной части дисциплины «Теоретические основы теплотехники». В книге подробно излагаются такие задачи теории тепломассообмена, которые характерны для условий работы тепловых и атомных электрических станций и тепломассообменных аппаратов промышленных предприятий.

Многие годы основным учебником для студентов теплоэнергетических и теплотехнических специальностей вузов была книга «Теплопередача» (авторы В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел). Последнее издание этой книги вышло в 1981 г. При написании учебного пособия авторы учитывали то, что за прошедшее время в теории и методах расчета процессов тепломассообмена получены новые результаты и сформировалась система высшего образования, включающая в себя три ступени (уровня): бакалавр, дипломированный инженер, магистр. В связи с этим возникла необходимость написания такого учебного пособия, которое по охвату теоретического материала было бы доступно широкому контингенту студентов.

Современный этап развития техники и промышленности, широкое внедрение компьютеров в инженерную практику требуют повышения уровня знаний инженеров в области фундаментальных наук, и в частности в области теории тепломассообмена. Именно на основе этих знаний можно разрабатывать и совершенствовать методы расчета процессов тепломассообмена и создавать новое технологическое оборудование.

Авторы настоящего учебного пособия учитывали специфику теплоэнергетических специальностей вузов и свой опыт преподавания указанного курса на кафедре теоретических основ теплотехники Московского энергетического института.

В подготовке специалистов-теплоэнергетиков важную роль играют практические занятия, учебные научно-исследовательские работы, индивидуальные расчетные задания, курсовое проектирование. С этой целью авторами кафедры ТОТ МЭИ написано учебное пособие [51]. Имеется также и другая учебная литература [8]. Однако в настоящее время практически отсутствует руководство по решению типовых задач инженерного расчета элементов тепломассообменных аппаратов. В связи с этим авторы сочли необходимым привести примеры решения задач по всем основным разделам курса «Тепломассообмен». По мнению авторов, усвоение этих приме-

ров должно способствовать лучшему пониманию теории тепломассообмена, развитию умений и навыков в решении практических задач.

В книге достаточно подробно излагаются примеры решения задач с применением компьютеров. В список литературы включены практически все имеющиеся в настоящее время справочники и справочные пособия.

В книге § 2.9 и 3.7 написаны В.Ю. Демьяненко. При подготовке к изданию примеров решения задач, связанных с применением компьютера, большую помощь оказал Д.А. Лавров. Авторы глубоко признательны В.Ю. Демьяненко и Д.А. Лаврову за участие в подготовке этой книги.

В заключение авторы выражают благодарность преподавателям кафедры ТОТ МЭИ, принявшим участие в обсуждении рукописи учебного пособия и оказавшим помощь при подготовке ее к изданию.

Авторы будут признательны за все замечания и пожелания по улучшению книги, которые следует направлять по адресу: 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, Издательство МЭИ.

Авторы

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- a — температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$;
- a_t — турбулентная температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$;
- A — поглощательная способность;
- b — параметр проницаемости;
- c — массовая концентрация;
- c_f — коэффициент трения (при внешнем обтекании тела);
- c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$;
- d — диаметр, м;
- D — коэффициент диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; пропускательная способность;
- E — плотность потока излучения, $\text{Вт}/\text{м}^2$;
- E_0 — плотность потока излучения абсолютно черного тела, $\text{Вт}/\text{м}^2$;
- F — площадь поверхности теплообмена, м^2 ;
- g — ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$;
- G — массовый расход, $\text{кг}/\text{с}$;
- h — высота, м; энтальпия, $\text{Дж}/\text{кг}$;
- I — интенсивность излучения, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{ср})$;
- j — плотность потока массы, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$;
- k — коэффициент теплопередачи, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$;
- l — длина, м;
- $l_{\text{н.г}}$ — длина начального гидродинамического участка, м;
- $l_{\text{н.т}}$ — длина начального термического участка, м;
- l_0 — характерный размер, м;
- p — давление, Па;
- Δp — перепад давлений, Па;
- q — плотность теплового потока, $\text{Вт}/\text{м}^2$;
- q_v — мощность источников теплоты, $\text{Вт}/\text{м}^3$;
- Q — тепловой поток, Вт;
- r — радиус, м; теплота парообразования, $\text{Дж}/\text{кг}$;
- R — термическое (тепловое) сопротивление, $\text{м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$; отражательная способность;
- S — площадь сечения, м^2 ;
- t — температура, $^{\circ}\text{C}$;
- T — температура, К;
- ΔT — температурный напор, К;
- v — скорость, $\text{м}/\text{с}$;

v_* — динамическая скорость, м/с;
 x — координата, м; массовое расходное паросодержание;
 y, z — координаты, м;
 α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м² · К); коэффициент поглощения, м⁻¹;
 β — коэффициент массоотдачи, кг/(м² · с); коэффициент объемного расширения, К⁻¹;
 γ — коэффициент перемешиваемости;
 δ — толщина, м; толщина динамического пограничного слоя, м;
 δ_T — толщина теплового пограничного слоя, м;
 δ_D — толщина диффузионного пограничного слоя, м;
 ε — степень черноты;
 θ — разность температур, К;
 Θ — безразмерная температура;
 λ — теплопроводность, Вт/(м · К); длина волны излучения, м;
 μ — динамическая вязкость, Па · с;
 μ_T — турбулентная динамическая вязкость, Па · с;
 ν — кинематическая вязкость, м²/с;
 ν_T — турбулентная кинематическая вязкость, м²/с;
 ξ — коэффициент трения (при течении в трубах);
 ρ — плотность, кг/м³;
 σ — напряжение, Па; поверхностное натяжение, Н/м;
 σ_0 — постоянная Стефана—Больцмана, Вт/(м² · К⁴);
 σ_c — касательное напряжение на стенке, Па;
 τ — время, с.

Числа подобия:

$Bi = \alpha l_0 / \lambda_c$ — число Био;
 $Fo = \alpha \tau / l_0^2$ — число Фурье;
 $Gr = g \beta \Delta T l_0^3 / \nu^2$ — число Грасгофа при $T_c = \text{const}$;
 $Gr_q = g \beta q_c l_0^4 / (\nu^2 \lambda)$ — число Грасгофа при $q_c = \text{const}$;
 $Ra = Gr Pr$ — число Релея;
 $Le = D / a$ — число Льюиса;
 $Nu = \alpha l_0 / \lambda_{ж}$ — число Нуссельта;
 $Nu_D = \beta l_0 / (\rho D)$ — диффузионное число Нуссельта;
 $Pe = v_0 l_0 / a$ — число Пекле;
 $Pr = \nu / a$ — число Прандтля;
 $Pr_D = \nu / D$ — диффузионное число Прандтля;
 $Re = v_0 l_0 / \nu$ — число Рейнольдса;
 $St = \alpha / (\rho v_0 c_p)$ — число Стантона.

ВВЕДЕНИЕ

Самопроизвольный необратимый процесс переноса теплоты в пространстве с неоднородным полем температуры называется *теплообменом*. Пространство может быть заполнено многокомпонентной смесью веществ. Если концентрации компонентов в различных точках пространства разные, происходит необратимый процесс переноса массы компонентов из одной области в другую. Этот процесс называется *массообменом*. Совместно протекающий процесс переноса теплоты и массы вещества называется *теплотомассообменом*.

Как любой реальный самопроизвольный процесс теплотомассообмена является необратимым и продолжается до тех пор, пока в системе не установится термодинамическое равновесие.

Перенос теплоты при непосредственном контакте более нагретых элементов тела (или среды) с менее нагретыми, осуществляемый посредством хаотического движения и взаимодействия микрочастиц (молекул, атомов, электронов, ионов), называется *теплопроводностью*. Интенсивность процесса теплопроводности в различных телах разная.

Металлы обладают наибольшей способностью проводить теплоту. Их теплопроводность при не очень низких температурах в основном объясняется тепловым движением электронов. Чем меньше удельное электрическое сопротивление металла, тем выше его теплопроводность.

Газы — плохие проводники теплоты. Теплопроводность газов обусловлена хаотическим тепловым движением молекул. Она возрастает с увеличением температуры, так как при этом увеличивается скорость теплового движения. При не очень высоких давлениях теплопроводность газов от давления не зависит из-за того, что с увеличением давления, хотя и увеличивается число молекул в единице объема, но одновременно уменьшается длина свободного пробега.

Передача теплоты в твердых телах — диэлектриках происходит посредством колебаний кристаллической решетки, в узлах которой находятся атомы, а в жидкостях — за счет упругих колебаний молекул и их перескока из одной области в другую.

В движущихся жидкостях и газах происходит *конвективный теплообмен*. В этом случае распространение теплоты в пространстве осуществляется одновременно двумя способами: за счет теплового движения микрочастиц и посредством перемещения макрочастиц (элементов жидкости или газа) из одной точки пространства в другую. Последний способ называется *конвективным переносом* теплоты.

Движение называют *вынужденным*, если оно происходит за счет действия внешних сил, приложенных на границах системы (например, за счет перепада давления, создаваемого насосом или вентилятором), и *свободным*, если оно обусловлено действием неоднородного поля массовых сил (сил тяжести, сил инерции), приложенных к частям среды (жидкости или газа) внутри системы. Типичным случаем свободного движения является *термогравитационная конвекция*, когда более нагретые частицы среды архимедовой силой выталкиваются вверх, а менее нагретые опускаются вниз. В ряде случаев вторичные токи свободной конвекции оказывают существенное влияние на процесс переноса теплоты при вынужденном движении среды. Эти случаи называют теплообменом при *смешанной конвекции*.

На процесс конвективного теплообмена оказывает влияние скорость движения среды и ее распределение в пространстве. В движущейся неравномерно нагретой среде с неоднородным распределением скорости происходит как перенос теплоты, так и перенос количества движения (импульса). Интенсивность переноса теплоты зависит от интенсивности переноса импульса, поэтому первый процесс невозможно рассматривать в отрыве от второго. С этим связан тот факт, что некоторые положения гидродинамики или механики жидкости широко используются в теории тепломассообмена.

Конвективный теплообмен между движущейся средой и омываемой ею поверхностью твердого тела называется *теплоотдачей*. Изучение этого процесса имеет большое практическое значение, так как нагревание или охлаждение жидкостей или газов в технике и быту часто происходит либо при внешнем обтекании твердой поверхности теплообмена (например, поверхности трубы), либо при внутреннем обтекании (например, при движении жидкости внутри трубы).

В общем случае под процессом теплоотдачи понимается конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью на границе ее раздела с другой средой; причем под границей раздела понимается не только твердое тело, но и жидкость или газ, отличные от движущейся среды. Последний случай характерен для совместно протекающих процессов массо- и теплообмена.

Массообменом называется процесс переноса массы вещества в пространстве с неоднородным распределением концентрации этого вещества (в общем случае — неоднородным распределением химического потенциала вещества, являющегося функцией температуры, давления и концентрации). Явления массопереноса объясняются диффузией компонентов в смеси веществ. Механизмы диффузии и теплопроводности идентичны: оба процесса обусловлены хаотическим тепловым движением молекул. Распространение массы вещества в движущейся смеси веществ, т.е. конвективный массообмен, происходит одновременно как за счет молекулярной диффузии, так и за счет конвективного переноса вещества.

В практике важными являются процессы переноса массы при химических реакциях, протекающих в объеме смеси или на границе раздела фаз, а также процессы переноса при фазовых переходах — испарении жидкости в парогазовую среду или конденсации пара из парогазовой смеси.

Теплообмен излучением включает в себя совокупность процессов: превращение внутренней энергии вещества в энергию излучения (энергию электромагнитных волн или фотонов); перенос излучения; поглощение излучения веществом. Перенос теплоты одновременно излучением и теплопроводностью называется *радиационно-кондуктивным* теплообменом, а перенос теплоты излучением, теплопроводностью и конвекцией — *радиационно-конвективным* теплообменом.

Для теоретического изучения процессов тепломассопереноса на основе общих законов физики составляется их математическое описание. При этом среду, в которой протекают эти процессы, считают *сплошной*. Это значит, что в физический бесконечно малый элемент ΔV (элементарный объем) содержится очень большое число микрочастиц. Под ΔV понимается такой объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с характерным геометрическим размером, приведенным в изучаемой задаче (например, с диаметром трубы). Тогда можно говорить о *локальном* (т.е. в пределах элемента ΔV) *термодинамическом равновесии* в любой момент времени в любой точке материальной среды и рассматривать параметры состояния среды (температуру, давление, плотность, концентрацию компонентов смеси и др.) как непрерывные функции координат точки и времени. Понятие сплошной среды позволяет распространить уравнения термодинамики и законы теплового излучения на термодинамически неравновесные процессы переноса теплоты, импульса и массы вещества.

Понятие локального термодинамического равновесия применимо к большинству реальных процессов тепломассообмена. Исключение составляют сильно разреженные газы и такие особые случаи, как ударные волны, переход газа через скачок уплотнения и др. В этих особых случаях характерное время изменения состояния системы весьма мало. При этом совокупность большого числа микрочастиц в элементе ΔV за это время не успевает придти в состояние термодинамического (статистического) равновесия.

Состояние сплошной среды можно считать полностью определенным, если в каждой точке пространства в любой момент времени известны значения следующих величин: температуры, концентрации компонентов смеси, давления и скорости. Другими словами, из математического описания процессов тепломассообмена должны быть найдены *поля* указанных величин. Знание этих полей позволяет (в этом мы убедимся в дальнейшем) найти количества теплоты и вещества, переносимые через поверхность системы, гидравлическое сопротивление и другие величины, представляющие практический интерес.

Заложив в основу теории теплообмена модель сплошной среды, мы тем самым пользуемся термодинамическим методом изучения явлений переноса, т.е. отвлекаемся от внутреннего физического механизма этих явлений и никак не учитываем свойства конкретной среды. Как показывает опыт, интенсивность процессов переноса в различных средах разная. Поэтому наряду с общими законами физики (законом сохранения и превращения энергии, законом сохранения массы, законом сохранения импульса) при составлении математического описания процессов теплообмена должны привлекаться эмпирические законы (законы Фурье, Фика, Ньютона), в которых свойства среды учитываются соответствующими коэффициентами переноса. Эти коэффициенты переноса, а также коэффициенты, характеризующие излучение реальной среды, получают либо экспериментально, либо с помощью молекулярно-кинетической или электромагнитной теории, либо методами статистической и квантовой физики.

Процессы теплообмена широко распространены на практике. Знание их закономерностей имеет первостепенное значение для тепловой и ядерной энергетики, промышленной теплоэнергетики, энергостроения, авиации, космонавтики, ракетостроения и др.

Наука о теплообмене имеет давнюю историю. Ее начало восходит ко временам М.В. Ломоносова. Основы теории теплообмена были заложены в XIX в. трудами ученых многих стран мира. В связи с практическими потребностями ее интенсивное развитие началось в начале XX в. и продолжается в настоящее время.

Сложность явлений теплопереноса приводит к тому, что многие практически важные задачи не могут быть решены аналитическими методами. Тогда прибегают к численным методам с их реализацией на мощных бытовых компьютерах.

Наряду с теорией важную роль в изучении процессов теплообмена играет эксперимент, с помощью которого проверяют гипотезы и результаты теории, а также получают информацию о механизме явлений. В ряде случаев только опытным путем можно получить формулы, необходимые для расчета тепло- и массообменных аппаратов, широко распространенных во многих отраслях промышленности.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.1. Температурное поле. Градиент температуры

Совокупность значений температуры во всех точках изучаемого пространства в данный момент времени называется *температурным полем*. Аналитически температурное поле можно представить в виде функции температуры от координат точек пространства и времени.

В зависимости от конфигурации изучаемой области пространства (т.е. от формы тела) выбирают декартову (рис. 1.1, а), цилиндрическую (рис. 1.1, б) или сферическую (рис. 1.1, в) системы координат. Если соответственно этим системам координат известны функции $T = T(x, y, z, \tau)$, $T = T(r, \varphi, z, \tau)$ или $T = T(r, \theta, \varphi, \tau)$, то, фиксируя в них момент времени τ , получаем температурное поле при данном значении τ . Если с течением времени поле температуры не изменяется, оно называется *стационарным*; в противном случае — *нестационарным*.

Могут быть случаи, когда температура не зависит от одной из координат. Тогда поле называют *плоским* или *двухмерным*: $T = T(x, y)$ или $T = T(r, \varphi)$. Если к тому же $\partial T / \partial y = 0$ или $\partial T / \partial \varphi = 0$, то получаем: $T = T(x)$ или $T = T(r)$. Этот частный случай представляет одномерное температурное поле.

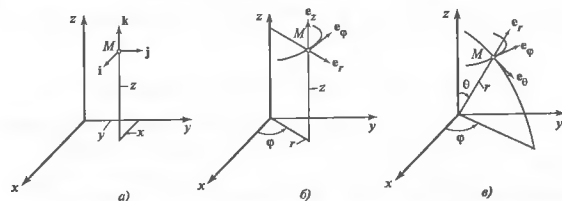


Рис. 1.1. Декартова (а), цилиндрическая (б) и сферическая (в) системы координат
i, j, k, e_r, e_φ, e_z — орты

Поверхность, во всех точках которой температура одинакова, называется *изотермической*. В плоскости пересечения тела эти поверхности оставляют следы в виде изотерм — линий одинаковой температуры.

Скорость возрастания температуры в данном направлении определяется значением производной от температуры по направлению $\mathbf{l}_0 \partial T / \partial \mathbf{l}_0$, где $\mathbf{l}_0$ — единичный вектор. Если направление $\mathbf{l}_0$ совпадает с направлениями $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, то производные по этим направлениям равны частным производным $\partial T / \partial x, \partial T / \partial y$ и $\partial T / \partial z$.

Наибольшее значение имеет производная по направлению нормали $\mathbf{n}_0$ к изотермической поверхности. Пусть φ — угол между векторами $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{l}_0$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{l}_0} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_0} \cos \varphi. \quad (1.1)$$

Градиент температуры (обозначается $\text{grad } T$ или ∇T) — вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности (в сторону увеличения температуры) и имеющий длину, равную производной по этому направлению. Проекция градиента температуры на произвольное направление $\mathbf{l}_0$ есть производная $\partial T / \partial \mathbf{l}_0$.

В декартовых координатах

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1.1a)$$

в цилиндрических координатах

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (1.1б)$$

в сферических координатах

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (1.1в)$$

Наряду со скалярным полем температуры в неравномерно нагретом теле имеется векторное поле $\text{grad } T$.

1.2. Тепловой поток. Вектор плотности теплового потока

Тепловым потоком Q , Вт, называется количество теплоты, проходящее через произвольную поверхность площадью F в единицу времени.

Плотность теплового потока q , Вт/м², — это отношение теплового потока ΔQ , проходящего через элементарную площадку ΔF , к площади ΔF :

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta F}. \quad (1.2)$$

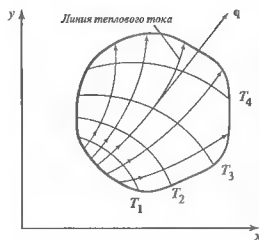


Рис. 1.2. Изотермы и линии теплового тока в случае плоского температурного поля

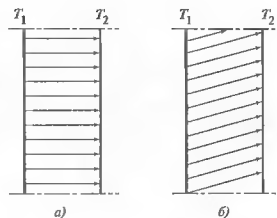


Рис. 1.3. Линии теплового тока в плоском слое изотропного (а) и анизотропного (б) материалов

Математически тепловой поток представляет собой поток векторного поля $\mathbf{q}$ (поток вектора $\mathbf{q}$), где $\mathbf{q}$ — *вектор плотности теплового потока*. По определению поток векторного поля $\mathbf{q}$ есть поверхностный интеграл от скалярного произведения вектора $\mathbf{q}$ и единичного вектора нормали $\mathbf{n}_0$ к элементарной площадке поверхности. Тогда тепловой поток

$$Q = \int_F \mathbf{q} \mathbf{n}_0 dF = \int_F q_n dF, \quad (1.3)$$

где q_n — проекция $\mathbf{q}$ на направление нормали $\mathbf{n}_0$.

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{q}$ это такой *вектор, проекция которого на данное направление есть плотность теплового потока, проходящего через элементарную площадку, перпендикулярную к этому направлению*.

В направлении вектора $\mathbf{q}$ интенсивность переноса теплоты максимальна, а в перпендикулярном к нему направлении потока теплоты нет. Распространение теплоты в теле наглядно можно представить в виде таких *линий теплового тока*, в каждой точке которых вектор $\mathbf{q}$ направлен по касательной к ним. Для *изотропных* тел (в природе их большинство) теплопроводность не зависит от направления и вектор $\mathbf{q}$ перпендикулярен к изотермической поверхности. На рис. 1.2 показана картина распределения линий теплового тока в случае плоского температурного поля. На рис. 1.3 дано сопоставление линий теплового тока в пластинке, изготовленной из изотропного (например, из стали) или анизотропного (например, из поваренной соли, несландского шпата или другого какого-то монокристалла) материала¹.

Важно подчеркнуть, что в (1.3) Q — поток вектора $\mathbf{q}$ через ориентированную поверхность. Тогда, если угол φ между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{n}_0$ острый

¹ Далее будем считать тела изотропными.

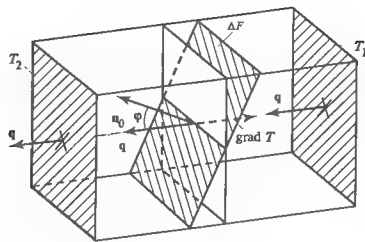
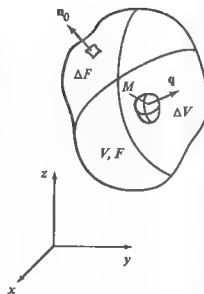


Рис. 1.4. К формуле (1.3)

Рис. 1.5. К формуле (1.4) →



(рис. 1.4), $q_n > 0$, если угол φ тупой, $q_n < 0$. Следовательно, при подсчете количества теплоты, которое за элементарный промежуток времени Δt подводится к телу объемом V , ограниченному замкнутой поверхностью F (здесь $\mathbf{n}_0$ — внешняя нормаль) (рис. 1.5), перед интегралом в (1.3) надо поставить знак «минус».

Для вывода уравнений теории тепломассообмена в дальнейшем необходимо знать то количество теплоты $\Delta \tilde{Q}$, Дж, которое за время Δt путем теплопроводности подводится к элементарному объему ΔV . Найдем $\Delta \tilde{Q}$, предполагая, что векторное поле $\mathbf{q}$ известно.

По определению предел, к которому стремится отношение потока вектора $\mathbf{q}$ к объему тела V при стягивании объема в точку M , называется *дивергенцией* вектора $\mathbf{q}$, Дж/(м³·с):

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\oint \mathbf{q} \mathbf{n}_0 dF}{V}.$$

Взятая со знаком «минус», дивергенция вектора $\mathbf{q}$ равна отношению количества теплоты $\Delta \tilde{Q}$, подводимой к элементарному объему ΔV за время Δt , к ΔV и Δt . Отсюда следует, что

$$\Delta \tilde{Q} = -\operatorname{div} \mathbf{q} \Delta V \Delta t. \quad (1.4)$$

Выведем формулу (1.4) другим способом. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка в неравномерно нагретом теле (рис. 1.6). Она находится в центре элементарного объема в форме параллелепипеда со сторонами $\Delta l_1 = 2\Delta x$, $\Delta l_2 = 2\Delta y$, $\Delta l_3 = 2\Delta z$. Объем $\Delta V = \Delta l_1 \Delta l_2 \Delta l_3$. В точке M вектор $\mathbf{q}$ имеет проекции $q_x(x, y, z)$, $q_y(x, y, z)$ и $q_z(x, y, z)$. Рассмотрим две грани параллелепипеда, перпендикулярные к оси Ox . Подсчитаем ко-

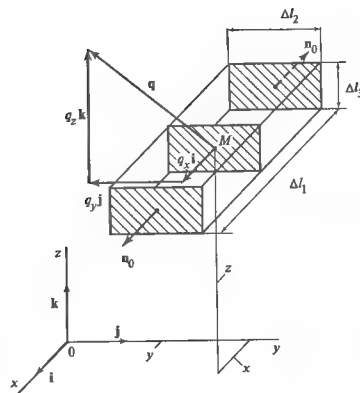


Рис. 1.6. Элементарный объем твердого тела. К выводу формулы (1.4)

личество теплоты $\Delta \tilde{Q}_x$, которое за время Δt через эти грани поступает в объем ΔV . Центр одной грани имеет координаты $x + \Delta x$, y , z . Плотность теплового потока здесь $q_x(x + \Delta x, y, z)$, причем $q_x = q_n$. Следовательно, через эту грань подводится количество теплоты, равное $-q_x(x + \Delta x, y, z) \Delta l_2 \Delta l_3 \Delta t$. Для второй грани плотность теплового потока будет $q_x(x - \Delta x, y, z)$, здесь $q_x = -q_n$. Отсюда подводимое количество теплоты равно $q_x(x - \Delta x, y, z) \Delta l_2 \Delta l_3 \Delta t$. Согласно формуле Тейлора, с учетом того, что Δx малая величина,

$$q(x + \Delta x, y, z) = q_x(x, y, z) + \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x;$$

$$q(x - \Delta x, y, z) = q_x(x, y, z) - \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x.$$

Теперь легко получить $\Delta \tilde{Q}_x = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta V \Delta t$. Аналогично $\Delta \tilde{Q}_y = -\frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta V \Delta t$ и

$$\Delta \tilde{Q}_z = -\frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta V \Delta t.$$

В целом подводимое к ΔV количество теплоты

$$\Delta \tilde{Q} = \Delta \tilde{Q}_x + \Delta \tilde{Q}_y + \Delta \tilde{Q}_z = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \Delta V \Delta t = -\operatorname{div} \mathbf{q} \Delta V \Delta t.$$

Формула (1.4) доказана.

Запишем формулы для вычисления дивергенции вектора $\mathbf{q}$:

в декартовых координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}; \quad (1.5)$$

в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_z}{\partial z}; \quad (1.5a)$$

в сферических координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta q_\theta) \right]. \quad (1.5b)$$

1.3. Закон Фурье. Теплопроводность

Основываясь на результатах наблюдений, Фурье высказал гипотезу о том, что вектор плотности теплового потока в данной точке изотропного тела пропорционален градиенту температуры в той же точке. За исключением особых, редко встречающихся случаев эта гипотеза была подтверждена экспериментально, а для газов — и теоретически. В настоящее время гипотеза Фурье формулируется в виде закона:

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (1.6)$$

Знак «минус» в (1.6) объясняется тем, что векторы $\mathbf{q}$, Вт/м², и $\operatorname{grad} T$, К/м, направлены противоположно друг другу (см. рис. 1.4).

Коэффициент пропорциональности λ , Вт/(м·К), в (1.6) называется теплопроводностью вещества¹. Теплопроводность является физическим параметром вещества, который характеризует интенсивность процесса теплопроводности в веществе и численно равен плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

Закон Фурье позволяет найти плотность теплового потока, а следовательно, и тепловой поток через произвольную поверхность [см. (1.3)], если известно температурное поле в изучаемой области пространства. В теории теплопроводности закон Фурье привлекается при выводе основного уравнения теории — уравнения теплопроводности (см. § 1.4). Закон Фурье, наряду с другими подобными законами (о них пойдет речь ниже), позволяет получить замкнутое математическое описание процессов конвективного теплообмена, а также сложных (с учетом переноса энергии излучения) процессов теплообмена.

Теплопроводность веществ, как правило, находится экспериментально либо рассчитывается методами молекулярно-кинетической теории, статистической и квантовой физики. Значения теплопроводности приводятся в таблицах теплотехнических свойств веществ (см. табл. П.1—П.10).

¹ Величину λ называют также коэффициентом теплопроводности.

Таблица 1.1. Теплопроводность λ некоторых веществ и материалов

Вещество или материал	T, К	λ , Вт/(м·К)
Серебро	273	420
Медь	273	395
Алюминий	273	207
Латунь (67 % Cu, 33 % Zn)	273	101
Натрий	573	71
Сталь 20	273	55
Нержавеющая сталь X18H9T	273	14
Бетон сухой	273	0,84
Кирпич красный	273	0,70
Вода (состояние насыщения)	373	0,611
Водород	273	0,172
Гелий	273	0,143
Кирпич диатомитовый	273	0,113
Трансформаторное масло	273	0,112
Кирпич пеношамотный	273	0,100
Котельная накипь, богатая силикатом	373	0,080
Воздух	273	0,0244
Водяной пар (состояние насыщения)	373	0,0237
Хлор	273	0,0089

Теплопроводность зависит от температуры вещества. В табл. 1.1 приведены значения λ для отдельных представителей различных веществ и материалов в обычных условиях. При сверхнизких (криогенных) температурах теплопроводность некоторых металлов может достигать очень больших значений. Например для чистой меди при $T \approx 10$ К $\lambda \approx 10^4$ Вт/(м·К).

На теплопроводность сталей помимо их состава, температуры, наличия примесей и других показателей оказывает влияние «тепловое старение», которое проявляется в появлении хрупкости и потере прочностных свойств. Теплопроводность охрупченных сталей заметно ниже, чем обычных.

Строительные и теплоизоляционные материалы, как правило, имеют пористую структуру. За счет того, что в порах находится воздух, который является плохим проводником теплоты, эти материалы обладают низкой теплопроводностью. Для пористых, а также других неоднородных материалов под λ следует понимать некоторую «эффективную» теплопроводность. Теплопроводность влажных теплоизоляционных материалов выше, чем сухих.

Для многих материалов в нешироком диапазоне температур зависимость $\lambda = \lambda(T)$ можно описать линейной функцией вида

Таблица 1.2. Значения λ_0 , β , λ'_0 и β' для некоторых теплоизоляционных материалов

Материал	λ_0 , Вт/(м·К)	β , К ⁻¹	λ'_0 , Вт/(м·К)	β' , 1/°С
Асбест.				
$\rho = 500 \text{ кг/м}^3$	0,0551	0,00345	0,107	0,00177
$\rho = 800 \text{ кг/м}^3$	0,0881	0,00216	0,14	0,00136
Диафонтит молотый, $\rho = 450 \text{ кг/м}^3$	0,0145	0,0192	0,091	0,00308
Минеральная стеклоткань, $\rho = 200 \text{ кг/м}^3$	-0,123	-0,00521	0,0052	0,0123
Совелит, $\rho = 500 \text{ кг/м}^3$	0,0663	0,00131	0,0901	0,00096
Шлаковая вата (сорт 0), $\rho = 200 \text{ кг/м}^3$	0,0204	0,00711	0,06	0,00242

Примечание. Значения λ_0 и β соответствуют формуле $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$, а λ'_0 и β' — формуле $\lambda = \lambda'_0(1 + \beta' T)$.

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta T), \quad (1.7)$$

где λ_0 и β — постоянные, определяемые опытным путем.

Значения λ_0 и β для некоторых материалов приведены в табл. 1.2. Наибольшей теплопроводностью обладают металлы. Примеси существенно снижают λ .

Теплопроводность газов, как указывалось во введении, не зависит от давления. Из элементарной молекулярно-кинетической теории, основанной на модели идеально упругих твердых шариков, следует $\lambda \sim \sqrt{T}$. Эта зависимость приближенно выполняется при высоких температурах, превышающих 2000 К. Из теории, более детально учитывающей взаимодействие молекул, вытекает, что $\lambda \sim T^{0,75}$. Последняя зависимость согласуется с опытными данными при умеренных температурах.

Теплопроводность газовых смесей не подчиняется закону аддитивности. В этом случае λ находят по экспериментально полученным таблицам, а при их отсутствии — вычисляют по одной из теоретических формул, например по формуле Мейсона—Саксона:

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{1 + 1,065 \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{G_{ik} x_i}}, \quad (1.8)$$

где N — число компонентов смеси;

$$x_i = \frac{c_i/M_i}{\sum_{k=1}^N c_k/M_k} \quad (1.9)$$

(здесь c_i — массовая доля i -го компонента (массовая концентрация), M_i — относительная молекулярная масса);

$$G_{ik} = \frac{[1 + (\mu_i/\mu_k)^{1/2} (M_k/M_i)^{1/4}]^3}{\sqrt{8(1 + M_i/M_k)^{1/2}}}. \quad (1.10)$$

Здесь μ_i — динамическая вязкость i -го компонента.

Теплопроводности большинства жидкостей с повышением температуры уменьшаются (углеводороды, одноатомные спирты, органические и неорганические соединения, нефтепродукты и др.). Для глицерина, некоторых многоатомных спиртов, сплава натрия — калия λ возрастает с повышением температуры. Зависимость теплопроводности от температуры для обычной и тяжелой воды имеет сложный характер. Сначала она возрастает, при некоторой температуре $t = t_{\text{max}}$ достигает максимального значения, а затем уменьшается. Для обычной воды в состоянии насыщения $\lambda_{\text{max}} = 0,679 \text{ Вт/(м·К)}$ при $t = 100 \dots 105^\circ \text{C}$. С повышением давления теплопроводность жидкостей возрастает. Однако зависимость слабая. Так, для воды при $t = 20^\circ \text{C}$ и давлении $p = 0,101 \text{ МПа}$ $\lambda = 0,599 \text{ Вт/(м·К)}$, а при $p = 200 \text{ МПа}$ $\lambda = 0,684 \text{ Вт/(м·К)}$, т.е. рост теплопроводности составляет 13 %.

1.4. Уравнение теплопроводности

В основе теории теплопроводности лежит дифференциальное уравнение, которое служит для отыскания температурного поля в твердом теле, а также в неподвижной жидкой или газообразной среде. Это уравнение, называемое *уравнением теплопроводности*, получено Фурье в 1814 г.

Уравнение теплопроводности можно вывести, применяя первый закон термодинамики к бесконечно малому элементу тела объемом ΔV (см. рис. 1.5). Будем считать, что процесс теплопроводности протекает при $p = \text{const}$. Это условие обычно выполняется на практике.

Учтем, что в теле может происходить выделение теплоты за счет действия внутренних источников (например, теплота может выделяться в результате ядерных реакций или прохождения электрического тока по проводнику). Эту теплоту зададим в виде непрерывной функции $q_v = q_v(x, y, z, t)$, где q_v — мощность источников теплоты, равная отнесенному к единице объема тела количеству теплоты, которое выделяется в единицу времени, Вт/м³.

К элементу тела ΔV за элементарный промежуток времени Δt путем теплопроводности подводится следующее количество теплоты (см. § 1.2):

$$\Delta \tilde{Q}_{\text{тепл}} = - \text{div } q \Delta V \Delta t,$$

где q — вектор плотности теплового потока в точке M .

Выделяемое за счет источников количество теплоты в ΔV за $\Delta \tau$

$$\Delta \tilde{Q}_{\text{ист}} = q_v \Delta V \Delta \tau.$$

Масса выделенного элемента тела равна $\rho \Delta V$ (ρ — плотность); его энтальпия в момент времени τ определяется как $\rho \Delta V h(x, y, z, \tau)$, а в момент $\tau + \Delta \tau$ — как $\rho \Delta V h(x, y, z, \tau + \Delta \tau)$.

На основании первого закона термодинамики для изобарических процессов запишем равенство

$$\rho \Delta V [h(x, y, z, \tau + \Delta \tau) - h(x, y, z, \tau)] = -\operatorname{div} \mathbf{q} \Delta V \Delta \tau + q_v \Delta V \Delta \tau.$$

После сокращения на ΔV выражение разделим на $\Delta \tau$ и при $\Delta \tau \rightarrow 0$ в его левой части будем иметь

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{h(x, y, z, \tau + \Delta \tau) - h(x, y, z, \tau)}{\Delta \tau} = \frac{\partial h}{\partial \tau}.$$

Поскольку энтальпия $h = h(T, p)$, а $T = T(x, y, z, \tau)$ и $p = p(x, y, z, \tau)$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial \tau}. \quad (1.10a)$$

Далее учтем, что в нашем случае ($p = \text{const}$) второе слагаемое в правой части (1.10a) выпадает, а удельная теплоемкость при постоянном давлении определяется по формуле

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p.$$

Тогда первый закон термодинамики для бесконечно малого объема тела ΔV приобретает вид

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_v. \quad (1.11)$$

В (1.11) имеются две неизвестные функции — температура и плотность теплового потока. Применяя закон Фурье (1.6), получаем уравнение теплопроводности:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + q_v. \quad (1.12)$$

В (1.12) λ — заданная функция: $\lambda = \lambda(x, y, z, \tau)$ или $\lambda = \lambda(T)$.

При $\lambda = \text{const}$ (1.12) упрощается:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c_p}. \quad (1.13)$$

Оператор Лапласа $\nabla^2 T = \operatorname{div} \operatorname{grad} T$. В декартовых координатах

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (1.14)$$

в цилиндрических координатах

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (1.14a)$$

в сферических координатах

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta}. \quad (1.14b)$$

В (1.13) a , м²/с, — температуропроводность¹, которая определяется по формуле

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \quad (1.15)$$

Температуропроводность — физическое свойство вещества, от которого зависит скорость изменения температуры в нестационарных процессах теплопроводности. Чем больше a , тем быстрее тело охлаждается или нагревается. Значения a для некоторых веществ приведены ниже:

	a , 10 ⁻⁵ м ² /с
Медь ($T = 273$ К)	11,6
Воздух ($T = 273$ К, $p = 0,101$ МПа)	1,88
Сталь 20 ($T = 273$ К)	1,16
Нержавеющая сталь X18H9T	0,363
Вода ($T = 373$ К, $p = 0,101$ МПа)	0,0169

Аналогично коэффициенту диффузии вещества температуропроводность можно трактовать также как коэффициент диффузии теплоты. Как мы увидим ниже (см. § 5.4), a характеризует также и процессы конвективного теплообмена (как нестационарные, так и стационарные).

Для стационарных процессов температуропроводности скорость изменения температуры равна нулю, и температуропроводность выпадает из (1.13). Тогда при $q_v = 0$ уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$\nabla^2 T = 0. \quad (1.16)$$

¹ Величину a называют также коэффициентом температуропроводности.

Уравнение теплопроводности является дифференциальным уравнением с частными производными. В конкретных случаях его решение находится с привлечением начальных и граничных условий (см. § 1.5), которым должна удовлетворять искомая функция $T = T(x, y, z, \tau)$.

Аналитические методы решения задач теплопроводности достаточно сложны. Они подробно рассматриваются в специальных курсах математической физики [13, 23].

В сжатом виде они приводятся в [5].

Применение классического метода Фурье к решению задач теплопроводности в телах простой геометрической формы будет дано в гл. 2 и 3.

В некоторых случаях стационарной теплопроводности уравнение (1.11) значительно упрощается и становится обыкновенным дифференциальным уравнением, решение которого не вызывает затруднений (см. гл. 2).

Температурное поле может быть найдено также одним из численных методов. Эти методы [30, 31] достаточно универсальны, и с их помощью может быть решена практически любая задача теплопроводности.

При изучении процессов теплопроводности иногда используется первый закон термодинамики, записанный для конечного объема тела. Пусть V — объем интересующей нас области пространства, а F — площадь поверхности, ограничивающей этот объем. Уравнение (1.11) почленно умножим на dV и проинтегрируем по V . Учтем, что по теореме Остроградского—Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \int_F q_n dF,$$

где q_n — проекция вектора $\mathbf{q}$ на направление внешней нормали к поверхности F .

В результате получим

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dV = - \int_F q_n dF + \int_V q_v dV. \quad (1.17)$$

Из первого закона термодинамики, записанного в виде (1.17), в частности следует, что для стационарных процессов теплопроводности при отсутствии в теле источников теплоты ($q_v = 0$) должно выполняться условие

$$\int_F q_n dF = 0. \quad (1.18)$$

1.5. Условия однозначности

При решении конкретных задач теплопроводности считаются известными физические свойства тела (ρ , c_p и λ) и должны быть заданы геометрическая форма и размеры тела или интересующей области пространства, в котором протекает процесс теплопроводности. Дополнительно к этому надо задать начальные и граничные условия.

Начальным условием задается распределение температуры внутри тела и на его границах в момент времени $\tau = 0$:

$$T(x, y, z, \tau)|_{\tau=0} = f(x, y, z), \quad (1.19)$$

где $f(x, y, z)$ — заданная функция.

Граничным условием первого рода задается температура поверхности тела (при $\tau > 0$) как функция координат точек его границ.

Граничным условием второго рода задается плотность теплового потока q_c на границах тела¹. При этом договариваются, что $q_c > 0$, если тепловой поток направлен от тела в окружающую среду, и $q_c < 0$, если наоборот. Тогда $q_c = q_n$, где q_n — проекция вектора $\mathbf{q}$ на направление внешней нормали $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор) к поверхности тела, и

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{пов}} = q_c, \quad (1.20)$$

где λ — теплопроводность при температуре в данной точке границы тела. Для установившегося температурного поля должно выполняться условие (1.18).

Граничным условием третьего рода задается температура среды $T_{ж}$, окружающей тело, и зависимость q_c от температуры поверхности тела T_c и $T_{ж}$. Обычно эта зависимость задается в виде закона Ньютона—Рихмана:

$$q_c = \alpha(T_c - T_{ж}), \quad (1.21)$$

где α — заданный коэффициент теплоотдачи, который характеризует интенсивность процесса конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой, Вт/(м² · К).

Более подробно коэффициент теплоотдачи будет рассмотрен при изучении конвективного теплообмена.

С учетом (1.20) граничное условие третьего рода записывается в виде

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{пов}} = \alpha(T_c - T_{ж}). \quad (1.22)$$

В (1.22) температура T_c — неизвестная величина. Значение ее соответствует искомой функции $T(x, y, z, \tau)$ на границе тела:

$$T_c = T(x, y, z, \tau)|_{x=x_c, y=y_c, z=z_c, \tau=\tau_c} > 0,$$

где x_c, y_c, z_c — координаты точки поверхности тела.

Если помимо конвективного теплообмена происходит теплообмен излучением между данным и окружающими телами, то в правую часть (1.22) надо включить $q_{\text{изл}}$, Вт/м², — величину, равную разности плотностей

¹ Индекс «с» происходит от слова «стенка».

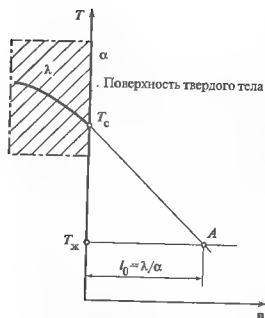


Рис. 1.7. Графическая интерпретация граничного условия третьего рода

Таким образом, с учетом теплообмена излучением граничное условие третьего рода можно записать в виде

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{пов}} = \alpha(T_c - T_{\text{ж}}) + \epsilon \sigma_0(T_c^4 - T_{\text{окр}}^4). \quad (1.24)$$

Уравнение (1.22) будет линейным, если коэффициент теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ или является заданной функцией точки. При свободной конвекции жидкости около тела α зависит от разности температур T_c и $T_{\text{ж}}$. Встречаются и другие случаи конвективного теплообмена, когда α зависит от T_c . При этом уравнение (1.22) становится нелинейным. Уравнение (1.24) является нелинейным всегда. Задача нахождения температурного поля с нелинейным граничным условием решается численным методом.

На рис. 1.7 дана графическая интерпретация граничного условия третьего рода, записанного в виде (1.22). Так как

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{пов}} = - \frac{(T_c - T_{\text{ж}})}{l_0},$$

то, как это следует из (1.22), значение отрезка l_0 , показанного на рис. 1.7, определяется по формуле

$$l_0 = \frac{\lambda}{\alpha}. \quad (1.25)$$

Точка A называется направляющей точкой. Ее название объясняется тем, что при $\lambda = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ все касательные к температурным кривым в процессе охлаждения тела пересекаются в этой точке (она как бы направляет эти касательные)

потоков собственного ($E_{\text{соб}}$) и поглощенного ($E_{\text{полг}}$) излучений, т.е.

$$q_{\text{изл}} = E_{\text{соб}} - E_{\text{полг}}$$

Величина $q_{\text{изл}}$ рассматривается при изучении теории теплообмена излучением. Если поверхность окружающих тел представить в виде оболочки с температурой $T_{\text{окр}}$, то

$$q_{\text{изл}} = \epsilon \sigma_0(T_c^4 - T_{\text{окр}}^4), \quad (1.23)$$

где $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ — постоянная Стефана—Больцмана; ϵ — степень черноты данного тела ($0 \leq \epsilon \leq 1$).

Значение ϵ зависит от материала, состояния поверхности тела и других факторов. Для окисленной и загрязненной поверхности стали приближенно можно считать $\epsilon = 0,8 \dots 0,9$.

Глава вторая

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

2.1. Передача теплоты через плоскую стенку

Рассмотрим стационарный процесс переноса теплоты через плоскую стенку (рис. 2.1), толщина которой δ много меньше ширины b и высоты h . Источники теплоты в стенке отсутствуют ($q_v = 0$). Задана ее теплопроводность λ либо в виде функции $\lambda = \lambda(T)$, либо как постоянная величина.

Возможны различные способы подвода теплоты к одной поверхности стенки и его отвода через другую: за счет конвекции горячей или холодной жидкости около поверхности стенки, теплообмена излучением с другими телами, непосредственного контакта с другими более (или менее) нагретыми твердыми стенками и др. Предположим, что в любом случае подвода (отвода) теплоты температуры двух поверхностей стенки постоянны: $T_{c1} = \text{const}$ и $T_{c2} = \text{const}$.

При этом изотермические поверхности в стенке будут представлять собой плоскости, перпендикулярные к оси Ox . Таким образом, в нашем случае $\partial T / \partial y = 0$, $\partial T / \partial z = 0$ и $\partial T / \partial t = 0$. С учетом всех допущений уравнение теплопроводности (1.12) приобретает вид

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (2.1)$$

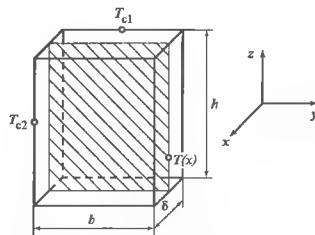


Рис. 2.1. Плоская стенка

Искомая функция $T = T(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (2.1) и граничным условиям:

$$T(x)|_{x=0} = T_{c1}; \quad T(x)|_{x=\delta} = T_{c2}. \quad (2.2)$$

Сначала рассмотрим случай постоянной теплопроводности стенки. При $\lambda = \text{const}$ в (2.1) λ сокращается, тогда путем двукратного интегрирования (2.1) находим

$$T = C_1 x + C_2.$$

Определив постоянные с помощью (2.2), получим

$$T = T_{c1} + \frac{T_{c2} - T_{c1}}{\delta} x. \quad (2.3)$$

Таким образом, при $\lambda = \text{const}$ температура в плоской стенке изменяется по линейному закону.

Вектор плотности теплового потока в изотропном теле перпендикулярен к изотермической поверхности. Поэтому в нашем случае $q_y = 0$ и $q_z = 0$. Тогда из (1.11) получаем

$$\frac{dq_x}{dx} = 0, \quad (2.4)$$

откуда следует, что $q_x = \text{const}$. Мы доказали, что в стационарном процессе переноса теплоты через плоскую стенку плотность теплового потока не зависит от координат точки. Значение q_x можно найти с помощью закона Фурье:

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{c1} - T_{c2}). \quad (2.5)$$

По аналогии с электрическим сопротивлением введем понятие термического сопротивления. Термическим сопротивлением называется величина, численно равная отношению разности температур двух изотермических поверхностей к плотности теплового потока в какой-либо точке на одной из этих поверхностей. Это сопротивление, обусловленное внутренним механизмом процесса теплопроводности, обозначим R_λ . Кроме того, здесь и в дальнейшем индекс «х» в обозначении проекции вектора q на ось Ox опустим, т.е. $q_x = q$. Из (2.5) получим

$$R_\lambda = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{q} = \frac{\delta}{\lambda}. \quad (2.6)$$

С учетом сказанного формулу (2.5) представим в виде¹

¹ В задачах температура задается в градусах Цельсия. Тогда в (2.7) T надо просто заменить на t ($T = t + 273$). Это замечание относится ко всем формулам, в которых используется разность температур.

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{\delta}{\lambda}}. \quad (2.7)$$

Таким образом, плотность теплового потока, проходящего через плоскую стенку, прямо пропорциональна разности температур ее поверхностей и обратно пропорциональна термическому сопротивлению.

Для многослойной плоской стенки $q = \text{const}$. Тогда, например для двухслойной стенки (рис. 2.2) можно записать

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}};$$

$$q = \frac{T_{c2} - T_{c3}}{\frac{\delta_2}{\lambda_2}}.$$

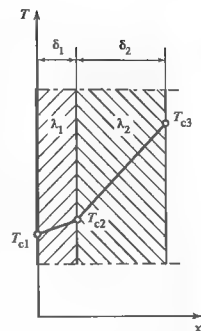


Рис. 2.2. Распределение температуры в двухслойной стенке с постоянными теплопроводностями слоев

Перенеся термические сопротивления в левую часть этих выражений, а затем их сложим, получим

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c3}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}}.$$

Если стенка состоит из n слоев, теплопроводности которых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а толщины $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, то

$$q = \frac{T_{c1} - T_{cn} n + 1}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (2.8)$$

Анализируя с помощью закона Фурье изменение температуры в трехслойной стенке (рис. 2.3), нетрудно качественно предсказать зависимость $T = T(x)$ в однослойной стенке, если теплопроводность ее зависит от температуры.

Задачу по определению температурного поля в стенке при $\lambda = \lambda(T)$ можно решить следующим образом. Преобразуем (2.1) и (2.2) посредством подстановки

$$u = \int_{T_0}^T \lambda dT, \quad (2.9)$$

где T_0 — произвольная температура.

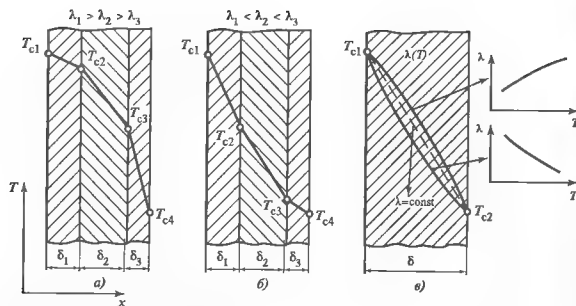


Рис. 2.3. Распределение температуры в трехслойной стенке (а, б) и вид температурных кривых (в) при различных зависимостях $\lambda = \lambda(T)$

а - $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$; б - $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

Такое преобразование математического описания стационарных процессов теплопроводности называется преобразованием Кирхгофа.

Из (2.2) получим граничные условия для функции $u = u(T) = u(T(x))$:

$$u(T)|_{x=0} = u_1 = \int_{T_0}^{T_{c1}} \lambda dT; \quad (2.10)$$

$$u(T)|_{x=\delta} = u_2 = \int_{T_0}^{T_{c2}} \lambda dT. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.1) приводится к виду

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0.$$

Решение этого уравнения с учетом граничных условий (2.10) и (2.11) можно записать как

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\delta} x. \quad (2.12)$$

Выражения (2.12) и (2.3) отличаются друг от друга только обозначениями величин. Плотность теплового потока

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\frac{du}{dx} = \frac{u_1 - u_2}{\delta}. \quad (2.13)$$

Имея в виду (2.10) и (2.11), получаем

$$u_1 - u_2 = \int_{T_0}^{T_{c1}} \lambda dT + \int_{T_{c2}}^{T_{c1}} \lambda dT = \int_{T_{c2}}^{T_{c1}} \lambda dT.$$

Среднеинтегральное значение λ определяется по формуле

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_{c1} - T_{c2}} \int_{T_{c2}}^{T_{c1}} \lambda dT = \frac{u_1 - u_2}{T_{c1} - T_{c2}}. \quad (2.14)$$

Тогда вместо (2.13) можно записать

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\delta \bar{\lambda}}. \quad (2.15)$$

Таким образом, мы получили обобщение формулы (2.7) на случай $\lambda = \lambda(T)$.

Расчет температур стенки по формуле (2.12), а также $\bar{\lambda}$ облегчается, если имеется таблица значений $u(T)$ для конкретного материала¹. Такую таблицу несложно получить с помощью компьютера. Из нее можно найти значения u_1 и u_2 по заданным температурам T_{c1} и T_{c2} , а с помощью этих значений по (2.14) рассчитать $\bar{\lambda}$ и по (2.12) u в любой точке $0 \leq x \leq \delta$. По найденному значению u в таблице можно отыскать температуру в данной точке стенки.

В частном случае линейной зависимости $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$ среднеинтегральная теплопроводность

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 \left[1 + \frac{\beta}{2} (T_{c1} + T_{c2}) \right],$$

а температура как функция x описывается формулой

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_{c1} \right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 \beta}} - \frac{1}{\beta}. \quad (2.15a)$$

Формула (2.15a) является решением квадратного уравнения

$$aT^2 + bT + c = 0,$$

где $a = \frac{1}{2} \lambda_0 \beta$; $\beta = \lambda_0$; $c = qx - \lambda_0 T_{c1} - \frac{1}{2} \lambda_0 \beta T_{c1}^2$.

Это уравнение получается из (2.12) после подстановки в него результатов вычисления интегралов (2.9) и (2.10) при линейной зависимости $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$

Мы рассмотрели стационарную теплопроводность плоской стенки при заданных температурах поверхностей T_{c1} и T_{c2} (или $T_{c, n+1}$ — для многослойной стенки), т.е. при граничных условиях первого рода. Практически важным является процесс, в котором известными считаются величины, входящие в граничные условия третьего рода: температуры жидкостей $T_{ж1}$ и $T_{ж2}$ с двух сторон стенки, а также коэффициенты теплоотдачи со стороны первой α_1 и со стороны второй α_2 жидкостей.

¹ Для UO_2 см. табл. 2.1 в § 2.4. В одной из задач § 2.4 приводится пример использования этой таблицы.

Процесс переноса теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку называется *теплопередачей*. В этом процессе существуют три термических сопротивления: одно внутреннее $R_\lambda = \delta/\lambda$ (для многослойной стенки оно равно сумме термических сопротивлений слоев, т.е.

$R_\lambda = \sum_{i=1}^n \delta_i/\lambda_i$) и два внешних R_{α_1} и R_{α_2} . Последние определяются как

$$R_{\alpha_1} = \frac{T_{ж1} - T_{c1}}{q} = \frac{1}{\alpha_1}; \quad (2.156)$$

$$R_{\alpha_2} = \frac{T_{c2} - T_{ж2}}{q} = \frac{1}{\alpha_2}. \quad (2.15в)$$

Здесь T_{c1} — температура поверхности стенки, соприкасающейся с первой жидкостью, а T_{c2} — температура поверхности, соприкасающейся со второй жидкостью. Выражения для R_{α_1} и R_{α_2} записаны на основании закона Ньютона-Рихмана (1.21) с учетом того, что единичные векторы внешней нормали к двум поверхностям стенки направлены в противоположные стороны. Если, кроме (2.156) и (2.15в), еще записать:

$$R_\lambda = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{q} = \frac{\delta}{\lambda},$$

то получим систему трех уравнений с неизвестными T_{c1} , T_{c2} и q . Неизвестные T_{c1} и T_{c2} сокращаются, если эти три уравнения сложить. В результате получим формулу

$$q = \frac{T_{ж1} - T_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.16)$$

Отношение плотности теплового потока к температурному напору $\Delta T = T_{ж1} - T_{ж2}$ называется *коэффициентом теплопередачи*, Вт/(м²·К):

$$k = q/\Delta T.$$

Из (2.16) следует, что для однослойной плоской стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.17)$$

Для многослойной плоской стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (2.17а)$$

Коэффициент теплопередачи характеризует интенсивность процесса теплопередачи. Он численно равен плотности теплового потока, передаваемого через стенку при температурном напоре, равном единице. Как видно из (2.17) и (2.17а), он представляет собой величину, обратную сумме всех термических сопротивлений. Если одно из сопротивлений значительно больше всех остальных, то практически оно одно и будет определять значение коэффициента теплопередачи. Чтобы увеличить коэффициент теплопередачи, надо уменьшить наибольшее термическое сопротивление.

Внешние термические сопротивления можно трактовать следующим образом. В процессах конвективного теплообмена между первой жидкостью и одной поверхностью стенки, а также между другой поверхностью и второй жидкостью температура жидкости вблизи стенки может изменяться так, как показано на рис. 2.4, а. Введем условные толщины δ_{α_1} и δ_{α_2} (рис. 2.4) такие, что $1/\alpha_1 = \delta_{\alpha_1}/\lambda_{ж1}$, а $1/\alpha_2 = \delta_{\alpha_2}/\lambda_{ж2}$, где $\lambda_{ж1}$ и $\lambda_{ж2}$ — теплопроводности первой и второй жидкостей. Тогда получим трехслойную стенку, состоящую из данной твердой стенки и двух условных неподвижных жидких слоев толщиной δ_{α_1} и δ_{α_2} . Термические сопротивления этих слоев (пленок жидкостей) и являются внешними термическими сопротивлениями. Внешнее термическое сопротивление будет мало, если у жидкости большая теплопроводность и малая толщина δ_{α} . Уменьшение δ_{α} можно получить путем увеличения скорости жидкости, турбулентизацией пристенного слоя и другими способами, которые называются способами интенсификации теплоотдачи.

Тепловой поток через стенку можно увеличить также путем оребрения поверхности. Площадь ребристой поверхности больше площади гладкой. Пусть, например F_1 — площадь гладкой поверхности со стороны α_1 , а

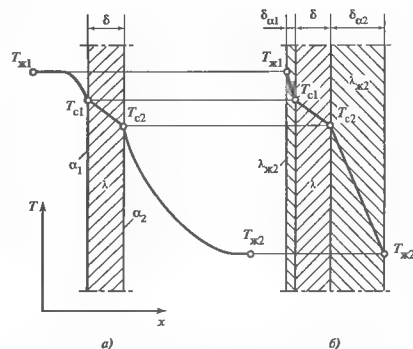


Рис. 2.4. К понятию внешнего термического сопротивления

F_2 — площадь ребристой поверхности со стороны α_2 . Тогда из (2.6), (2.15б) и (2.15в) с учетом того, что $Q = q_1 F_1 = q_2 F_2$, легко получить

$$q_1 = k(T_{ж1} - T_{ж2}),$$

где коэффициент теплопередачи

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{F_2}{F_1}}. \quad (2.176)$$

Из (2.176) видно, что при $\alpha_2 \ll \alpha_1$ (со стороны газа будет α_2 , а со стороны воды — α_1) и малом значении δ/λ оребрение поверхности значительно увеличивает коэффициент теплопередачи.

При выводе (2.176) предполагалось, что температура ребристой поверхности T_{c2} постоянна. Это приближенно выполняется для коротких ребер с большой теплопроводностью. В общем случае надо учитывать изменение температуры по высоте ребра (см. § 2.5 и 2.6).

2.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку

Рассмотрим процесс передачи теплоты через цилиндрическую стенку (стенку трубы, слой тепловой изоляции, наложенной на трубу, слой электрической изоляции на проволоке и др.) радиусами r_1 и r_2 (рис. 2.5). Длина цилиндрической стенки много больше ее радиусов, в ней отсутствуют источники теплоты, а на ее внутренней поверхности поддерживается постоянная температура T_{c1} (на внешней — T_{c2}). Для изучения температурного поля выберем цилиндрическую систему координат (см. рис. 1.1, б).

При заданных граничных условиях температурное поле в стенке — осесимметричное: $\partial T/\partial \varphi = 0$ и $\partial T/\partial z = 0$. В стационарном тепловом состоянии температура зависит только от r : $T = T(r)$, вектор плотности теплового потока направлен по нормали к произвольной цилиндрической поверхности, а $q_\varphi = 0$ и $q_z = 0$. В этом случае из (1.11) с учетом (1.5а) получаем

$$\frac{d}{dr}(r q_r) = 0, \quad (2.18)$$

откуда следует, что $r q_r = \text{const}$, т.е. плотность теплового потока через цилиндрическую поверхность радиусом r обратно пропорциональ-

на радиусу этой поверхности, она наибольшая на внутренней поверхности стенки и наименьшая на внешней.

Для цилиндрических стенок удобно использовать величину q_r , Вт/м, — тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{q_r 2\pi r l}{l} = 2\pi r q_r. \quad (2.19)$$

Так как $r q_r = \text{const}$, то $q_l = \text{const}$, т.е. эта величина от r не зависит.

Допустим, что теплопроводность стенки постоянна: $\lambda = \text{const}$. Найдем температурное поле в стенке при заданных граничных условиях:

$$T(r)|_{r=r_1} = T_{c1}; \quad T(r)|_{r=r_2} = T_{c2}. \quad (2.20)$$

Из уравнения теплопроводности в виде (1.16) получаем, что в нашем случае

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right) = 0. \quad (2.21)$$

Двукратным интегрированием (2.21) находим общее решение:

$$T = C_1 \ln r + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 находятся из граничных условий (2.20). В результате получим

$$T = T_{c1} + \frac{T_{c2} - T_{c1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}. \quad (2.22)$$

Температура в цилиндрической стенке изменяется по логарифмическому закону (рис. 2.6). Найдем q_r при использовании закона Фурье:

$$q_r = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda(T_{c1} - T_{c2})}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.23)$$

Величина q_r представляет собой проекцию вектора $\mathbf{q}$ в данной точке изотермической поверхности стенки на направление единичного вектора $\mathbf{e}_r$ (рис. 1.1, б). Она положительна, если $T_{c1} > T_{c2}$ (т.е. теплота распространяется от внутренней поверхности стенки к внешней), и отрицательна в противоположном случае.

Плотности теплового потока на внутренней поверхности стенки q_1 и q_l определяются по формулам:

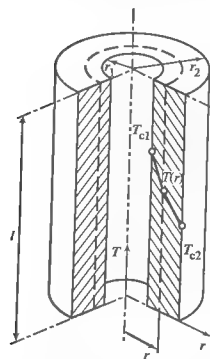


Рис. 2.5. Цилиндрическая стенка

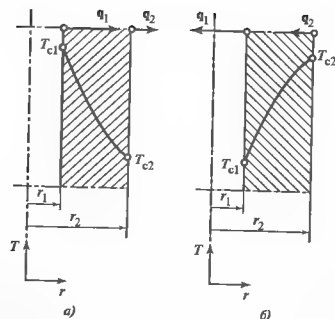


Рис. 2.6. Вид температурных кривых для цилиндрической стенки
а — $T_{c1} < T_{c2}$; б — $T_{c1} > T_{c2}$

$$q_l = q_r(r)|_{r=r_1} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad (2.24)$$

$$q_l = 2\pi r q_r = \frac{\pi(T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.25)$$

Для цилиндрической стенки относительно малой толщины $\delta \ll r_1$, где $\delta = r_2 - r_1$. При этом

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \left(1 + \frac{\delta}{r_1} \right) \approx \frac{\delta}{r_1}$$

и формула (2.24) переходит в формулу (2.7) для плоской стенки (при условии, что $q_l \approx q$).

Термическое сопротивление цилиндрической стенки запишем в виде

$$R_\lambda = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{q_l} = \frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.26)$$

Для двухслойной цилиндрической стенки (рис. 2.7) можно записать

$$q_l = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{r_1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}};$$

$$q_l = \frac{T_{c2} - T_{c3}}{\frac{r_1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Исключая из этих двух уравнений T_{c2} , получаем

$$q_l = \frac{T_{c1} - T_{c3}}{\frac{r_1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}. \quad (2.27)$$

Для многослойной стенки

$$q_l = \frac{T_{c1} - T_{c, n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{r_1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}, \quad (2.28)$$

где n — число слоев многослойной стенки, внутренний радиус которой равен r_1 , а внешний — r_{n+1} .

Зная q_l для многослойной стенки и учитывая, что $q_l = 2\pi r_1 q_1$, можно записать

$$q_1 = \frac{\pi(T_{c1} - T_{c, n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}. \quad (2.29)$$

С помощью преобразования Кирхгофа таким же образом, как и для плоской стенки, можно доказать, что формулы (2.24), (2.25) будут справедливы в случае переменных теплопроводностей $\lambda = \lambda(T)$, если в них заменить значения λ на среднентегральное значение, определяемое по (2.14).

Для нахождения температуры цилиндрической стенки при этом вместо (2.22) будем иметь

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}, \quad (2.30)$$

где u , u_1 и u_2 определяются по формулам:

$$u = \int_{T_0}^T \lambda \, dT;$$

$$u_1 = u(r)|_{r=r_1} = \int_{T_0}^{T_{c1}} \lambda \, dT;$$

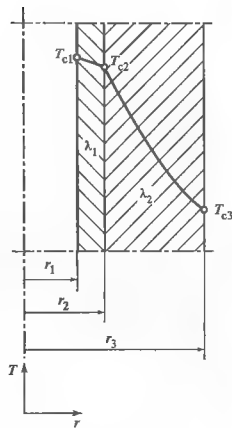


Рис. 2.7. Двухслойная цилиндрическая стенка

$$u_2 = u(r)|_{r=r_2} = \int_{T_0}^{T_{c2}} \lambda \, dT.$$

Метод расчета температур при переменном λ описан выше (см. § 2.1).

В частном случае $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$ температурное поле в цилиндрической стенке описывается формулой

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_{c1}\right)^2 - \frac{q_1}{\pi \lambda_0 \beta} \ln \frac{r}{r_1}} - \frac{1}{\beta}. \quad (2.31)$$

Рассмотрим процесс теплопередачи от одной жидкости с температурой $T_{ж1}$ к другой — с температурой $T_{ж2}$ через разделяющую их цилиндрическую стенку трубы. Пусть первая жидкость находится внутри трубы, а вторая — снаружи. Соответственно заданы коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 .

Внешние термические сопротивления (см. § 2.2) определим следующим образом:

$$R_{\alpha 1} = \frac{T_{ж1} - T_{c1}}{q_1} = \frac{1}{\alpha_1}; \quad (2.32)$$

$$R_{\alpha 2} = \frac{T_{c2} - T_{ж2}}{q_1} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1}{r_2}. \quad (2.33)$$

Внутреннее термическое сопротивление находится по формуле (2.26).

Рассматривая систему трех уравнений (2.32), (2.33) и (2.26) с неизвестными T_{c1} , T_{c2} и q_1 и исключая T_{c1} и T_{c2} путем сложения этих уравнений, получаем

$$q_1 = \frac{T_{ж1} - T_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1}{r_2}}. \quad (2.34)$$

Аналогично можно вывести формулу для определения q_1 для многослойной цилиндрической стенки:

$$q_1 = \frac{T_{ж1} - T_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{r_1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1}{r_{n+1}}}. \quad (2.35)$$

С учетом того, что $q_1 = 2\pi r_1 q_l$ для однослойной и многослойной стенок

$$q_l = \frac{2\pi(T_{ж1} - T_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2}}; \quad (2.36)$$

$$q_l = \frac{2\pi(T_{ж1} - T_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{\alpha_2 r_{n+1}}}. \quad (2.37)$$

Коэффициент теплопередачи для цилиндрической стенки

$$k_1 = \frac{q_1}{T_{ж1} - T_{ж2}}. \quad (2.38)$$

При сопоставлении (2.34) с (2.38) получаем

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1}{r_2}}. \quad (2.39)$$

Если толщина стенки $\delta \ll r_1$, то формула (2.39) вырождается в формулу (2.17) для плоской стенки. Для многослойной цилиндрической стенки k_1 есть величина, обратная знаменателю (2.35).

Рассмотрим трубу с наложенной на нее тепловой изоляцией (рис. 2.8). Здесь

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{\lambda_{из}} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1}{r_3}}. \quad (2.40)$$

Зафиксируем в правой части (2.40) все величины, кроме r_3 . С увеличением r_3 увеличивается внутреннее термическое сопротивление изоляции (третье слагаемое в знаменателе (2.40)), но уменьшается внешнее термическое сопротивление (последнее слагаемое). Следовательно, возможен экстремум функции $f(r_3)$, которой мы будем обозначать знаменатель (2.40). При этом производная

$$f'(r_3) = \frac{r_1}{\lambda_{из}} \frac{1}{r_3} - \frac{r_1}{\alpha_2} \frac{1}{r_3^2}.$$

Значение r_3 , при котором имеет место экстремум, называется критическим радиусом изоляции.

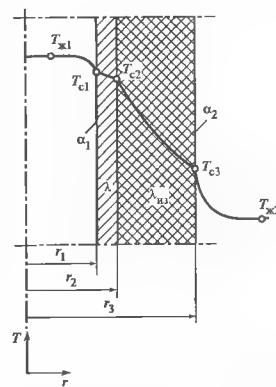


Рис. 2.8. Труба с тепловой изоляцией

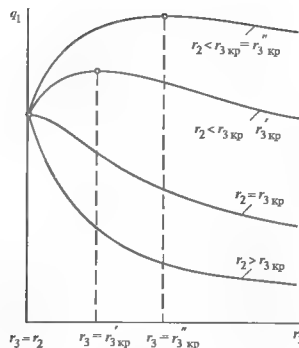


Рис. 2.9. Зависимость $q_1 = f(r_3)$ при различных значениях критического радиуса тепловой изоляции

Полагая $f'(r_3) = 0$, находим

$$r_{3кр} = \frac{\lambda_{ин}}{\alpha_2}. \quad (2.41)$$

Критический диаметр изоляции

$$d_{3кр} = \frac{2\lambda_{ин}}{\alpha_2}. \quad (2.42)$$

В точке $r_3 = r_{3кр}$ $f''(r_3) < 0$ и функция $f(r_3)$ может иметь минимум, а коэффициент теплопередачи k_1 — максимум. Но $f(r_3)$ существует при $r_3 \geq r_2$. Следовательно, минимум $f(r_3)$ существует только тогда, когда $r_2 \leq r_{3кр}$. В противном случае $f(r_3)$ будет непрерывно возрастать с ростом r_3 , а следовательно, k_1 и q_1 — уменьшаться (рис. 2.9).

Критический радиус (или критический диаметр) изоляции имеет практическое значение. Если при данных $\lambda_{ин}$ и α_2 окажется, что диаметр изолируемой трубы $d_2 < d_{3кр}$, то тепловые потери с ростом толщины изоляции будут увеличиваться и при диаметре изоляции $d_3 = d_{3кр}$ достигнут максимума. Так как на значение α_2 практически повлиять невозможно, то для того, чтобы уменьшить тепловые потери, надо взять изоляцию с меньшим $\lambda_{ин}$.

Коэффициент теплопередачи используется в тепловом расчете теплообменного аппарата. Зная k , можно найти площадь поверхности теплообмена F при известном тепловом потоке Q или определить Q при заданном значении F . Уравнение, связывающее между собой Q , F , k и температурный напор $\Delta T = T_{ж1} - T_{ж2}$, называется *уравнением теплопередачи*:

$$Q = k_1 F_1 \Delta T. \quad (2.43)$$

Здесь (2.43) записано для трубчатого теплообменного аппарата, при этом F_1 — площадь внутренней поверхности, а k_1 — коэффициент теплопередачи, отнесенный к этой поверхности. Для тонкостенных труб $k_1 = k$,

$F_1 = F$, где k — коэффициент теплопередачи, вычисляемый по формуле для плоской стенки (2.17), F — площадь поверхности, рассчитываемая по среднему диаметру стенки трубы. Обычно температуры $T_{ж1}$ и $T_{ж2}$ изменяются вдоль поверхности теплообмена (рис. 2.10). Если это изменение не слишком большое ($\Delta T_{вх}/\Delta T_{вых} < 1,5$), то ΔT в формуле (2.43) приближенно можно найти как среднее арифметическое значение от $\Delta T_{вх}$ и $\Delta T_{вых}$.

Формулы для коэффициента теплопередачи выведены в предположении, что температуры стенки трубы и жидкости не изменяются вдоль поверхности теплообмена. Они сохраняют свою силу и при изменении указанных температур, если можно пренебречь второй производной по координате z в стенке трубы (вдоль оси трубы температура не должна изменяться слишком резко). Тогда дифференциальные уравнения (2.18) и (2.21) применительно к теплообменному аппарату сохраняют свой вид за исключением того, что в них будут частные производные по текущему радиусу r .

2.3. Передача теплоты через сферическую стенку

Рассмотрим сферическую стенку, представляющую собой часть шара, ограниченную двумя сферическими поверхностями с радиусами r_1 и r_2 (рис. 2.11). Предположим, что на внутренней поверхности стенки температура во всех точках одинакова и равна T_{c1} , на наружной — T_{c2} ($T_{c1} = \text{const}$, $T_{c2} = \text{const}$). Ясно, что при этом на любой сферической поверхности внутри стенки температура также одинакова во всех точках, т.е. задача поставлена таким образом, что температура в стенке является только функцией радиуса. Найдем температурное поле и тепловой поток в этой сферической стенке при $q_0 = 0$.

Пусть теплопроводность — постоянная величина. В дифференциальном уравнении теплопроводности, записанном в сферической системе координат (см. рис. 1.1, в), следует положить

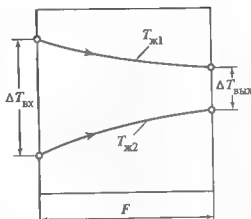


Рис. 2.10. Схема изменения температур жидкостей в теплообменном аппарате

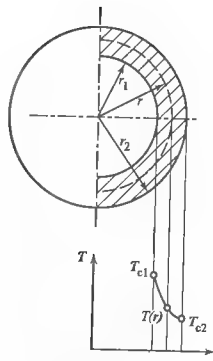


Рис. 2.11. Сферическая стенка

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

При этом нахождение температурного поля $T = T(r)$ в сферической стенке при $\lambda = \text{const}$ сводится к решению следующей задачи:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0; \quad (2.44)$$

$$T|_{r=r_1} = T_{c1}; \quad T|_{r=r_2} = T_{c2}. \quad (2.45)$$

В (2.44) сделаем замену из условия $u = dT/dr$. Тогда это уравнение запишется в виде

$$\frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое имеет следующее решение:

$$ur^2 = C_1.$$

Возвращаясь теперь к производной dT/dr , будем снова иметь уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dT}{dr} r^2 = C_1,$$

решение которого имеет вид

$$T = -C_1/r + C_2.$$

Следовательно, в сферической стенке температура изменяется по гиперболическому закону. Постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий (2.45). При этом получим систему двух уравнений:

$$T_{c1} = -C_1/r_1 + C_2,$$

$$T_{c2} = -C_1/r_2 + C_2.$$

При решении этой системы найдем

$$C_1 = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}; \quad C_2 = T_{c1} + \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \frac{1}{r_1}.$$

С учетом найденных C_1 и C_2 получим

$$T = T_{c1} + \frac{T_{c2} - T_{c1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (2.46)$$

Плотность теплового потока (проекцию вектора q на направление единичного вектора e_r) найдем по закону Фурье:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{C_1}{r^2} = \frac{\lambda(T_{c1} - T_{c2})}{r^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}. \quad (2.47)$$

Из (2.47) следует, что величина q обратно пропорциональна квадрату радиуса сферической поверхности, через которую проходит тепловой поток, а $qr^2 = \text{const}$. Последний вывод получается также из уравнения (1.11), записанного применительно к рассматриваемой задаче.

Термическое сопротивление сферической стенки

$$R_{\lambda} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{q_1} = \frac{r_1^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (2.48)$$

где q_1 — плотность теплового потока на внутренней поверхности стенки.

Из (2.47) получим

$$q_1 = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{r_1^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}. \quad (2.49)$$

Так как тепловой поток $Q = 4\pi r_1^2 q_1$, то

$$Q = \frac{4\pi\lambda(T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}. \quad (2.50)$$

Для стенки, состоящей из n слоев (внутренний радиус первого слоя равен r_1 , а наружный последнего — r_{n+1} , соответственно температуры поверхностей стенки составляют T_{c1} и $T_{c,n+1}$), будем иметь

$$q_1 = \frac{T_{c1} - T_{c,n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)}. \quad (2.51)$$

Если теплопроводность сферической стенки зависит от температуры, то для нахождения зависимости $T = T(r)$ вместо (2.44) следует взять уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \lambda \frac{dT}{dr} \right) = 0.$$

Применяя к этому уравнению преобразование Кирхгофа (см. § 2.1), получаем

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{r_1 - r_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (2.52)$$

С помощью (2.52), пользуясь методом, описанным в § 2.1, можно найти температуру в любой точке сферической стенки.

Плотность теплового потока q_1 находится по формуле (2.48), при этом λ надо заменить на $\bar{\lambda}$ [см. (2.14)].

Если $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$, то зависимость $T = T(r)$ описывается уравнением

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_{c1} \right)^2 - \frac{Q}{2\lambda_0\beta} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)} - \frac{1}{\beta},$$

где тепловой поток Q следует определять по (2.50) при $\lambda = \bar{\lambda}$.

Введем внешние термические сопротивления:

$$R_{\alpha 1} = \frac{T_{ж1} - T_{c1}}{q_1} = \frac{1}{\alpha_1}; \quad (2.53)$$

$$R_{\alpha 2} = \frac{T_{c2} - T_{ж2}}{q_1} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (2.54)$$

Здесь $T_{ж1}$ и $T_{ж2}$ — температуры жидкостей внутри сферы и снаружи. Коэффициенты теплоотдачи относятся к внутренней (α_1) и внешней (α_2) поверхностям стенки.

Соотношения (2.53) и (2.54) совместно с (2.48) образуют систему трех уравнений, из которой можно найти T_{c1} и T_{c2} (если заданы граничные условия третьего рода), а также q_1 . Из этой системы получим

$$q_1 = k_1(T_{ж1} - T_{ж2}), \quad (2.55)$$

где k_1 — коэффициент теплопередачи;

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1^2}{r_2^2}}. \quad (2.56)$$

Для многослойной сферической стенки

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_1^2}{r_n^2}}. \quad (2.57)$$

Анализируя знаменатель (2.56), замечаем, что с ростом r_2 второе слагаемое увеличивается, а третье — уменьшается.

Используя правило нахождения экстремума функции, легко доказать, что при $r_2 = 2\lambda/\alpha_2$ коэффициент теплопередачи будет иметь наибольшее значение. Этот факт необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции сосудов сферической формы. Например, если наружный радиус сосуда $r_1 = 25$ мм и известно, что $\alpha_2 = 10$ Вт/(м²·К), то, выбрав тепловую изоляцию с $\lambda = 0,2$ Вт/(м·К), получим $2\lambda/\alpha_2 = 0,04$ м. Следовательно, при толщине, равной 7,5 мм, тепловой поток при наличии изоляции будет больше, чем без нее. Поэтому в криогенной технике используются высокоэффективные тепловые изоляции, к которым, в частности, относится ЭВТИ — экранно-вакуумная тепловая изоляция. Для них «эффективное» значение λ невелико (около 0,04—0,05 Вт/(м·К)).

Укажем еще на одно применение формулы (2.49). При очень медленном движении в жидкости нагретой сферической частицы с малым радиусом r_1 около нее наблюдается неподвижный слой жидкости, толщина которого много больше r_1 . Тогда из (2.49) получим

$$q_1 = \frac{\lambda}{r_1}(T_c - T_{ж}),$$

где T_c — температура частицы; $T_{ж}$ — температура жидкости на большом расстоянии от нее.

По закону Ньютона—Рихмана

$$q_1 = \alpha(T_c - T_{ж}).$$

Из сопоставления двух формул вытекает

$$\alpha = \lambda/r_1. \quad (2.58)$$

Пологая диаметр частицы $d = 2r_1$ и обозначая безразмерный комплекс $\alpha d/\lambda = Nu$ [Nu — число Нуссельта (см. ч. 2)], получаем

$$Nu = 2.$$

2.4. Температурное поле при действии источников теплоты в пластине и круглом стержне

Пластина. Тонкая пластина толщиной 2δ с постоянно действующими источниками теплоты охлаждается так, что температура ее поверхностей постоянна и равна T_c . Задана мощность источников теплоты q_v , Вт/м³, либо в виде постоянной величины ($q_v = \text{const}$), либо в виде симметричной функции $q_v = q_v(x)$, где координата x отсчитывается от середины пластины в сторону ее поверхности. Тогда изотермические поверхности в пластине

являются плоскостями, перпендикулярными к оси Ox ; при этом $q_y = q_z = 0$; $q_x = q_x(x)$ и $T = T(x)$. Далее будем обозначать: $q_x = q$.

В середине пластины

$$q(x)|_{x=0} = 0, \quad (2.59)$$

так как в противном случае в этой точке существовал бы вектор, который был бы направлен к одной из сторон пластины, чего не должно быть при симметричном охлаждении и распределении мощности источников теплоты.

Для нахождения $q = q(x)$ имеем уравнение

$$\frac{dq}{dx} = q_v, \quad (2.60)$$

которое вытекает из (1.11). Интегрируя (2.60), с учетом (2.59) получаем

$$q(x) = \int_0^x q_v dx. \quad (2.61)$$

На поверхности пластины

$$q(x)|_{x=\delta} = q_c = \int_0^\delta q_v dx. \quad (2.62)$$

Искомая функция $T = T(x)$ находится в результате решения уравнения

$$\frac{dT}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = -q_v \quad (2.63)$$

с граничными условиями

$$T(x)|_{x=\delta} = T_c; \quad \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.64)$$

Второе граничное условие вытекает из (2.59) и закона Фурье.

Температуру T_c можно считать заранее известной и в том случае, когда заданы температура окружающей среды и коэффициент теплоотдачи в виде $T_{ж} = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, так как q_c находится по (2.62), а

$$T_c = T_{ж} + q_c / \alpha. \quad (2.65)$$

Допустим, что $\lambda = \text{const}$ и $q_v = \text{const}$. Тогда при двукратном интегрировании (2.63) с нахождением постоянных с помощью (2.64) получим

$$T = T_c + \frac{q_v}{2\lambda} (\delta^2 - x^2). \quad (2.66)$$

Изменение температуры в пластине происходит по параболическому закону (рис. 2.12). Максимальное ее значение наблюдается при $x = 0$:

$$T_0 = T_{ж} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}. \quad (2.67)$$

При записи (2.67) мы учли (2.65) и (2.62).

Так же просто решается задача, если $q_v = \text{const}$, а $\lambda = \lambda(T)$. В этом случае, применяя преобразование Кирхгофа (см. § 2.1), вместо (2.63) и (2.64) получаем:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -q_v; \quad (2.68)$$

$$u[T(x)]_{x=\delta} = u_1; \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.69)$$

Здесь

$$u = \int_{T_0}^T \lambda dT; \quad u_1 = \int_{T_0}^{T_c} \lambda dT. \quad (2.70)$$

Интегрируя (2.68) два раза и учитывая (2.69) при нахождении постоянных, будем иметь

$$u = u_1 + \frac{q_v}{2} (\delta^2 - x^2). \quad (2.71)$$

Чтобы найти температуру в какой-либо точке пластины, необходимо задать зависимость $\lambda = \lambda(T)$. В частном случае $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$ решение получим в явном виде, так как при этом легко вычисляются интегралы в (2.70). Если результаты вычислений подставить в (2.71), приходим к квадратному уравнению (вывести самостоятельно), решение которого имеет вид

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_c \right)^2 + \frac{q_v}{\lambda_0 \beta} (\delta^2 - x^2)} - \frac{1}{\beta}.$$

Для сложной зависимости $\lambda = \lambda(T)$ целесообразно заготовить таблицу значений $u(T)$ (например, табл. 2.1 для UO_2). Зная T_c (или $T_{ж}$ и α), из этой таблицы выберем u_1 , а затем при заданном значении x ($0 \leq x \leq \delta$) по (2.71) вычислим u и обратным путем найдем температуру.

Задача несколько усложняется, если $q_v = q_v(x)$ и $\lambda = \lambda(T)$. В этом случае, интегрируя (2.68), с учетом второго условия (2.69) получаем

$$\frac{du}{dx} = - \int_0^x q_v dx.$$

Если интеграл выражается в элементарных функциях, второе интегрирование с учетом (2.69) может дать явную зависимость $u(x)$. Дальнейший путь нахождения

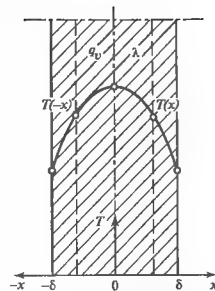


Рис. 2.12. Изменение температуры в пластине с источниками теплоты

Здесь u и u_1 выражаются формулами (2.70). При $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$ получаем

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_c\right)^2 + \frac{q_0}{2\lambda_0\beta}(r_0^2 - r^2)} - \frac{1}{\beta}.$$

При сложной зависимости $\lambda = \lambda(T)$ при $q_0 = \text{const}$ задача решается так же, как и для пластины. Если $q_0 = q_0(r)$ и $\lambda = \lambda(T)$, то для нахождения температур в стержне будем иметь

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r} \int_0^r q_0 r' dr. \quad (2.81)$$

Условия $T_c = \text{const}$, $T_{ж} = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, которые использовались при выводе формул, далеко не всегда выполняются на практике. Например, при охлаждении цилиндрических тепловыделяющих элементов ядерных реакторов температура теплоносителя $T_{ж}$ возрастает с увеличением координаты z . Однако, если при этом по-прежнему выполняется условие $\partial T / \partial \varphi = 0$ и к тому же $\partial q_z / \partial z \ll \partial q_r / \partial r$ (т.е. можно пренебречь изменением плотности теплового потока вдоль оси стержня), то полученные выше формулы сохраняют свою силу. В них достаточно заменить постоянные значения $T_{ж}$ и α на текущие (при данном z).

2.5. Двухмерное температурное поле и тепловой поток в плоском ребре

Рассмотрим задачу о распространении теплоты в плоском ребре (рис. 2.14). Толщина ребра $2\delta \ll l$ и $2\delta \ll h$. Допустим, что температура основания ребра (оно лежит в плоскости xy) постоянна и равна T_0 . Это условие может, например, выполняться тогда, когда основание ребра соприкасается с жидкостью, температура которой постоянна, и при этом $\alpha \rightarrow \infty$ (см. закон Ньютона—Рихмана). Примем, что теплопроводность ребра $\lambda = \text{const}$, оно находится в среде с $T_{ж} = \text{const}$, коэффициент теплоотдачи в окружающую среду $\alpha = \text{const}$. Для определенности примем, что $T_0 > T_{ж}$. Тогда в установившемся состоянии тепловой поток, входящий в ребро через его основание, будет равен тепловому потоку, выходящему из ребра через его боковую поверхность. При этом теплота передается окружающей среде.

Найдем температурное поле в ребре. Из постановки задачи ясно, что в нашем случае $\partial T / \partial z = 0$ и достаточно изучить температурное поле в плоскости xOy (рис. 2.14 и 2.15).

Уравнение теплопроводности (1.16) запишем для температуры $\theta = T - T_{ж}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0. \quad (2.82)$$

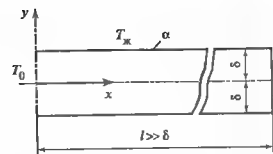
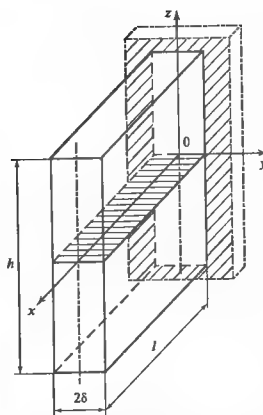


Рис. 2.15. К постановке задачи о нахождении температурного поля и теплового потока в плоском ребре

Рис. 2.14. Плоское ребро

Для основания ребра задано граничное условие первого рода:

$$\theta = \theta_0 = T_0 - T_{ж} \text{ при } x = 0, 0 \leq y \leq \delta. \quad (2.83)$$

На боковой поверхности задано граничное условие третьего рода:

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \theta \text{ при } x > 0, y = \delta. \quad (2.84)$$

Запишем еще условие симметрии температурного поля:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (2.85)$$

Кроме того, надо учесть, что

$$\theta \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (2.86)$$

Сформулированную задачу будем решать методом Фурье (методом разделения переменных). По этому методу частные решения отыскиваются в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной независимой переменной:

$$\theta = \theta(x, y) = \varphi(x)\psi(y). \quad (2.87)$$

При подстановке (2.87) в (2.82) получим

$$\varphi'' / \varphi = -\psi'' / \psi = \mu^2, \quad (2.88)$$

где μ — постоянная, которую необходимо определить с помощью граничных условий.

Равенство (2.88) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\varphi'' - \mu^2 \varphi = 0;$$

$$\psi'' + \mu^2 \psi = 0.$$

Общее решение этих уравнений известно:

$$\varphi(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x},$$

$$\psi(y) = C_3 \cos(\mu y) + C_4 \sin(\mu y).$$

Из (2.86) получаем $C_1 = 0$, а из (2.85) — $C_4 = 0$. Положим $C = C_2 C_3$. Тогда (2.87) примет вид

$$\theta = C e^{-\mu x} \cos(\mu y).$$

Это решение должно удовлетворять (2.84), откуда после простых преобразований получим

$$\epsilon / \text{Bi} = \text{ctg } \epsilon, \quad (2.89)$$

где $\epsilon = \mu \delta$, а число Био

$$\text{Bi} = \frac{\alpha \delta}{\lambda}. \quad (2.90)$$

Способ нахождения корней уравнения (2.89) показан на рис. 2.16. Видно, что уравнение (2.89) имеет бесчисленное множество корней, зависящих от числа Био, причем $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_n < \dots$. При $\text{Bi} \rightarrow 0$ $\epsilon_n \rightarrow (n-1)\pi$, а при $\text{Bi} \rightarrow \infty$ $\epsilon_n \rightarrow (2n-1)\pi/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Первые шесть корней уравнения (2.89) приведены в табл. 3.1.

Мы получили бесчисленное множество частных решений ($n = 1, 2, 3, \dots$) вида

$$\theta_n = C_n e^{-\epsilon_n X} \cos(\epsilon_n Y),$$

где $X = x/\delta$; $Y = y/\delta$.

Общее решение есть сумма всех частных:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\epsilon_n X} \cos \epsilon_n Y. \quad (2.91)$$

Используя условие (2.83), из (2.91) получаем

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\epsilon_n Y).$$

Видно, что C_n — коэффициенты разложения постоянной θ_0 в триго-

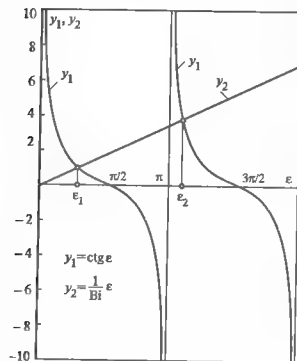


Рис. 2.16. Графический способ нахождения корней уравнения (2.89)

нометрический ряд. Обе части последнего выражения умножим на $\cos(\epsilon_n Y)$ и проинтегрируем по Y от 0 до 1. Известно, что

$\int_0^1 \cos(\epsilon_n Y) \cos(\epsilon_m Y) dY \neq 0$ только при $n = m$. С учетом этого будем иметь

$$C_n = \theta_0 \frac{\int_0^1 \cos(\epsilon_n X) dX}{\int_0^1 \cos^2(\epsilon_n X) dX} = \theta_0 \frac{2 \sin \epsilon_n}{\epsilon_n + \sin \epsilon_n \cos \epsilon_n}.$$

Обозначим

$$A_n = \frac{C_n}{\theta_0} = \frac{2 \sin \epsilon_n}{\epsilon_n + \sin \epsilon_n \cos \epsilon_n}. \quad (2.92)$$

Тогда решение нашей задачи записывается в виде

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\epsilon_n X} \cos(\epsilon_n Y). \quad (2.93)$$

Существует такое значение X_* ($X_* \approx 1,0$), что при $X \geq X_*$ первый член ряда (2.93) значительно больше суммы всех остальных. При этом решение упрощается:

$$\theta/\theta_0 = A_1 e^{-\epsilon_1 X} \cos(\epsilon_1 Y). \quad (2.94)$$

В частном случае $\text{Bi} \rightarrow 0$ (практически $\text{Bi} \leq 0,1$) $A_2 \rightarrow 0$, $A_3 \rightarrow 0$, ..., а $A_1 \rightarrow 1$, так как

$$A_1 = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin \epsilon_1}{\epsilon_1}}{1 + \frac{\sin \epsilon_1}{\epsilon_1} \cos \epsilon_1} = 1.$$

В то же время из (2.89) можно получить, что при $\text{Bi} \rightarrow 0$ $\epsilon_1 \rightarrow \sqrt{\text{Bi}}$. Следовательно, в этом частном случае (с учетом того, что $\cos(\sqrt{\text{Bi}} Y) \rightarrow 1$)

$$\frac{\theta}{\theta_0} \approx e^{-\sqrt{\text{Bi}} X}, \quad (2.95)$$

т.е. температура в ребре практически не зависит от координаты Y .

При $Bi \rightarrow \infty$ (практически при $Bi > 100$) получаем

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} e^{-(2n-1)\pi X/2} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi Y\right). \quad (2.96)$$

На поверхности ребра $Y = 1$. Из (2.96) вытекает, что тогда $\theta = 0$: при $Bi \rightarrow \infty$ температура поверхности ребра практически равна температуре окружающей жидкости.

Температурное поле в плоском ребре при различных значениях числа Bi показано на рис. 2.17, а линии теплового тока при $Bi = 10$ — на рис. 2.18. Видно, что кривизна температурных кривых тем больше, чем больше число Био. Этот безразмерный параметр можно рассматривать как

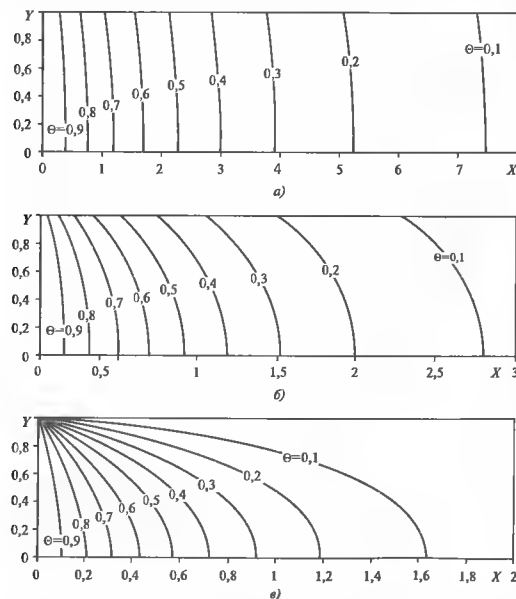


Рис. 2.17. Температурное поле в ребре при различных числах Би
а — $Bi = 0,1$; б — $Bi = 1$; в — $Bi = 100$

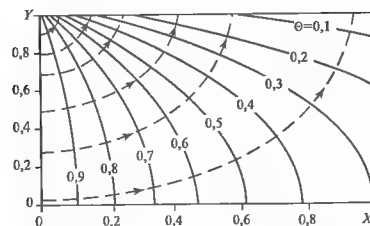


Рис. 2.18. Линии теплового тока (пунктирные линии) и изотермы в ребре при $Bi = 10$

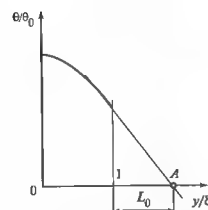


Рис. 2.19. К объяснению влияния числа Био на кривизну температурных кривых в плоском ребре

меру отношения двух термических сопротивлений R_λ/R_α , причем $R_\lambda = \delta/\lambda$, а $R_\alpha = 1/\alpha$. Если $R_\alpha \gg R_\lambda$, т.е. термическое сопротивление переносу теплоты в окружающую среду велико (мал коэффициент теплоотдачи), то тепловой поток распространяется преимущественно вдоль ребра ($q_x \gg q_y$). Наоборот, если $R_\alpha \ll R_\lambda$, то интенсивность теплоотдачи велика, и вблизи поверхности ребра $q_x \ll q_y$. В этом случае тепловой поток быстро рассеивается в окружающую среду.

Формально характер изменения температуры по сечению ребра объясняется зависимостью координаты направляющей точки A (см. рис. 1.7) от числа Био. Действительно, так как $l_0 = \lambda/\alpha$, то

$$L_0 - l_0/\delta = 1/Bi, \quad (2.97)$$

и точка A на графике в безразмерных координатах занимает положение, показанное на рис. 2.19. При $Bi \rightarrow \infty$ $L_0 \rightarrow 0$ и кривизна температурных кривых наибольшая. С уменьшением числа Bi значение L_0 увеличивается, при этом температурные кривые распрямляются, а при $Bi \rightarrow 0$ они вырождаются в прямые линии, параллельные друг другу.

Рассмотрим три способа нахождения теплового потока Q от поверхности ребра в окружающую среду. В основе любого способа лежит использование формулы (1.3).

По первому способу рассчитывается тепловой поток через основание ребра площадью $S = 2\delta h$. В (1.3) положим $n_0 = i$. Тогда тепловой поток, входящий в объем ребра через его основание, определяется как

$$Q = \int_S q_n dS = -4\lambda \int_{z=0}^{h/2} \int_{y=0}^{\delta} \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_S dy dz = -2\lambda h \int_{y=0}^{\delta} \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} dy =$$

$$= 2\lambda h \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \epsilon_n. \quad (2.98)$$

Во втором и третьем способах находится тепловой поток, проходящий через боковую поверхность ребра. Здесь $\mathbf{n}_0 = \mathbf{j}$ и в точке поверхности $q_n = q_y$. Текущее значение q_y получим с помощью закона Фурье и (2.93):

$$q_y = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\lambda}{\delta} \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon_n e^{-\epsilon_n x} \sin(\epsilon_n y). \quad (2.99)$$

Боковая поверхность ребра равна $2F$, где $F = hl$ ($h \gg \delta$ и $l \gg \delta$). Тогда

$$Q = 2 \int_F q_n dF = 4 \int_{z=0}^{h/2} \int_{x=0}^l q_y|_{y=\delta} dx dz. \quad (2.100)$$

По второму способу в (2.100) считают, что согласно (2.99)

$$q_y|_{y=\delta} = \frac{\lambda}{\delta} \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon_n \sin \epsilon_n e^{-\epsilon_n x}. \quad (2.101)$$

После подстановки (2.101) в (2.100) легко получаем формулу (2.98).

При расчете Q по третьему способу в (2.100) используется закон Ньютона—Рихмана:

$$q_y|_{y=\delta} = \alpha \theta|_{y=\delta} = \delta.$$

При этом из (2.93) и (2.100) получаем

$$Q = 2\alpha \delta h \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos \epsilon_n}{\epsilon_n}.$$

Но ϵ_n удовлетворяет (2.89). Простые преобразования приводят последнее выражение к формуле (2.98).

Пусть Q_1 — тепловой поток, проходящий через сечение площадью S , для которого $x = x_1$:

$$Q_1 = 2\lambda h \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \epsilon_n e^{-\epsilon_n x_1 / \delta}. \quad (2.102)$$

Примем $x_1 / \delta \geq X_*$ и найдем отношение Q_1 / Q :

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{A_1 \sin \epsilon_1 e^{-\epsilon_1 x_1 / \delta}}{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \epsilon_n}. \quad (2.102a)$$

Формула (2.102a) позволяет сделать вывод, что, чем больше число Био, тем быстрее рассеивается теплота в окружающую среду. Если принять $Bi = 100$ и ограничиться пятью членами ряда в знаменателе (2.102a), то можно получить

$$Q_1 / Q = 0,5617 e^{-1,5552 x_1 / \delta}.$$

Считая, что вся теплота рассеяна в окружающую среду, если $Q_1 = 0,01 Q$, находим $x_1 / \delta \approx 2,6$. Предположим, что имеется плоская поверхность, температура которой T_0 , а температура окружающей жидкости $T_{ж}$. Тогда тепловой поток через участок поверхности площадью $S = 2\delta h$ определяется по формуле

$$Q' = \alpha 2\delta h \theta_0.$$

Следовательно,

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\alpha 2\delta h \theta_0}{2\lambda h \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \epsilon_n},$$

■

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{2\lambda h \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \epsilon_n}{\alpha 2\delta h \theta_0} = \frac{1}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \epsilon_n.$$

При $Bi = 100$ $Q/Q' = 0,023$.

Проведенный анализ показывает, что обребнение поверхности с целью интенсификации теплопередачи дает эффект только тогда, когда число Био мало. Малые числа Био могут быть, в частности, в том случае, если теплоотдача происходит в газовую среду (в этом случае мал коэффициент теплоотдачи α).

В заключение отметим, что мы рассмотрели случай теплопроводности плоского ребра в упрощенной постановке, считая основание ребра изотермической поверхностью. На практике чаще всего температурное поле в плоскости основания ребра заранее предсказать невозможно. Поэтому двумерную задачу теплопроводности приходится решать для некоторой области пространства, включающей в себя не только ребро, но и ту часть твердого тела, которая примыкает к основанию ребра. Тогда в каждом конкретном случае можно сформулировать те или иные граничные условия.

2.6. Теплопроводность стержня (ребра) при малых значениях числа Био

Выше (см. § 2.5) мы сделали вывод, что при очень малых значениях числа Био температура незначительно изменяется по толщине плоского ребра. Тогда приближенно можно считать температуру функцией только продольной координаты x : $T = T(x)$. Это справедливо не только для плоского ребра, но и для ребра или стержня другой геометрической формы. При этом площадь сечения ребра (стержня) может быть как постоянной, так и изменяться по координате x .

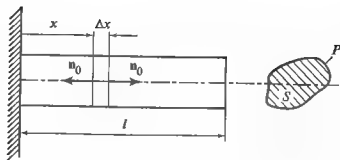


Рис. 2.20. К постановке задачи о теплопроводности стержня при малых значениях числа Био

Рассмотрим ребро или стержень постоянного поперечного сечения площадью S при условии, что число $Bi \rightarrow 0$ ($Bi \ll 1$), где

$$Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda}. \quad (2.103)$$

В (2.103) l_0 — характерный размер сечения ребра или стержня. Для плоского ребра характерным размером является его толщина δ (в § 2.5 δ — половина толщины ребра), т.е. здесь $l_0 = \delta$. Для круглого сплошного стержня $l_0 = d$, где d — диаметр стержня, для полого стержня (тонкостенной трубки) $l_0 = \delta$, где δ — толщина стенки и т.д.

Предположим, что известны температура стержня (ребра) T_0 при $x = 0$ (рис. 2.20), температура окружающей жидкости $T_{ж}$, коэффициент теплоотдачи α и теплопроводность λ . Примем, что $T_{ж} = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$. Найдем зависимость $\theta = T - T_{ж}$ от координаты x . Составим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $\theta = \theta(x)$.

В произвольном сечении на расстоянии x выделим элементарный объем $S\Delta x$ (рис. 2.20). В этом сечении плотность теплового потока равна $q_x(x)$, а в сечении на расстоянии $x + \Delta x$ она составляет $q_x(x + \Delta x)$.

Запишем уравнение теплового баланса для выделенного элемента объема стержня:

$$-q_x(x)S + q_x(x + \Delta x)S + \alpha P \Delta x \theta = 0. \quad (2.104)$$

Первое слагаемое в левой части (2.104) характеризует тепловой поток через сечение на расстоянии x (теплота поступает в элемент стержня), второе — тепловой поток через сечение на расстоянии $x + \Delta x$ (теплота уходит из элемента стержня), третье — приток теплоты через боковую поверхность элемента (P — периметр сечения стержня). Последнее слагаемое записано на основании закона Ньютона — Рихмана с учетом того, что средняя темпе-

ратура θ в данном сечении и температура поверхности ребра мало отличаются друг от друга. Полагая Δx бесконечно малой величиной, будем иметь

$$q_x(x + \Delta x) = q_x(x) + q'_x \Delta x.$$

Но q_x является проекцией вектора q на ось Ox . По закону Фурье $q_x = -\lambda d\theta/dx$ и, следовательно,

$$q'_x = -\lambda \frac{d^2\theta}{dx^2}.$$

Из (2.104) теперь получаем

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0, \quad (2.105)$$

где $m = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}}$, m^{-1} .

Общее решение (2.105) известно:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (2.106)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 необходимо задать два граничных условия. Одно из них вытекает из постановки задачи:

$$\theta(x)|_{x=0} = \theta_0, \quad (2.107)$$

где $\theta_0 = T_0 - T_{ж}$.

Возможны три случая назначения второго граничного условия.

Первый случай. Длина ребра l бесконечно велика. Тогда $\theta(x)|_{x=l} = 0$, откуда следует $C_1 = 0$, и с учетом (2.107) из (2.106) получаем

$$\theta = \theta_0 e^{-mx}. \quad (2.108)$$

Второй случай. Длина стержня l конечна, но она настолько большая, что теплота, подводимая к его основанию, практически полностью рассеивается в окружающую среду только через его боковую поверхность. Тогда $q_x(x)|_{x=l} = 0$, откуда следует

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (2.109)$$

Для нахождения C_1 и C_2 имеем два уравнения, которые получим после подстановки (2.107) и (2.109) в (2.106):

$$C_1 + C_2 = \theta_0;$$

$$e^{ml}C_1 - e^{-ml}C_2 = 0.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются как

$$C_1 = \theta_0 \frac{e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml}};$$

$$C_2 = \theta_0 \frac{e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml}}.$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставляем в (2.106) и получаем

$$\theta = \theta_0 \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml}}. \quad (2.110)$$

В другом виде

$$\theta = \theta_0 \frac{\text{ch}[m(l-x)]}{\text{ch}(ml)}. \quad (2.110a)$$

Третий случай. Считаем, что l — конечная величина и теплота к жидкости передается не только через боковую поверхность стержня, но и через сечение ребра при $x = l$. Тогда по закону Ньютона—Рихмана

$$q_x(x)|_x=l = \alpha_1 \theta(x)|_x=l, \quad (2.111)$$

где α_1 — коэффициент теплоотдачи с торца стержня.

Граничные условия (2.107) и (2.111) после их подстановки в (2.106) позволяют найти соответствующие им значения C_1 и C_2 и в результате получить формулу

$$\theta = \theta_0 \frac{\left(1 + \frac{\alpha_1}{m\lambda}\right)e^{m(l-x)} + \left(1 - \frac{\alpha_1}{m\lambda}\right)e^{-m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml} + \frac{\alpha_1}{m\lambda}(e^{ml} - e^{-ml})}. \quad (2.112)$$

При $\alpha_1 \ll m\lambda$ и $e^{ml} \approx 1$ из (2.112) получается формула (2.110).

Тепловой поток Q можно найти при использовании закона Фурье для сечения $x = 0$ или закона Ньютона—Рихмана для поверхности стержня.

Применительно ко второму случаю граничных условий будем иметь

$$Q = \alpha P \int_0^l \theta dx = \theta_0 \frac{\alpha P}{m} \frac{e^{ml} - e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml}}.$$

Последнюю формулу можно представить в виде

$$Q = (\alpha P/\theta_0)E, \quad (2.113)$$

где

$$E = \frac{\text{th} ml}{ml}. \quad (2.114)$$

В (2.113) выражение в скобках представляет собой тепловой поток, который отводился бы от поверхности ребра при его постоянной температуре, равной θ_0 . Это максимально возможный тепловой поток, так как в действительности средняя температура $\bar{\theta}$ стержня меньше θ_0 . Очевидно, что коэффициент E равен отношению действительного теплового потока к максимально возможному:

$$E = \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\theta}{\theta_0} dx.$$

Выше рассмотрена теория процесса теплоотдачи от стержня. Естественно, что все остается в силе для любого ребра постоянного поперечного сечения. В последнем случае E называют коэффициентом эффективности ребра. Для плоского ребра высотой h и толщиной δ ($h \gg \delta$) $P = 2h$, $S = h\delta$, а

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}}; \quad (2.115)$$

$$ml = \sqrt{2\text{Bi}} \frac{l}{\delta}. \quad (2.116)$$

2.7. Передача теплоты через круглое ребро

Трубы с крупными ребрами (рис. 2.21) применяются, когда внутренний коэффициент теплоотдачи, характеризующий процесс теплообмена между стенкой и жидкостью внутри трубы, гораздо больше внешнего. В этом случае оребрение внешней поверхности теплообмена дает значительное увеличение теплового потока через стенку трубы. Оребренные трубы имеют преимущества по сравнению с гладкими в процессах передачи теплоты от газового теплоносителя (малые α) к воде (большие α).

Выведем формулы для расчета теплового потока через круглое ребро и температуры ребра.

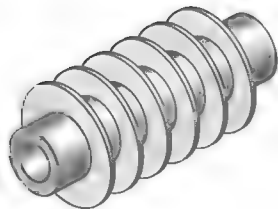
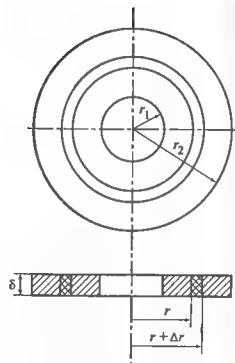


Рис. 2.21. Труба с круглыми ребрами



→
Рис. 2.22. К выводу уравнения теплопроводности круглого ребра

Пусть имеется круглое ребро (рис. 2.22) толщиной δ с радиусами r_1 и r_2 . Поверхность при $r = r_1$ поддерживается при постоянной температуре T_0 . Температура жидкости, омывающей ребро, $T_{ж} = \text{const}$. Задана теплопроводность ребра $\lambda = \text{const}$. Коэффициент теплоотдачи $\alpha = \text{const}$. Будем считать, что $\delta/\lambda \ll 1/\alpha$. Изменением температуры по толщине ребра можно пренебречь. Обозначим $\theta = T - T_{ж}$.

Подобно тому, как это мы делали в § 2.6, составим уравнение теплового баланса для элемента ребра в виде тонкого кольца с радиусом r , толщиной Δr и высотой δ . Введем $q(r) = 2\pi r q_r(r)$. Аналогично (2.104) запишем

$$-q(r)\delta + q(r + \Delta r)\delta + \alpha 4\pi r \Delta r \theta = 0.$$

По формуле Тейлора, учитывая малое значение Δr , находим

$$q(r + \Delta r) = q(r) + q'_r \Delta r,$$

$$\text{где } q'_r = 2\pi \lambda \frac{d}{dr}(r q_r) = -2\pi \lambda \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\theta}{dr}\right).$$

Теперь уравнение баланса теплоты принимает вид

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta}\theta = 0. \quad (2.117)$$

Комплекс величин $2\alpha/(\lambda\delta) = m^2$. Обозначим $z = mr$. После простых преобразований (2.117) получим уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \theta = 0,$$

которое относится к классу специальных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Бесселя. Его решение можно записать как

$$\theta = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z),$$

где $I_0(z) = I_0(mr)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $K_0(z) = K_0(mr)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка; постоянные C_1 и C_2 находятся из граничных условий:

$$\theta(mr)|_{r=r_1} = \theta_0; \quad \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_2} = 0.$$

Для функций Бесселя справедливы соотношения вида

$$\frac{dI_0(z)}{dz} = -I_1(z); \quad (2.118)$$

$$\frac{dK_0(z)}{dz} = -K_1(z), \quad (2.118a)$$

где $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — функций Бесселя первого порядка (соответственно первого и второго рода).

Окончательно решение задачи получается в виде

$$\theta = \theta_0 \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}.$$

Таблицы функций Бесселя содержатся в справочниках по математике. Графики функций I_0 , I_1 , K_0 , K_1 изображены на рис. 2.23 и 2.24.

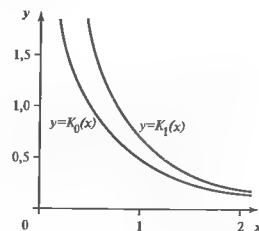
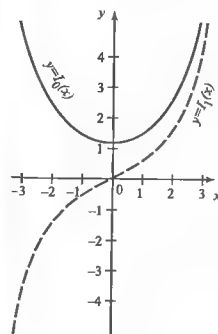


Рис. 2.24. Графики функций Бессели K_0 и K_1

Рис. 2.23. Графики функций Бессели I_0 и I_1

Тепловой поток, проходящий через ребро,

$$Q = -\lambda 2\pi r_1 \delta \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_1} = 2\pi r_1 \lambda \delta m \theta_0 \psi,$$

$$\text{где } \psi = \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}.$$

Для приближенного учета теплоотдачи с внешней боковой поверхности ребра можно условно увеличить r_2 на значение, равное 0,5 δ .

2.8. Теплопередача через ребристую стенку

Рассмотрим процесс теплопередачи через плоскую стенку толщиной δ' (рис. 2.25). Заданы температуры жидкостей с двух сторон от стенки $T_{ж1}$ и $T_{ж2}$. Со стороны первой жидкости площадь поверхности стенки равна F_1 , а коэффициент теплоотдачи составляет α_1 . На другой стороне стенки имеются плоские ребра высотой l , шириной b и толщиной δ . Обрешенные поверхности сделано с целью увеличения теплового потока, так как известно, что со стороны второй жидкости α_2 значительно меньше α_1 . Выведем формулу для расчета Q через данную стенку.

Обозначим температуры одной и другой поверхностей стенки (соответственно со стороны первой и второй жидкости) через T_{c1} и T_{c2} , площадь поверхности ребер через F_p , а площадь поверхности стенки между ребрами через F_c . Поверхности площадью F_p соответствует коэффициент теплоотдачи α_p , а поверхности площадью F_c — α_c .

Коэффициент эффективности ребра

$$E = \frac{th(ml)}{ml}, \quad (2.119)$$

где для плоского ребра при условии $\delta \ll b$

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha_p}{\lambda \delta}}. \quad (2.120)$$

Здесь λ — теплопроводность ребра.

Тепловой поток от ребристой поверхности ко второй жидкости

$$Q = \alpha_c F_c (T_{c2} - T_{ж2}) + \alpha_p F_p E (T_{c2} - T_{ж2}) = \\ = \alpha_{2пр} F'_2 (T_{c2} - T_{ж2}),$$

где $F'_2 = F_p + F_c$, а приведенный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_{2пр} = \alpha_c \frac{F_c}{F'_2} + \alpha_p E \frac{F_p}{F'_2}.$$

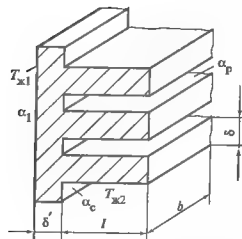


Рис. 2.25. К расчету теплового потока через ребристую стенку

Кроме того, известно, что

$$Q = \alpha_1 F_1 (T_{ж1} - T_{c1});$$

$$Q = \frac{\lambda'}{8} F_1 (T_{c1} - T_{c2}),$$

где λ' — теплопроводность стенки; часто можно принять $\lambda' = \lambda$.

Исключая из трех уравнений для Q неизвестные величины T_{c1} и T_{c2} , получаем

$$Q = \frac{(T_{ж1} - T_{ж2}) F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta'}{\lambda'} + \frac{1}{\alpha_{2пр}} \frac{F_1}{F'_2}}.$$

Из последней формулы видно, что даже при малом значении $\alpha_{2пр}$ последнее слагаемое в знаменателе будет иметь небольшое значение, так как $F_1 < F'_2$.

Рассмотренную методику расчета теплового потока через стенку с плоскими ребрами постоянного поперечного сечения применяют также для цилиндрических стенок с круглыми и пластинчатыми ребрами. При этом коэффициент эффективности ребра толщиной δ рассчитывают по (2.119) и (2.120), причем в (2.119) величину l заменяют эквивалентной длиной (высотой) $l_{экв}$. Для круглого ребра с наружным D_p и внутренним d_2 диаметрами

$$l_{экв} = h(1 + 0,35 \ln(D_p/d_2)),$$

где $h = 0,5(D_p - d_2)$.

Для пластинчатых ребер (рис. 2.26) высоту h подбирают таким образом, чтобы площадь поверхности прямоугольного ребра была такой же, как площадь поверхности круглого ребра. Аналогично поступают и в случае, когда ребра расположены на коридорном или шахматном пучке труб.

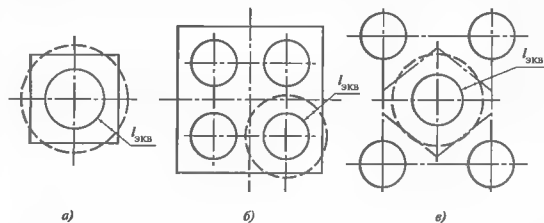


Рис. 2.26. Схемы к расчету $l_{экв}$

а — для прямоугольного ребра; б — для пластинчатого ребра при коридорном расположении труб; в — то же при шахматном расположении труб

2.9. Численный метод решения стационарных задач теплопроводности

В предыдущих параграфах рассматривались аналитические решения задач теплопроводности, которые имеют очень большое значение, в особенности, если удастся получить привычные формулы, удобные для использования и анализа. К сожалению, получить простое и наглядное аналитическое выражение удается далеко не всегда. Зачастую решение задачи представляется в виде ряда со специальными функциями, работа с которым достаточно трудоемка. Если же приходится решать нелинейное уравнение, то аналитическое решение получается лишь для весьма ограниченного круга задач.

Численные методы решения позволяют существенно расширить этот круг. Можно утверждать, что задачи, имеющие аналитическое решение, могут быть решены также и численно, но многие из них могут быть решены только с помощью численных методов.

Основным недостатком численного решения является то, что результат представляет собой набор (таблицу) чисел, что, безусловно, снижает наглядность и затрудняет анализ решения. Однако аналитические и графические возможности современных компьютеров в большой степени снимают остроту этой проблемы. Следует отметить, что именно появление во второй половине XX в. быстродействующих ЭВМ позволило состояться численным методам, ибо сама по себе идея численного решения известна, по меньшей мере, со времен Ньютона, и лишь большая трудоемкость массовых вычислений служила основным препятствием ее реализации на практике.

Кратко рассмотрим лишь один из многих численных методов решения дифференциальных уравнений теплопроводности — метод контрольного объема [31].

Основная идея численного решения состоит в том, что оно записывается не для всей области интегрирования сразу, а для дискретной, малой ее части — контрольного объема (имеется в виду трехмерное пространство). В частности, если контрольный объем мал, то в его пределах искомая величина (у нас — температура) практически не изменяется и, следовательно, характеризуется численным значением, которое приписывается фиксированной точке внутри этого объема — узлу или полюсу. Связь же между численными значениями искомой величины в соседних контрольных объемах устанавливается через дискретный аналог дифференциального уравнения теплопроводности, что позволяет охватить всю область интегрирования. Как было отмечено выше, уравнение теплопроводности отражает закон сохранения энергии. Применительно к контрольному объему при стационарном температурном поле этот закон может быть сформулирован так: «Изменение во времени количества теплоты, выделившейся в контрольном объеме в связи с действием в нем внутренних источников (стоков) теплоты, плюс количество теплоты, поступившей в контрольный объем через часть его границ, равно количеству теплоты, покинувшей контрольный объем через другие его границы в процессе теплообмена с окружающими телами (соседними контрольными объемами)».

Таким образом, для каждого контрольного объема записывается алгебраическое уравнение, связывающее значение температуры в нем со значениями температуры в соседних контрольных объемах. Общее число таких уравнений равно числу контрольных объемов, составляющих область интегрирования уравнения. Очевидно, что решение такой системы уравнений дает приближенные значения температуры во всех контрольных объемах. В пределе, если число контрольных объемов устремить к бесконечности, приближенное решение переходит в точное.

Рассмотрим метод контрольного объема на примере ранее рассмотренной простой задачи о теплопроводности ребра постоянного сечения (см. § 2.6).

Применение метода включает шесть шагов: постановку задачи, дискретизацию области интегрирования, дискретизацию дифференциального уравнения, дискретизацию граничных условий, решение системы алгебраических конечно-разностных уравнений, анализ решения.

Постановка задачи. Ребро (стержень) длиной l с постоянной площадью поперечного сечения f , на левом торце (границе) которого поддерживается постоянная температура t_0 , отдает теплоту (со своей боковой поверхности и правого торца) жидкости, имеющей более низкую температуру $t_{ж}$. При заданном коэффициенте теплоотдачи α от поверхности ребра к жидкости рассчитать изменение температуры по его длине. Теплопроводность материала ребра λ задана. Опустив все допущения (см. § 2.6), сформулируем задачу математически.

Найти на отрезке $x \in [0, l]$ решение $\theta(x)$ стационарного дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{d^2}{dx^2}\theta - m^2\theta = 0 \quad (2.121)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 \quad \text{при } x = 0; \\ \frac{d}{dx}\theta &= -\frac{\alpha}{\lambda}\theta \quad \text{при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

Дискретизация области интегрирования. Разобьем область интегрирования — отрезок $[0, l]$ на n равных частей, разместим узлы P_k обозначим границы контрольных объемов, как это показано на рис. 2.27. Способ разбиения области на контрольные объемы определяется, в основном, предварительной информацией о скорости изменения температуры внутри области интегрирования. Там, где ожидается большое изменение температуры в зависимости от изменяющейся координаты, узлы располагают чаще.

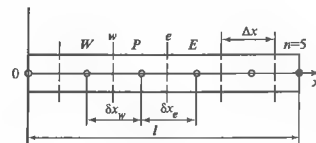


Рис. 2.27. К постановке задачи о нахождении температуры в ребре

Узлы нумеруются, координаты узлов X_i и их границ x_i вычисляются и хранятся в памяти компьютера в виде массивов чисел $\{X_i\}$ и $\{x_i\}$, где $i = 0, 1, \dots, n$.

Для точности решения важно, чтобы соблюдалась ортогональность границ контрольного объема осей координат. В нашем случае это требование выполняется.

Для дальнейших рассуждений рассмотрим три соседних внутренних контрольных объема с узлами W, P, E . Идеем «в» для удобства опустим.

Дискретизация уравнения теплопроводности. Для перехода от дифференциального уравнения к алгебраическому дискретному аналогу необходимо проинтегрировать (2.121) в пределах контрольного объема с узлом P (рис. 2.27). Из физического смысла задачи следует, что

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{d^2 \theta}{dx^2} dx = m^2 \int_{x_w}^{x_e} \theta dx. \quad (2.123)$$

Если предположить, что вследствие малости контрольного объема значение θ не изменяется в пределах $\Delta x = x_e - x_w$, то интеграл в правой части (2.123) легко вычисляется. Тогда имеем

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_e - \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_w = m^2 \theta \Delta x.$$

Теперь предположим, что от узла к узлу значение θ изменяется линейно (более правильным был бы выбор экспоненциальной функции), тогда можно записать

$$\frac{1}{\delta x_e} (\theta_E - \theta_P) - \frac{1}{\delta x_w} (\theta_P - \theta_W) = m^2 \theta_P \Delta x.$$

Отметим, что в рамках метода допускается выбор любой функции: ступенчатой, степенной, экспоненциальной. Предположение о малости контрольного объема делает это допущение обоснованным, а удачно выбранная функция увеличивает точность решения. Более того, метод допускает различные функции при интегрировании правой и левой частей уравнения (2.123), чем мы уже воспользовались.

После простых алгебраических преобразований получаем окончательное выражение для конечно-разностного аналога:

$$a_P \theta_P = a_E \theta_E + a_W \theta_W + b, \quad (2.124)$$

где $a_E = 1/\delta x_e$; $a_W = 1/\delta x_w$; $b = 0$; $a_P = a_E + a_W + m^2 \Delta x$.

Как говорилось выше, уравнения вида (2.124) должны быть записаны для всех внутренних контрольных объемов, они образуют систему из $n - 1$ уравнений. Эта система не замкнута, так как число неизвестных равно $n + 1$. Недостающие уравнения получим из граничных условий.

Дискретизация граничных условий. Так как на левой границе ребра задано значение искомой функции (граничное условие первого рода), то коэффициенты уравнения (2.124), очевидно, таковы: $a_P = 1$, $a_E = a_W = 0$, $b = \theta_0$.

Для правого граничного контрольного объема придется записать особое уравнение. Формальная дискретизация граничного условия третьего рода не учитывала

бы отвод теплоты через боковую поверхность правого граничного контрольного объема.

Итак, тепловой поток, прошедший через левую границу контрольного объема и, покидает его через правую границу — торец P с площадью поверхности f_n через боковую поверхность площадью $n \Delta x / 2$ благодаря конвективному теплообмену с жидкостью, что в терминах метода контрольного объема выглядит так:

$$-\lambda \left[\frac{1}{\delta x_w} (\theta_P - \theta_W) \right] f = \alpha f \theta_P + \alpha n \frac{\Delta x}{2} \theta_P. \quad (2.125)$$

Отсюда получаем выражения для коэффициентов уравнения (2.124) для правого граничного объема (для узла P_n): $a_E = 0$; $a_W = 1/\delta x_w$; $b = 0$; $a_P = a_E + a_W + m^2 \Delta x / 2 + \alpha / \lambda$.

Таким образом, благодаря описанной выше процедуре дискретизаций уравнения и граничных условий нам удалось записать для наших $n + 1$ узлов $n + 1$ уравнений вида (2.124) и вычислить коэффициенты при неизвестных. Если записать полученную систему уравнений в матричном виде $A\theta = B$, то будет видно, что матрица A коэффициентов уравнения — ленточная, т.е. все ее коэффициенты, за исключением тех, которые стоят на главной диагонали и двух ближайших к ней, равны нулю. Это понятие, так как каждое уравнение вида (2.124) связывает лишь три узла, а состоит формально из $n + 1$ членов.

Решение системы конечно-разностных уравнений. Из математики известны самые разнообразные методы решения систем алгебраических уравнений, многие из которых реализованы в программном обеспечении ЭВМ.

Для решения линейной системы алгебраических уравнений с ленточной матрицей коэффициентов используют чаще всего специальный метод — так называемый метод прогонки, являющийся частным случаем известного метода Гаусса. Воспользуемся возможностями программного продукта компании Mathsoft—Mathcad, который позволяет работать с алгебраическими выражениями, различными функциями и матрицами. причем их можно записывать в почти привычном математическом виде.

Итак, вернемся к нашей задаче. Присвоим числовые значения всем исходным данным. Единицы величины опустим, но надо иметь в виду, что используются базовые единицы системы единиц СИ и только температура измеряется в градусах Цельсия.

Поскольку область интегрирования разбита на равные объемы, за исключением приграничных, и узлы размещены в их центрах, то $\delta x = \Delta x = 1/n = h$ — шаг разбески сетки. Символами δ и β обозначим толщину и ширину ребра. Результаты ввода исходных данных и необходимые предварительные вычисления имеют вид:

$$k = 0.05; \quad \delta = 0.005; \quad \beta = 0.2; \quad \lambda = 100; \quad n = 5; \quad t_0 = 120; \quad t_f = 20; \quad \alpha = 10;$$

$$u = 2(\delta + \beta); \quad f = 8\beta; \quad \theta_0 = t_0 - t_f; \quad m = \sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}}; \quad h = 1/n; \quad u = 0.41; \quad f = 1 \cdot 10^{-3};$$

$$\theta_0 = 100; \quad m = 6.403; \quad h = 0.01.$$

Теперь заполним матрицу коэффициентов при неизвестных A и вектор-столбец B правых частей системы уравнений вида (2.124). Формулы для их вычисления были получены выше. Очевидно, что вследствие постоянства шага h для всех уравне-

ний, записанных для внутренних узлов, коэффициенты $a_{i,i} = a_P$ и $a_{i,j-1} \approx a_{i,j+1} = -a_E = -a_W$ одинаковы.

Имеем для $i = 0$

$$a_{P0} = 1; \quad a_{E0} = 0; \quad b_0 = \theta_0;$$

для $0 < i < n$

$$a_E = 1/h; \quad a_W = 1/h; \quad b_i = 0; \quad a_P = a_E + a_W + m^2 h;$$

$$a_E = 100; \quad a_W = 100; \quad a_P = 200,41.$$

Наконец, для последнего уравнения при $i = n$ получаем

$$a_{Wn} = 1/h; \quad b_n = 0; \quad a_{Pn} = a_{Wn} + \frac{\alpha}{\lambda} + m^2 \frac{h}{2};$$

$$a_{Wn} = 100; \quad a_{Pn} = 100,305.$$

Этими числами мы и заполним матрицы. С помощью маленьких программ

$$A_{i,j} = \begin{cases} a_{P0} & \text{if } (i=0)(j=0) \\ a_P & \text{if } (i=j)(ij > 0) \\ a_{Pn} & \text{if } (i=n)(j=n) \\ -a_W & \text{if } j = i-1 \\ -a_E & \text{if } (j=i+1) (i \neq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad B_i = \begin{cases} \theta_0 & \text{if } i=0 \\ b_n & \text{if } i=n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

заполняем матрицы A и B значениями коэффициентов уравнений и их правых частей. Приведем результат этой работы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200,41 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200,41 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200,41 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 200,41 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 100,305 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Функция обращения матриц является внутренней процедурой Matlab, поэтому окончательное решение задачи получается в виде $\theta = A^{-1}B$.

Вектор-столбец θ содержит значения избыточной температуры в ребре, в шести точках по его длине l .

Анализ решения. Приведем результаты численного решения в сравнении с результатами расчета по аналитической формуле, учитывающей теплоотдачу с торца ребра:

$$\theta_i(x) = \theta_0 \frac{mch(m(l-x)) + \frac{\alpha}{\lambda} sh(m(l-x))}{mch(ml) + \frac{\alpha}{\lambda} sh(ml)}.$$

Аналитическое решение имеет вид

$$\theta_P = \begin{bmatrix} 100 \\ 98,131 \\ 96,664 \\ 95,594 \\ 94,916 \\ 94,628 \end{bmatrix}.$$

Численное решение записывается

$$\theta = \begin{bmatrix} 100 \\ 98,132 \\ 96,666 \\ 95,596 \\ 94,918 \\ 94,629 \end{bmatrix}.$$

Температурное поле в пластине с неравномерным подводом (отводом) теплоты на границе. На практике часто бывает, что поверхность теплообмена нагревается или охлаждается неравномерно, т.е. плотность теплового потока не постоянна, а меняется вдоль поверхности теплообмена от точки к точке. Так, например, работают экранные трубы в топке котла, обращенные наполовину к факелу и продуктам сгорания, а наполовину к стенке топки. Более того, тепловой поток изменяется не только по периметру трубы, но и вдоль ее оси. Таким образом, в стенке трубы возникает трехмерное температурное поле.

Рассмотрим упрощенную задачу: двумерную (пренебрежем распространением теплоты вдоль оси трубы) и вместо цилиндрической будем использовать декартову систему координат, т.е. будем искать решение задачи не в Полукольце, а в прямоугольной полосе длиной l_x (развертка по полупериметру) и шириной l_y (толщина стенки трубы).

Уточним формулировку задачи. Рассчитать стационарное поле температуры в полосе $l_x \times l_y$, к верхней границе ($y = l_y$) которой подводится теплота, плотность теплового потока изменяется по заданному закону $q(x)$. От нижней границы ($y = 0$) теплота отводится жидкостью с температурой $t_{ж}$ при постоянном коэффициенте теплоотдачи α . На левой ($x = 0$) и правой ($x = l_x$) границах тепловой поток равен нулю. Теплопроводность λ материала полосы считать известной функцией температуры: $\lambda(t)$.

Рассмотрим математическую постановку задачи. Решить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) = 0$$

в прямоугольной области $\{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ при следующих граничных условиях:

$$\text{при } x = 0, 0 \leq y \leq l_y, \quad \partial t / \partial x = 0;$$

$$\text{при } x = l_x, 0 \leq y \leq l_y, \quad \partial t / \partial x = 0;$$

$$\text{при } y = 0, 0 \leq x \leq l_x \quad -\lambda(\partial t/\partial y) = \alpha(t(x, 0) - t_{ж});$$

$$\text{при } y = l_y, 0 \leq x \leq l_x \quad -\lambda(\partial t/\partial y) = q(x).$$

На трех границах области интегрирования заданы граничные условия второго рода, а на четвертой — третьего рода.

Дискретизация области интегрирования. На рис. 2.28 показано примерное разбиение нашей области на контрольные объемы, которые теперь представляют собой прямоугольники. По двум осям выбраны равномерные шаги: $h_x = \Delta x$, $h_y = \Delta y$. Если принять число разбиений по оси x равным m , а по оси y равным n , то $h_x = l_x/m$, $h_y = l_y/n$. Таким образом, вся область разбита на $(m+1)(n+1)$ контрольных объемов, в состав которых входят $(m-1)(n-1)$ внутренних объемов $\Delta V = h_x h_y l$ (их узлы обозначены черными точками и латинскими буквами); $2(m+n)-4$ внутренних граничных объемов $h_x h_y/2$ и четыре угловых граничных объема $h_x h_y/4$ (серые точки).

Дискретизация уравнения. Процедура дискретизации уравнения не отличается от той, которая выполнялась выше, за исключением того, что теперь нужно брать уже двукратный интеграл с пределами интегрирования $x_e - x_p$, $y_n - y_s$. Конечно-разностный аналог дифференциального уравнения, записанный для контрольного объема P , имеет следующий вид:

$$a_P t_P = a_E t_E + a_W t_W + a_N t_N + a_S t_S + b, \quad (2.126)$$

где $a_E = h_y \lambda_e / \delta x_e$; $a_W = h_y \lambda_w / \delta x_w$; $a_N = h_x \lambda_n / \delta y_n$; $a_S = h_x \lambda_s / \delta y_s$; $b = 0$; $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$; здесь $\delta x_e = x_E - x_P$, $\delta x_w = x_P - x_W$, $\delta y_n = y_N - y_P$, $\delta y_s = y_P - y_S$.

Проведем аппроксимацию λ . Индексы «е», «w», «n», «s» при λ в выражениях для a_E , a_W , a_N , a_S показывают, что формально значение его относится к соответствующей границе контрольного объема P с соседним контрольным объемом и зависит как от теплопроводности объема P , так и от теплопроводности соседнего объема. Наиболее удачной формулой аппроксимации λ является следующее выражение (оно записано для границы e ; для других границ его можно записать по аналогии):

$$\lambda_e = \frac{\delta x_e}{\frac{x_E - x_P}{\lambda_P} + \frac{x_E - x_E}{\lambda_E}}.$$

Очевидно, что $\delta x_e / \lambda_e$ представляет собой термическое сопротивление теплопроводности на участке PE , равное сумме термических сопротивлений участков Pe и eE .

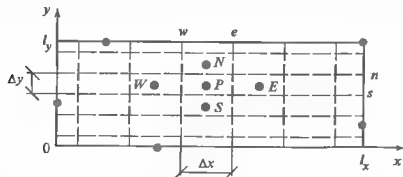


Рис. 2.28. Дискретизация области интегрирования. Внутренние и граничные контрольные объемы

Дискретизация уравнения теплопроводности выполнена. Мы записали уравнения для всех внутренних узлов области интегрирования. Перейдем к ее границам.

Дискретизация граничных условий. На левой и правой границах полосы задано условие теплоизоляции, т.е. $q_x = 0$. Однако плотность потока q_y не равна нулю. С учетом этого интегрирование дифференциального уравнения теплопроводности по граничным контрольным объемам приводит к следующим конечно-разностным уравнениям:

на левой границе

$$a_P t_P = a_E t_E + a_N t_N + a_S t_S + b,$$

где $a_E = h_y \lambda_e / \delta x_e$; $a_N = h_x \lambda_n / \delta y_n / 2$; $a_S = h_x \lambda_s / \delta y_s / 2$; $b = 0$; $a_P = a_E + a_N + a_S$;

на правой границе

$$a_P t_P = a_W t_W + a_N t_N + a_S t_S + b,$$

где $a_W = h_y \lambda_w / \delta x_w$; $a_N = h_x \lambda_n / \delta y_n / 2$; $a_S = h_x \lambda_s / \delta y_s / 2$; $b = 0$; $a_P = a_W + a_N + a_S$.

Перейдем к нижней и верхней границам. На нижней границе происходит теплоотдача к жидкости, имеющей температуру $t_{ж}$, при коэффициенте теплоотдачи α . Поступая так же, как в задаче для ребра, и учитывая дополнительно теплообмен между объемами в направлении x , получаем

$$a_P t_P = a_E t_E + a_W t_W + a_N t_N + b,$$

где $a_E = h_y \lambda_e / \delta x_e / 2$; $a_W = h_y \lambda_w / \delta x_w / 2$; $a_N = h_x \lambda_n / \delta y_n / 2$; $b = \alpha h_x t_{ж}$; $a_P = a_E + a_W + a_N + \alpha h_x$.

На верхней границе к полюсу подводится теплота с заданной плотностью теплового потока $q(x)$. При интегрировании уравнения с учетом граничного условия получаем

$$a_P t_P = a_E t_E + a_W t_W + a_S t_S + b,$$

где $a_E = h_y \lambda_e / \delta x_e / 2$; $a_W = h_y \lambda_w / \delta x_w / 2$; $a_S = h_x \lambda_s / \delta y_s$; $b = q(x) h_x$; $a_P = a_E + a_W + a_S$.

Аналогично получаются коэффициенты уравнений для оставшихся четырех угловых контрольных объемов.

Решение системы уравнений. Выше для решения системы уравнений использовалось обращение матрицы коэффициентов уравнений. Теперь рассмотрим два метода, один из которых (метод Зейделя) будет применен как основной, второй (метод прогонки) — как вспомогательный.

Метод Зейделя — один из методов последовательных приближений (итераций). Суть метода проста.

Заданная система уравнений

$$a_{i0} t_0 + a_{i1} t_1 + \dots + a_{if} t_f + \dots + a_{in} t_n = b_i, \text{ где } i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

записывается в виде, удобном для итераций: каждое из уравнений решается относительно неизвестного t_i при диагональном коэффициенте a_{ii} . Задается начальное приближенное решение системы уравнений — вектор-столбец t^0 .

Решение задачи в k -м приближении находится путем подстановки результата t^{k-1} предыдущего $k-1$ приближения в правую часть каждого из уравнений системы. Это метод простой итерации.

Особенностью метода Зейделя является то, что в процессе подстановки при вычислении t_i^k используются значения неизвестных, уже вычисленные в k -м приближении при решении предыдущих $i-1$ уравнений, что ускоряет сходимость итераций:

$$t_i^k = (b_i - a_{i,0}t_0^k - \dots - a_{i,i-1}t_{i-1}^k - a_{i,i+1}t_{i+1}^{k-1} - \dots - a_{i,n}t_n^{k-1})/a_{i,i}.$$

Процесс итераций завершается по достижении заданной точности. Скорость сходимости зависит также от удачного задания начального приближения.

В качестве начального приближения возьмем решение нашей задачи в одномерной постановке. Пренебрежем распространением теплоты в направлении оси x и будем считать, что теплота передается только в направлении оси y . Тогда из уравнения выпадает вторая производная по x , а из уравнений дискретного аналога — члены, содержащие t_E и t_W . Уравнение (2.126) приобретает вид уравнения с ленточной матрицей коэффициентов:

$$a_P t_P = a_N t_N + a_S t_S + b,$$

где $a_N = \lambda_n / \delta y_n$; $a_S = \lambda_s / \delta y_s$; $b = 0$; $a_P = a_N + a_S$.

Аналогично преобразуются уравнения для граничных узлов.

Найдем решение системы уравнений с ленточной матрицей методом прогонки. Для этого сначала запишем систему в индексной форме: $a_i t_i = b_i t_{i+1} + c_i t_{i-1} + d_i$, а затем — в так называемом прогоночном виде:

$$t_i = \alpha_i t_{i+1} + \beta_i$$

выразив температуру в точке i через температуру в следующей точке $i+1$. Тогда температура в предыдущей точке $i-1$

$$t_{i-1} = \alpha_{i-1} t_i + \beta_{i-1}.$$

Подставляя это выражение в систему, записанную в индексной форме, после простых преобразований получаем

$$t_i = \frac{b_i}{a_i - \alpha_{i-1} c_i} t_{i+1} + \frac{\beta_i - \alpha_{i-1} d_i}{a_i - \alpha_{i-1} c_i} \quad (2.127)$$

Сравнивая (2.127) с прогоночным уравнением, видим: дробь при t_{i+1} есть ии что иное, как коэффициент α_i , а вторая дробь — коэффициент β_i , которые не содержат неизвестных, так как выражены через известные коэффициенты a_P, b_P, c_P, d_i i -го индексного уравнения и $\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}$ ($i-1$)-го прогоночного уравнения. Коэффициенты первого прогоночного уравнения вычисляются из граничного условия

$$\alpha_0 = b_0/a_0; \quad \beta_0 = d_0/a_0.$$

Таким образом, последовательно (начиная с первого уравнения) могут быть вычислены прогоночные коэффициенты для всех $n+1$ уравнений (узлов, контрольных объемов). Это прямой ход алгоритма прогонки.

На второй границе n -е прогоночное уравнение (считаем от нуля) имеет вид, позволяющий вычислить температуру t_P :

$$t_n = \beta_n = \frac{d_n + c_n \beta_{n-1}}{a_n - c_n \alpha_{n-1}}.$$

Теперь, используя прогоночное уравнение и вычисления в прямом ходе прогоночных коэффициентов, вычисляем последовательно $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_0$ — обратный ход прогонки. Задача решена.

Для нашей области интегрирования процедура прогонки должна быть выполнена вдоль каждой из $m+1$ полос контрольных объемов, получим $(n+1)(m+1)$ значений температуры начального приближения.

Решим конкретную задачу. Как и прежде, используем Mathcad, вновь опустим единицы величины.

Имеем исходные данные:

$$t_x = 0,18; \quad t_y = 0,005; \quad \lambda = 20; \quad t_{fj} = 20; \quad \alpha_f = 2400;$$

$$q(x) = 100\,000 \left(1 - \frac{x}{2l_x}\right).$$

Возьмем сетку с равномерными шагами, равными 1 см по оси x и 1 мм по оси y . Параметры сетки таковы:

$$m: 18; \quad hx: l_x/m; \quad n: 5; \quad hy: l_y/n; \quad hx: \sim 0,01; \quad hy: 1 \cdot 10^{-3}.$$

Вычислим коэффициенты конечно-разностных уравнений.

1. Рассмотрим внутренние узлы:

$$i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$a_{i,j} = hx \frac{1}{hy}; \quad a_{s,j} = hx \frac{1}{hy}; \quad a_{e,j} = hy \frac{1}{hx}; \quad a_{w,i,j} = hy \frac{1}{hx};$$

$$b_{i,j} = 0; \quad b_{s,j} = 0; \quad a_{px,i,j} = a_{e,j} + a_{w,i,j}; \quad a_{py,i,j} = a_{i,j} + a_{s,j}.$$

Коэффициенты заранее записаны с расщеплением по направлениям x и y , чтобы применить метод прогонки.

2. Рассмотрим внутренние граничные узлы:

а) нижняя полоса:

$$i = 0; \quad j = 0, \dots, m;$$

$$a_{n,i,j} = \begin{cases} hx \frac{\lambda}{2 hy} & \text{if } (j=0) \text{ and } (j=m); \\ hx \frac{\lambda}{hy} & \text{otherwise;} \end{cases} \quad a_{s,i,j} = 0;$$

$$a_{e,i,j} = \begin{cases} 0 & \text{if } j=m; \\ hy \frac{\lambda}{2 hx} & \text{otherwise;} \end{cases} \quad a_{w,i,j} = \begin{cases} 0 & \text{if } j=0; \\ hy \frac{\lambda}{2 hx} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Этот случай соответствует нижней полосе половинных контрольных объемов, включая угловые: $y = 0$.

На нижней границе происходит теплоотдача между стенкой и жидкостью с коэффициентом теплоотдачи α , поэтому коэффициент a_P и свободный член b содержат дополнительные члены:

$$bx_{i,j} := 0; \quad by_{i,j} := \begin{cases} \alpha_i t_{ji} \frac{hx}{2} & \text{if } (j=0) + (j=m); \\ \alpha_i t_{ji} hx & \text{otherwise;} \end{cases};$$

$$apx_{i,j} := ae_{i,j} + aw_{i,j}; \quad apy_{i,j} := \begin{cases} an_{i,j} + as_{i,j} + \alpha_i \frac{hx}{2} & \text{if } (j=0) + (j=m); \\ an_{i,j} + as_{i,j} + \alpha_i hx & \text{otherwise;} \end{cases};$$

б) верхняя полоса, включая угловые объемы:

$$\dot{t} := n; \quad j := 0, \dots, m;$$

$$an_{i,j} := 0;$$

$$ae_{i,j} := \text{if } (j=m, 0, \frac{hy}{2} \frac{1}{hx}); \quad as_{i,j} := \begin{cases} \frac{hx}{2} \frac{1}{hy} & \text{if } (j=0) + (j=m); \\ hx \frac{1}{hy} & \text{otherwise;} \end{cases};$$

$$bx_{i,j} := 0; \quad aw_{i,j} := \text{if } (j=0, 0, \frac{hy}{2} \frac{1}{hx});$$

$$apx_{i,j} := ae_{i,j} + aw_{i,j}; \quad apy_{i,j} := \begin{cases} q(X_j) \frac{hx}{2} & \text{if } (j=0) + (j=m); \\ q(X_j) hx & \text{otherwise.} \end{cases};$$

На верхней границе ($y = hy$) происходит подвод теплоты при граничных условиях второго рода (зависимость $q(x)$ задана);

в) левая и правая границы (половинные контрольные объемы за исключением угловых).

$$j := 0, m, \dots, m; \quad i := 1, \dots, n-1;$$

$$an_{i,j} := \frac{hx}{2} \frac{1}{hy}; \quad as_{i,j} := \frac{hx}{2} \frac{1}{hy};$$

$$ae_{i,j} := \text{if } (j=m, 0, hy \frac{1}{hx}); \quad aw_{i,j} := \text{if } (j=0, 0, hy \frac{1}{hx});$$

$$bx_{i,j} := 0; \quad by_{i,j} := 0; \quad apx_{i,j} := ae_{i,j} + aw_{i,j}; \quad apy_{i,j} := an_{i,j} + as_{i,j};$$

Вдоль левой и правой границ выполняется условие теплоизоляции — плотность теплового потока при $x = 0$ и $x = xl$ равна нулю.

Вычисленные коэффициенты хранятся в памяти ПЭВМ.

Программа вычисления и начального приближения в соответствии с изложенным выше алгоритмом прогонки приведена на рис. 2.29. Результат ее работы — массив значений температуры tl для одномерного распространения теплоты.

Уточнение решения по алгоритму Зейделя реализовано программой, приведенной на рис. 2.30. Результатом работы этой программы является массив B , первый элемент которого — массив значений искомой температуры t , второй — фактическая точность

выхода из процесса итераций $\delta\delta$, третий — число $i = 1..n + 1, j = 1..m + 1$ приближений.

На рис. 2.31 и 2.32 показаны результаты решения вспомогательной и основной задач.

Нанесенные на графики изотермы — линии постоянной температуры — позволяют судить об асимметрии температурного поля в пластине, что приводит к возникновению дополнительных скручивающих усилий в конструкции. Поверхность нагрева деформируется, коробится. На практике температурное поле изменяется и во времени. Элементы конструкции то расширяются, то сжимаются. Со временем материал конструкции «устает», происходит усталостное разрушение поверхности нагрева.

Сравнение графиков показывает, что решение одномерной задачи дает большую асимметрию температурного поля, чем это имеет место в реальности, из-за распространения теплоты за счет теплопроводности в направлении оси x .

Рис. 2.29. Решение системы конечно-разностных уравнений. Метод прогонки

$\epsilon = 0.02$

$B := \delta\delta \leftarrow 10000$

$k \leftarrow 1$

while ($\delta\delta > \epsilon$)

for $i \in 0..n$

for $j \in 0..m$

$t_{i,j} \leftarrow tl_{i,j}$

for $i \in 0..n$

for $j \in 0..m$

$$tl_{i,j} \leftarrow \frac{1}{apx_{i,j} t_{i,j+1,j} + apy_{i,j} t_{i,j+1,j+1} + as_{i,j} t_{i,j-1,j} + aw_{i,j} t_{i,j-1,j+1} + bx_{i,j} t_{i,j-1,j} + by_{i,j} t_{i,j-1,j+1}} \left[\delta l_{i,j} + t_{i,j} \right]$$

$\delta\delta \leftarrow \max(\delta l)$

$k \leftarrow k + 1$

tl

$\delta\delta$

k

$t := B_1$

$B_0 = 0.018$

$B_1 = 2$

Рис. 2.30. Решение системы конечно-разностных уравнений. Метод Зейделя

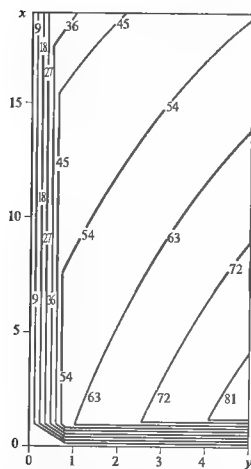


Рис. 2.31. Температурное поле в плоскости (одномерная задача, начальное приближение)

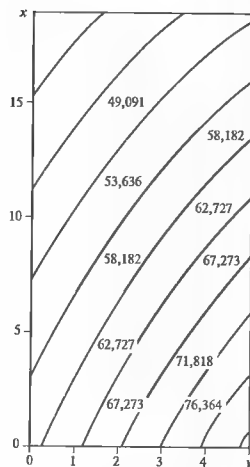


Рис. 2.32. Температурное поле в стенке при неравномерном подводе теплоты

2.10. Задачи с решениями

Задача 1. Температура¹ воздуха в аудитории $t_{ж1} = 20^\circ\text{C}$, а снаружи $t_{ж2} = -10^\circ\text{C}$. Стена здания выполнена из красного кирпича, $\delta = 650$ мм. Найдите тепловой поток Q через стену аудитории (стена без окон) площадью $F = 30$ м², если известно, что $\alpha_1 = 5$ Вт/(м²·К), а $\alpha_2 = 15$ Вт/(м²·К). Чему равны температуры на внутренней t_{c1} и наружной t_{c2} поверхностях стены?

Решение. Для красного кирпича $\lambda = 0,77$ Вт/(м·К). Плотность теплового потока через стену аудитории

¹ В теоретических формулах температура обозначается T . В задачах здесь и далее температура будет задаваться в градусах Цельсия и обозначаться t . Так как $T = t + 273,15$, то разность температур в Кельвинах и градусах Цельсия одна и та же. Если в формулах используется разность температур, которые выражены через T , то в них T можно заменить на t . Например равенство $q = \alpha(T_c - T_{ж})$ можно записать в виде $q = \alpha(t_c - t_{ж})$.

$$q = \frac{20 + 10}{1/5 + 0,65/0,77 + 1/15} = 27 \text{ Вт/м}^2.$$

Тепловой поток (тепловые потери) $Q = 27 \cdot 30 = 810$ Вт. Температуры поверхностей стены составляют:

$$t_{c1} = 20 - 27/5 = 14,6^\circ\text{C};$$

$$t_{c2} = -10 + 27/15 = -8,2^\circ\text{C}.$$

Ответ. $Q = 810$ Вт; $t_{c1} = 14,6^\circ\text{C}$; $t_{c2} = -8,2^\circ\text{C}$.

Задача 2. Чтобы уменьшить до заданного значения тепловые потери с поверхности промышленного теплообменника, решили закупить тепловую изоляцию с $\lambda'_{из} = 0,2$ Вт/(м·К). Оказалось, что на складе имеется изоляция, для которой $\lambda''_{из} = 0,1$ Вт/(м·К), но она на 50 % дороже первой. Больше или меньше (и насколько) придется заплатить за вторую изоляцию?

Решение. Количество закупаемого материала прямо пропорционально толщине изоляционного слоя. Тепловые потери будут равны заданному значению, если $\delta'_{из}/\lambda'_{из} = \delta''_{из}/\lambda''_{из}$. Толщина слоя изоляции во втором случае в два раза меньше, чем в первом. При этом стоимость второй изоляции составляет 75 % стоимости первой.

Ответ. За вторую изоляцию нужно будет заплатить на 25 % меньше.

Задача 3. Температура внешней металлической поверхности сушильной камеры $t_{c1} = 150^\circ\text{C}$. Сушильная камера изолирована матами из минеральной стекловаты. Толщина мата $\delta = 60$ мм. Температура воздуха в помещении $t_{ж2} = 15^\circ\text{C}$ и коэффициент теплоотдачи $\alpha_2 = 10$ Вт/(м²·К). Найдите температуру наружной поверхности тепловой изоляции t_{c2} .

Решение. Для минеральной стекловаты $\lambda = 0,052 + 0,00064t$. Для нахождения t_{c2} можно воспользоваться равенством

$$\bar{\lambda}/\delta (t_{c1} - t_{c2}) - \alpha_2(t_{c2} - t_{ж2}),$$

в котором $\bar{\lambda} = 0,052 + 0,00032(t_{c1} + t_{c2})$. Методом подбора находим $t_{c2} \approx 28^\circ\text{C}$.

Ответ. Температура $t_{c2} = 28^\circ\text{C}$.

Задача 4. Стенка промышленной нагревательной печи состоит из трех слоев. Первый слой — плотный шамотный кирпич толщиной $\delta_1 = 250$ мм; второй слой — легковесный шамотный кирпич толщиной $\delta_2 = 500$ мм. Максимальная температура в первом слое $t_{c1} = 800^\circ\text{C}$. Третий слой — тепловая изоляция (шлаковая вата). На внешней поверхности третьего слоя $t_{c4} = 50^\circ\text{C}$. Температура воздуха в помещении $t_{ж2} = 30^\circ\text{C}$, а $\alpha_2 = 10$ Вт/(м²·К). Чему равна толщина слоя шлаковой ваты δ_3 ?

Решение. Для плотного шамотного кирпича $\lambda_1 = 1,06 + 0,0008t$; для легковесного шамотного кирпича $\lambda_2 = 0,79 + 0,00035t$; для шлаковой ваты $\lambda_3 = 0,06 + 0,000145t$. Плотность теплового потока от поверхности изоляции к воздуху $q = 10(50 - 30) = 200 \text{ Вт/м}^2$.

Температуру t_{c2} в плоскости соприкосновения плотного и легковесного кирпичей найдем из уравнения

$$q = \bar{\lambda}_1 / \delta_1 (t_{c1} - t_{c2}),$$

где $\bar{\lambda}_1 = 1,06 + 0,0004(t_{c1} + t_{c2})$.

Решая уравнение, получаем $t_{c2} = 770 \text{ }^\circ\text{C}$.

Температуру t_{c3} находим из уравнения

$$q = \bar{\lambda}_2 / \delta_2 (t_{c2} - t_{c3}),$$

где $\bar{\lambda}_2 = 0,79 + 0,000175(t_{c2} + t_{c3})$.

Получаем: $t_{c3} = 674 \text{ }^\circ\text{C}$. Теперь имеем:

$$\bar{\lambda}_3 = 0,06 + 0,0000725(t_{c3} + t_{c4}) = 0,112 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)},$$

$$\delta_3 = \bar{\lambda}_3 / q (t_{c3} - t_{c4}) = 0,35 \text{ м} = 350 \text{ мм}.$$

Ответ. Толщина слоя шлаковой ваты $\delta_3 = 350 \text{ мм}$.

Задача 5. По стальной трубе ($d_2 = 50 \text{ мм}$, $\delta = 5 \text{ мм}$, $l = 30 \text{ м}$) протекает вода со скоростью $0,5 \text{ м/с}$. Температура воды на входе в трубу $t'_в = 200 \text{ }^\circ\text{C}$. Труба покрыта тепловой изоляцией с $\lambda_{из} = 0,1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ толщиной 100 мм . Температура окружающего воздуха $t_{ж2} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, а $\alpha_1 = 4000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Найдите температуру воды $t''_в$ на выходе из трубы.

Решение. Тепловой поток на единицу длины трубы

$$q_l = \frac{\pi \cdot 200}{\frac{1}{4000 \cdot 0,04} + \frac{1}{2 \cdot 55 \ln \frac{50}{40}} + \frac{1}{2 \cdot 0,1 \ln \frac{250}{50}} + \frac{1}{20 \cdot 0,25}} = 76,1 \text{ Вт/м}.$$

Тепловой поток от воды к воздуху $Q = 76,1 \cdot 30 = 2283 \text{ Вт}$. Расход воды $G = \rho v \pi d_2^2 / 4 = 863 \cdot 0,5 \pi \cdot 0,04^2 / 4 = 0,54 \text{ кг/с}$. Температура воды на выходе из трубы

$$t''_в = t'_в - Q / (G c_p) = 200 - 2283 / (0,54 \cdot 4500) = 199 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ответ. Температура $t''_в = 199 \text{ }^\circ\text{C}$.

Задача 6. В трубчатом теплообменнике средняя температура жидкости $\bar{t}_{ж1} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$, а $\bar{t}_{ж2} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициенты теплоотдачи $\alpha_1 = 2000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, $\alpha_2 = 100 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Наружный диаметр латунных труб равен 20 мм , толщина стенок составляет 1 мм . Найдите коэффициент теплопередачи $\bar{k}$, среднюю плотность теплового потока $\bar{q}$ от горячей жидкости к холодной, а также $\bar{t}_{c1}$ и $\bar{t}_{c2}$.

Решение. Для латуни $\lambda = 100 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Термическое сопротивление стейки трубы $R_\lambda = 10^{-3} / 100 = 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}$. Термическое сопротивление $R_{c1} = 1 / 2000 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}$, а $R_{c2} = 1 / 100 = 10^{-2} \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}$. Средний коэффициент теплопередачи

$$\bar{k} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-4} + 10^{-5} + 10^{-2}} = 95,1 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Находим:

$$\bar{q} = \bar{k} (\bar{t}_{ж1} - \bar{t}_{ж2}) = 95,1 (200 - 100) = 9510 \text{ Вт/м}^2;$$

$$\bar{t}_{c1} = \bar{t}_{ж1} - \frac{\bar{q}}{\alpha_1} = 200 - 9510 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 195,2 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$\bar{t}_{c2} = \bar{t}_{ж2} + \frac{\bar{q}}{\alpha_2} = 100 + 9510 \cdot 10^{-2} = 195,1 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ответ. $\bar{k} = 95,1 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$; $\bar{q} = 9510 \text{ Вт/м}^2$; $\bar{t}_{c1} = 195,2 \text{ }^\circ\text{C}$; $\bar{t}_{c2} = 195,1 \text{ }^\circ\text{C}$.

Задача 7. По трубе ($d_1 = 300 \text{ мм}$, $d_2 = 360 \text{ мм}$, $\lambda_1 = 42 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$) протекает теплоноситель, температура которого $t_{ж1} = 800 \text{ }^\circ\text{C}$. Труба покрыта слоем тепловой изоляции ($\lambda_{из} = 0,144 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\beta = 9,7 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$) толщиной 150 мм ; $d_3 = 660 \text{ мм}$. Коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = 1200 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Температура окружающего воздуха $t_{ж2} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Теплоотдача к воздуху происходит за счет свободной конвекции ($\alpha_{2конв} = 1,31 d_3^{-1/4} (t_{c3} - t_{ж2})^{1/4}$) и излучения ($q_{изл} = \epsilon \sigma_0 (T_{c3}^4 - T_{ж2}^4)$). Степень черноты поверхности изоляции $\epsilon = 0,9$. Найдите температуры стейки трубы t_{c1} , t_{c2} и изоляции t_{c3} , а также тепловые потери q_l , Вт/м.

Решение. Для нахождения q_l , t_{c2} , t_{c3} , α_2 и λ_2 составим систему из пяти уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_{02} \left[1 + \beta_2 \frac{(t_{c3} + t_{c2})}{2} \right]; \\ \alpha_2 &= 1,31 d_3^{-1/4} (t_{c3} - t_{ж2})^{1/4} + \frac{\epsilon \sigma_0 [(t_{c3} + 273)^4 - (t_{ж2} + 273)^4]}{t_{c3} - t_{ж2}}; \\ q_l &= \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}}; \\ t_{c3} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} \right); \\ t_{c2} &= t_{ж1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} \right). \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему с помощью компьютера, получаем:

$$\lambda_2 = 0,245 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad \alpha_2 = \alpha_{2\text{конв}} + \alpha_{2\text{изл}} = 11,928 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}; \\ q_l = 1775,8 \text{ Вт/м}; \quad t_{c2} = 797,2 \text{ }^\circ\text{C}; \quad t_{c3} = 96,8 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Далее находим $t_{c1} = 798,6 \text{ }^\circ\text{C}$. При этом $\alpha_{2\text{конв}} = 4,09 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, а $\alpha_{2\text{изл}} = 7,40 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Ответ. $t_{c1} = 798,6 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_{c2} = 797,6 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_{c3} = 88,5 \text{ }^\circ\text{C}$; $q_l = 1513,3 \text{ Вт/м}$.

Задача 8. По медной шине прямоугольного сечения $150 \times 5 \text{ мм}$ пропускается ток ($I = 1000 \text{ А}$). Шина находится в воздухе с температурой $t_{ж} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи $\alpha = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Для меди $\rho = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Найдите максимальную и минимальную температуры шины.

Решение. Обозначим через S площадь сечения, а через l длину шины. Ее электрическое сопротивление $R = \rho l/S$, и объем $V = Sl$. Тогда

$$q_v = \frac{I^2 R}{V} = \frac{I^2 \rho}{S^2} = \frac{1000^2 \cdot 2,3 \cdot 10^{-8}}{(150 \cdot 5 \cdot 10^{-6})^2} = 4,1 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^3.$$

На поверхности шины (минимальная температура)

$$t_c = t_{ж} + q_v \delta / \alpha = 20 + 4,1 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} / 10 = 30,25 \text{ }^\circ\text{C}.$$

В середине шины (максимальная температура)

$$t_0 = t_c + q_v \delta^2 / (2\lambda) = 30,25 + 0,00032 = 30,25032 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ответ. Температура во всех точках медной шины практически одинакова и равна $30,25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Задача 9. Найдите максимальную температуру в топливном (UO_2) сердечнике твэла (тепловыделяющего элемента) ядерного реактора. Сердечник радиусом $r_0 = 6 \text{ мм}$ помещен в оболочку из циркония ($\lambda = 20 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$) толщиной $\delta_1 = 1 \text{ мм}$. Между сердечником и оболочкой имеется зазор толщиной $\delta_2 = 0,3 \text{ мм}$, заполненный гелием. Для гелия при $t = 670 \text{ }^\circ\text{C}$ $\lambda = 0,35 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Оболочка снаружи омывается теплоносителем (водой), температура которого $t_{ж} = 250 \text{ }^\circ\text{C}$, а $\alpha = 30 \text{ кВт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Мощность источников теплоты $q_v = 2,8 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^3$.

Решение. Воспользуемся формулами, выведенными в § 2.4. На поверхности сердечника

$$q = \frac{q_v r_0}{2} = \frac{2,8 \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{2} = 8,4 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2.$$

Внешний радиус оболочки $r_{об} = r_0 + \delta_1 + \delta_2 = 7,3 \text{ мм}$. Средняя плотность теплового потока в оболочке q' и в гелиевом зазоре q'' составляют:

$$q' = 0,5 \cdot 8,4 \cdot 10^5 (6/7,3 + 6/6,3) = 7,45 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2;$$

$$q'' = 0,5 \cdot 8,4 \cdot 10^5 (1 + 6/6,3) = 8,20 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2.$$

Найдем перепады температуры в оболочке $\Delta t'$ и зазоре $\Delta t''$:

$$\Delta t' = 7,45 \cdot 10^5 \cdot \frac{10^{-3}}{20} = 37 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$\Delta t'' = 8,20 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{0,35} = 703 \text{ }^\circ\text{C}.$$

На внешней поверхности оболочки $q_c = 6,9 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$, а температура

$$t_c = 250 + \frac{6,9 \cdot 10^5}{3,0 \cdot 10^4} = 273 \text{ }^\circ\text{C}.$$

На поверхности топливного сердечника

$$t_{нов} = 273 + 37 + 702 = 1012 \text{ }^\circ\text{C} = 1285 \text{ К}.$$

Из табл. 2.1 при $T = 1285 \text{ К}$ находим $u_1 = 3634 \text{ Вт/м}$. На оси сердечника

$$u_0 = u_1 + \frac{q_v r_0^2}{4} = 6154 \text{ Вт/м}.$$

При полученном значении u_0 температура $T_0 = 2304 \text{ К}$ или $t_0 = 2031 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ответ. Максимальная температура на оси сердечника $t_0 = 2031^\circ\text{C}$, а на его поверхности $t_{\text{пог}} = 1012^\circ\text{C}$.

Задача 10. Температура протекающего по трубе горячего газа измеряется термопреобразователем, который помещен в чехол. Чехол представляет собой медную трубку с наружным диаметром $d = 3$ мм и толщиной $\delta = 0,5$ мм. Длина чехла $l = 70$ мм. Оцените погрешность измерения температуры газа, возникающую из-за отвода теплоты по стенке чехла к месту его крепления на трубе. Известно, что термопреобразователь дает значение $t_l = 300^\circ\text{C}$, а температура в месте крепления чехла $t_0 = 200^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи от потока воздуха к чехлу $\alpha = 50$ Вт/($\text{м}^2 \cdot \text{K}$).

Решение. Теплоотдачей от внутренней поверхности трубки к содержащемуся в ней воздуху пренебрегаем. Поэтому $u = \pi d$, $f = \pi d \delta$, а

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \pi d}{\lambda \pi d \delta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \delta}} = \sqrt{\frac{50}{390 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}} = 16 \text{ м}^{-1}.$$

Тогда $\text{ch}(ml) = \text{ch}(16 \cdot 0,07) = 1,7$. Используя формулу (2.110а), составленным уравнение

$$300 - t_{\text{ж}} = \frac{200 - t_{\text{ж}}}{1,7}.$$

Отсюда получаем $t_{\text{ж}} = 315^\circ\text{C}$.

Ответ. Погрешность измерения составляет 15°C .

Задача 11. Наружная поверхность стальных труб водяного экономайзера парового котла имеет круглые ребра диаметром $D_p = 58$ мм, расположенные с шагом $s = 4,8$ мм. Толщина ребер $\delta_p = 1,2$ мм, наружный диаметр труб $d_2 = 32$ мм, а толщина стенки $\delta = 5$ мм. Температура воды в трубах $t_{\text{ж1}} = 270^\circ\text{C}$, а температура дымовых газов $t_{\text{ж2}} = 450^\circ\text{C}$. Со стороны воды $\alpha_1 = 5200$ Вт/($\text{м}^2 \cdot \text{K}$), а со стороны газов $\alpha_2 = 85$ Вт/($\text{м}^2 \cdot \text{K}$).

Найдите тепловой поток, приходящийся на единицу длины труб экономайзера.

Решение. Определяем эквивалентную длину ребра:

$$l_{\text{экр}} = h(1 + 0,35 \ln(D_p/d_2)) = 0,5(0,058 - 0,032)(1 + 0,35 \ln(58/32)) = 0,021 \text{ м}.$$

Коэффициент эффективности ребра

$$E = \frac{\text{th}(ml_{\text{экр}})}{ml_{\text{экр}}} = \frac{\text{th}(53,2 \cdot 0,021)}{53,2 \cdot 0,021} = 0,81,$$

$$\text{где } m = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{\lambda \delta_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 85}{50 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}}} = 53,2 \text{ м}^{-1}.$$

Число ребер, расположенных на участке трубы длиной l , $n = l/s$. Площадь поверхности ребер на этом участке $F_p = 0,5\pi(D_p^2 - d_2^2)n = 0,765l$, а площадь иоребренной поверхности трубы $F_c = \pi d_2 l(1 - \delta_p/s) = 0,0754l$. Площадь ребристой поверхности трубы $F'_2 = F_p + F_c = 0,765l + 0,0754l = 0,84l$. Приведенный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_{2\text{пр}} = 85 \left(\frac{0,0754}{0,84} + \frac{0,765}{0,84} \cdot 0,81 \right) = 70,3 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{K)}.$$

Тепловой поток от дымовых газов к воде

$$Q = \frac{(t_{\text{ж2}} - t_{\text{ж1}})F_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{2\text{пр}} \frac{F_2}{F_2}}} = \frac{(450 - 270)\pi \cdot 0,032l}{\frac{1}{5200} + \frac{0,05}{50} + \frac{1}{70,3} \frac{\pi \cdot 0,032}{0,84}} = 6200l.$$

Тепловой поток, приходящийся на единицу длины трубы,

$$q_l = Q/l = 6200 \text{ Вт/м}.$$

Ответ. $q_l = 6200$ Вт/м.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

3.1. Предварительные замечания

Напомним, что нестационарная теплопроводность — это такой процесс переноса теплоты в теле, при котором температура изменяется с течением времени. Приведем несколько примеров встречающихся на практике нестационарных процессов теплопроводности.

Нагревание или охлаждение тел в среде с постоянной температурой (термообработка изделий, заготовок и продуктов питания, отжиг кирпича, производство стекла и др.) характеризуется скачкообразным изменением температуры среды, окружающей тело, причем самопроизвольный процесс распространения теплоты в теле происходит здесь до тех пор, пока температура во всех его точках не станет равной температуре среды.

Переход от одного стационарного температурного поля к другому стационарному вследствие изменения температуры окружающей среды наблюдается при переходных режимах работы тепломассообменных устройств, в частности, во время их пуска и останова.

Еще одним примером нестационарного процесса теплопроводности является периодическое изменение температуры в каждой точке тела из-за колебания температуры окружающей среды.

Во всех этих примерах для нахождения нестационарного температурного поля в теле служит дифференциальное уравнение теплопроводности, а отличие одного случая от другого характеризуется начальными и граничными условиями. Для решения задачи используются методы решений уравнений с частными производными, причем сложность решения зависит от геометрических, физических, начальных и граничных условий. Эти методы (метод Фурье, метод собственных функций, метод Дюамеля, метод преобразования Лапласа и др.) подробно рассматриваются в [5, 13, 23].

Можно отметить, что проще всего решаются задачи нахождения одномерного температурного поля (безграничная пластина, бесконечно длинный цилиндр, шар) при постоянных физических свойствах, постоянном коэффициенте теплоотдачи и отсутствии теплообмена излучением. Именно такие задачи будут рассматриваться в этой главе. Результаты, которые при этом будут получены, с одной стороны, имеют самостоятельное практическое значение, а с другой — позволяют достаточно просто выяснить основные закономерности, присущие также нестационарным процессам теплопроводности в телах более сложной геометрической формы.

В этой главе будут приведены решения указанных выше простых задач методом Фурье. Кроме того, здесь также будут кратко изложены численные методы решения задач нестационарной теплопроводности и их реализации на компьютерах.

3.2. Температурное поле в процессе охлаждения (нагрева) пластины

Постановка задачи. Пусть имеется тонкая пластина толщиной 2δ (рис. 3.1). Термин «тонкая пластина» означает, что ее толщина значительно меньше двух других ее измерений. Во всех точках пластины температура одна и та же и равна T_0 . В момент времени, принимаемый за начальный, пластина помещается в жидкость с температурой $T_{ж}$, отличной от T_0 . Если $T_{ж} < T_0$, пластина будет охлаждаться (если $T_{ж} > T_0$ — нагреваться) за счет теплообмена между пластиной и жидкостью. Примем, что физические свойства пластины (λ , a), коэффициент теплоотдачи α и $T_{ж}$ постоянны. Требуется найти температуру как функцию координаты x и времени τ .

Обратим внимание на то, что как начальное, так и граничные условия справедливы для симметричных относительно середины (оси) пластины областей. Значит решение должно быть симметричной функцией, поэтому достаточно рассмотреть решение только в области $0 \leq x \leq \delta$. Симметрия температурного поля имеет следствием равенство нулю производной температуры по x на оси ($x = 0$). При $x = \delta$ задано граничное условие третьего рода.

Таким образом, дифференциальное уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия запишем так:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (3.1)$$

$$T|_{\tau=0} = T_0; \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (\tau > 0); \quad (3.3)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\delta} = \alpha(T|_{x=\delta} - T_{ж}) \quad (\tau > 0). \quad (3.4)$$

Чтобы сократить число постоянных в нашей задаче, введем «избыточную» температуру $\theta = T - T_{ж}$ и заменим T на θ в (3.1)–(3.4). Тогда с учетом того, что $\theta_0 = T_0 - T_{ж}$ будем иметь

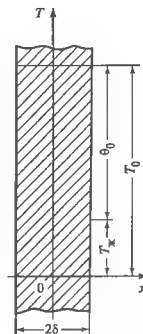


Рис. 3.1. К постановке задачи при рассмотрении нестационарной теплопроводности пластины

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \quad (3.5)$$

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_0; \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (3.7)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\delta} = \alpha \theta|_{x=\delta}. \quad (3.8)$$

Метод Фурье. Сформулированную задачу можно решить методом Фурье. Этот метод называется также методом разделения переменных. Сущность его состоит в том, что частные решения отыскиваются в виде произведений двух функций, каждая из которых зависит от одного аргумента. Общее решение находится в виде суммы этих решений. Произвольные постоянные, появляющиеся в ходе решения, определяются из начального и граничных условий. Представление общего решения в виде суммы частных вытекает из линейности и однородности самого уравнения и граничных условий. При этом, если некоторые функции удовлетворяют уравнению (3.5) и условиям (3.7) и (3.8), то и любая их линейная комбинация также удовлетворяет им.

Отметим, что в нашей задаче выражения (3.5), (3.7) и (3.8) являются линейными ($a = \text{const}$, $\lambda/\alpha = \text{const}$) и однородными. Последнее легко обнаружить, если записать (3.7) и (3.8) в виде

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta = 0.$$

Решение задачи методом Фурье. Пусть $\psi = \psi(x)$ — функция только координаты, а $\varphi = \varphi(\tau)$ — функция только времени. В соответствии с методом Фурье

$$\theta = \psi(x)\varphi(\tau). \quad (3.9)$$

Если функция θ является решением уравнения (3.5), то в результате ее подстановки в это уравнение получим тождество

$$\varphi' \psi = a \varphi \psi''.$$

Разделим переменные в этом тождестве:

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi}. \quad (3.10)$$

Выражения, стоящие в обеих частях (3.10), не зависят ни от x , ни от τ . Действительно, левая часть не зависит от x , а так как это равенство явля-

ется тождеством, то и правая часть его не может зависеть от x . Правая часть равенства не зависит от τ , следовательно, и левая также не зависит от τ . Обе части равенства равны одному и тому же постоянному числу. Поэтому можно записать

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi} = -k^2, \quad (3.11)$$

причем знак «минус», так же как и показатель степени (квадрат), постоянной k взяты для удобства дальнейшей записи.

Из (3.11) следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\varphi' + ak^2\varphi = 0; \quad (3.12)$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0. \quad (3.13)$$

Чтобы записать решение (3.13), составим характеристическое уравнение

$$r^2 + k^2 = 0,$$

откуда $r_1 = ik$, $r_2 = -ik$. Так как корни мнимые,

$$\psi = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (3.14)$$

где A и B — две произвольные постоянные.

Из граничного условия (3.8) получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\text{ctg } \epsilon = \epsilon / Bi, \quad (3.15)$$

где $\epsilon = k\delta$; Bi — число Био, представляющее собой безразмерный комплекс (см. § 2.5);

$$Bi = \alpha \delta / \lambda. \quad (3.16)$$

Найти корни уравнения (3.15) можно одним из численных методов, известных в математике. Выше (см. рис. 2.16) показан графический способ нахождения корней этого уравнения. Видно, что (3.15) имеет бесконечное множество корней, которые могут быть расположены в виде возрастающей последовательности

$$\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_n < \dots$$

Значения первых шести корней приведены в табл. 3.1.

Корни ϵ_n называются собственными числами; каждому собственному числу ϵ_n соответствует собственная функция ψ_n , которую можно записать в виде

$$\psi_n = A_n \cos(\epsilon_n X), \quad (3.17)$$

где $\epsilon_n = k_n \delta$; $X = x/\delta$ — безразмерная координата.

Таблица 3.1. Корни характеристического уравнения $\text{ctg } \epsilon = (1/\text{Bi})\epsilon$

Bi	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
0	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	16,9519
60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

Определим теперь функции φ , соответствующие найденным значениям ϵ (или k). Уравнение (3.12) для n -й функции запишем в виде

$$\varphi_n'' + \frac{a}{\delta^2} \epsilon_n^2 \varphi_n = 0. \quad (3.18)$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно представить в виде

$$\frac{d\varphi_n}{\varphi_n} = -\frac{a}{\delta^2} \epsilon_n^2 d\tau. \quad (3.19)$$

Введем число Фурье (безразмерное время):

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2}. \quad (3.20)$$

Тогда, интегрируя (3.19), получаем

$$\varphi_n = C_n e^{-\frac{a}{\delta^2} \epsilon_n^2 \text{Fo}}. \quad (3.21)$$

Таким образом, частные решения нашей задачи найдены, а общее имеет вид

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n' \cos(\epsilon_n X) e^{-\frac{a}{\delta^2} \epsilon_n^2 \text{Fo}}, \quad (3.22)$$

где $D_n' = A_n C_n$.

Из начального условия следует, что

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n' \cos(\epsilon_n X). \quad (3.23)$$

Для нахождения коэффициентов D_n' умножим обе части (3.23) на $\cos(\epsilon_m X)$ и проинтегрируем от 0 до 1. Можно доказать, что

$$\int_0^1 \cos(\epsilon_n X) \cos(\epsilon_m X) dX = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ > 0 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Тогда после указанного интегрирования

$$D_n' = \frac{\int_0^1 \cos(\epsilon_n X) dX}{\int_0^1 \cos^2(\epsilon_n X) dX} = \frac{2\theta_0 \sin(\epsilon_n X)}{\epsilon_n + \sin \epsilon_n \cos \epsilon_n}.$$

Введем безразмерную температуру

$$\Theta = \theta/\theta_0. \quad (3.24)$$

Окончательное решение задачи будет иметь вид

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\epsilon_n X) \exp(-\epsilon_n^2 Fo), \quad (3.25)$$

где коэффициенты

$$D_n = \frac{2 \sin \epsilon_n}{\epsilon_n + \sin \epsilon_n \cos \epsilon_n}. \quad (3.26)$$

Прежде всего отметим, что решение нашей задачи оказалось представле-
ленным в безразмерном виде. И это не случайно. Дело в том, что решение
любой задачи, соответствующей какому-либо физическому явлению, все-
гда можно преобразовать так, чтобы оно было безразмерным. Объясняется
это тем, что физические явления от выбора системы единиц не зависят, по-
этому если в математическом описании явлений есть размерные величины,
то они обязательно должны сгруппироваться в безразмерные комплексы.

Наша задача характеризуется следующими безразмерными величина-
ми: Θ , X , Fo , Bi . При этом Θ — зависимая переменная, X , Fo — незави-
симые переменные, Bi — постоянная величина (параметр задачи). Функцио-
нальную зависимость между ними можно записать так:

$$\Theta = F(X, Fo, Bi). \quad (3.27)$$

Зависимость (3.27) выведена при анализе решения (3.25). Однако то же
самое можно было бы сделать и не решая задачу, а лишь представив ее ма-
тематическую постановку в безразмерном виде. Легко доказать, что исход-
ные уравнения нашей задачи тождественны следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}; \quad (3.28)$$

$$\Theta|_{Fo=0} = 1; \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{X=0} = 0 \quad (Fo > 0); \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{X=1} = -Bi\Theta|_{X=1} \quad (Fo > 0). \quad (3.31)$$

Для доказательства надо подставить в эти уравнения безразмерные ве-
личины в том виде, как они определены выше. При этом мы придем
к (3.5)–(3.8). Из рассмотрения (3.28)–(3.31) непосредственно следует
(3.27). Решение, представленное в виде зависимости между безразмерны-
ми величинами, более удобно для анализа, чем решение, не преобразова-

ное к безразмерному виду. Кроме того, если бы мы решали нашу задачу
численно, то нам пришлось бы задавать (и просчитывать) следующие пара-
метры: a , δ , θ_0 , λ/a . В представленной задаче существует всего один без-
размерный параметр: число Био. Следовательно, возникает принципиально
важный вывод о целесообразности предварительного преобразования ма-
тематического описания уравнений и условий однозначности физического
процесса к безразмерному виду. Особое значение это имеет для тех физи-
ческих задач, найти решение которых аналитическими методами затрудни-
тельно. Отмеченное обстоятельство мы будем иметь в виду в § 4.7, где бу-
дет также дан метод приведения математического описания процесса
к безразмерному виду.

Рассмотрим теперь частные случаи решения (3.25).

Малые числа Био ($Bi \rightarrow 0$). В этом случае (см. рис. 2.16) $\epsilon_1 \rightarrow 0$, $\epsilon_2 \rightarrow \pi$, ..., $\epsilon_n \rightarrow (n-1)\pi$. Записав D_n в виде

$$D_n = \frac{2 \frac{\sin \epsilon_n}{\epsilon_n}}{1 + \frac{\sin \epsilon_n \cos \epsilon_n}{\epsilon_n}},$$

убедимся, что $D_1 \rightarrow 1$, $D_2 \rightarrow 0$, ..., $D_n \rightarrow 0$. Из (3.15) следует, что при $\epsilon_1 \rightarrow 0$
 $\epsilon_1^2 = Bi$ и, так как $\cos(\epsilon_1^2 X) \rightarrow 1$, для первого частного случая приближен-
ное решение нашей задачи будет иметь вид

$$\Theta = e^{-BiFo}. \quad (3.32)$$

Анализ показывает, что условие $Bi \rightarrow 0$ практически выполняется, если
 $Bi < 0,1$.

Характерная особенность первого частного случая: температура не за-
висит от координат, а является только функцией времени (рис. 3.2).

Большие числа Био ($Bi \rightarrow \infty$). В этом случае

$$\epsilon_1 = \frac{\pi}{2}, \epsilon_2 = \frac{3\pi}{2}, \dots, \epsilon_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \dots$$

Коэффициенты D_n при этом определяются по формуле

$$D_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Характерная особенность второго частного случая: безразмерная темпе-
ратура на поверхности пластины $\Theta|_{X=1} = 0$, и, следовательно, $T|_{x=\delta} = T_{ж}$.
Этот случай на практике соответствует высокointенсивному охлаждению
тела ($\alpha \rightarrow \infty$). При $\alpha \rightarrow \infty$ равенство температур поверхности пластины

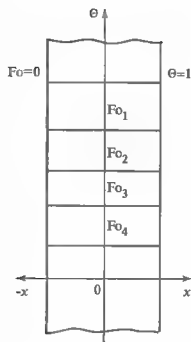


Рис. 3.2. Температурное поле при $Bi \rightarrow 0$

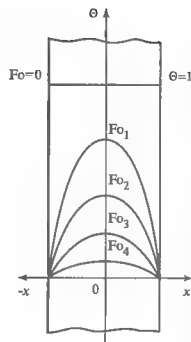


Рис. 3.3. Температурное поле при $Bi \rightarrow \infty$

и жидкости следует также из закона Ньютона—Рихмана. Если в решении отбросить все члены ряда, кроме первого, то

$$\Theta = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi X}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} Fo\right),$$

откуда следует, что температурные кривые в такие моменты времени, когда $Fo \geq 0,3$ (почему — об этом будет сказано ниже), описываются законом косинуса (рис. 3.3). Можно показать, что условие $Bi \rightarrow \infty$ практически выполняется, когда $Bi > 100$.

Из граничного условия (3.31) следует, что

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{X=1} = \frac{1}{Bi}.$$

В то же время

$$-\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Theta|_{X=1}}{X_0}.$$

Учитывая геометрический смысл производной, получаем

$$X_0 \sim 1/Bi.$$

Отсюда следует важное свойство касательных, проведенных к температурным кривым в точке $X = 1$. Все касательные пересекают ось X в одной

точке A (см. рис. 2.19), координата которой равна $X_0 + 1$. Поскольку касательные как бы «направляют» температурные кривые, эту точку можно назвать направляющей. Очевидно, что рассмотренные выше частные случаи соответствуют $X_0 \rightarrow \infty$ и $X_0 \rightarrow 0$.

Таким образом, анализ показывает, что от числа Био существенно зависит вид температурного поля. Число Био играет роль безразмерного параметра, определяющего характер распределения температуры в теле в процессе его охлаждения или нагревания. Этот вывод мы получили из рассмотрения нестационарной теплопроводности пластины, но он справедлив и для тела произвольной формы. Число Био можно трактовать как отношение внутреннего термического сопротивления к внешнему, поскольку можно записать

$$\Pi = \frac{\delta/\lambda}{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тогда пластину, которая охлаждается при $Bi \rightarrow 0$, можно назвать «термически тонкой», а при $Bi \rightarrow \infty$ — «термически толстой».

Вернемся к (3.25). Сколько же членов ряда надо брать для вычисления суммы ряда при нахождении Θ ? Ответ на этот вопрос зависит от значения Fo . Анализ показывает, что при $Fo \geq 0,3$ ряд очень быстро сходится и первый член его много больше суммы всех остальных. При этом

$$\Theta = D_1 \cos(\epsilon_1 X) \exp(-\epsilon_1^2 Fo). \quad (3.33)$$

Как видно из (3.33), температура Θ во всех точках тела изменяется с течением времени по закону экспоненты.

Если $Fo < 0,3$, приходится учитывать и другие члены ряда, причем их число тем больше, чем меньше Fo . При малых числах Фурье ($Fo \ll 1$), т.е. в начальный период охлаждения пластины, изменение температуры происходит только в пределах тонкого поверхностного слоя δ_T , а в остальной части пластины $T = T_0$. При этом толщина пластины δ при условии, что $\delta \gg \delta_T$, не играет никакой роли в процессе охлаждения, а вместе с тем должен измениться вид зависимости (3.27), так как физически решение не должно зависеть от δ , а X , Fo , Bi зависят от δ . Переменные X и Fo можно скомбинировать таким образом, чтобы параметр δ исчез. Такой комбинацией будет

$$\eta = X/\sqrt{Fo} = x/\sqrt{at}. \quad (3.34)$$

Более детально начальный период охлаждения пластины будет проанализирован ниже (см. § 3.3).

Определим количество теплоты, передаваемое от пластины к жидкости во время ее охлаждения. Решить эту задачу можно, подсчитав изменение

энтальпии пластины за данный отрезок времени. За все время охлаждения пластины от $\tau = 0$ до $\tau = \infty$ количество теплоты, переданное жидкости,

$$\bar{Q}_{0-\infty} = mc_p(T_0 - T_{ж}), \quad (3.35)$$

где m — масса пластины.

Если $\bar{T}$ — средняя температура пластины в момент времени τ , то за отрезок времени $[\tau, \infty]$ переданное количество теплоты

$$\bar{Q}_{\tau-\infty} = mc_p(\bar{T} - T_{ж}). \quad (3.36)$$

За данный отрезок времени $[0, \tau]$

$$\bar{Q}_{0-\tau} = \bar{Q}_{0-\infty} - \bar{Q}_{\tau-\infty} = \bar{Q}_{0-\infty}(1 - \bar{\Theta}), \quad (3.37)$$

где $\bar{\Theta}$ — средняя безразмерная температура пластины в момент времени τ , которая, например при $Fo \geq 0,3$ находится путем интегрирования (3.25), т.е.

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{0} \int_0^1 dX = \frac{D_1}{\epsilon_1} \sin \epsilon_1 e^{-\epsilon_1^2 Fo}. \quad (3.38)$$

Отметим, что формула (3.37) справедлива и для процесса нагревания с той лишь разницей, что при этом в скобках (3.35) надо поменять знаки. Приведенный способ расчета количества теплоты справедлив для тел любой геометрической формы.

3.3. Температурное поле в процессе охлаждения (нагревания) бесконечно длинного цилиндра, шара и некоторых тел конечных размеров

Бесконечно длинный цилиндр. Постановка задачи для бесконечно длинного цилиндра аналогична предыдущей, только вместо δ возьмем радиус цилиндра r_0 . Дифференциальное уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия запишем в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right); \quad (3.39)$$

$$\Theta|_{Fo=0} = 1; \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=0} = 0 \quad (Fo > 0); \quad (3.41)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=1} = -Bi\Theta|_{R=1} \quad (Fo > 0). \quad (3.42)$$

В этих уравнениях

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_{ж}}{T_0 - T_{ж}}; \quad R = \frac{r}{r_0}; \quad Fo = \frac{\alpha \tau}{r_0^2}; \quad Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda}.$$

Решая эту задачу методом Фурье, получаем

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\epsilon_n R) e^{-\epsilon_n^2 Fo}. \quad (3.43)$$

В (3.43) $J_0(\epsilon_n R)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Числа ϵ_n являются корнями уравнения

$$\frac{\epsilon}{Bi} = \frac{J_0(\epsilon)}{J_1(\epsilon)}, \quad (3.44)$$

где $J_1(\epsilon)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка, причем

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (3.45)$$

Вид функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ показан на рис. 3.4.

Шесть первых корней уравнения (3.44) приведены в табл. 3.2.

Коэффициенты D_n определяются по формуле

$$D_n = \frac{2J_1(\epsilon_n)}{\epsilon_n(J_0^2(\epsilon_n) + J_1^2(\epsilon_n))}. \quad (3.46)$$

При $Fo \geq 0,25$ решение упрощается аналогично случаю, рассмотренному для пластины. Тогда

$$\Theta = D_1 J_0(\epsilon_1 R) e^{-\epsilon_1^2 Fo}. \quad (3.47)$$

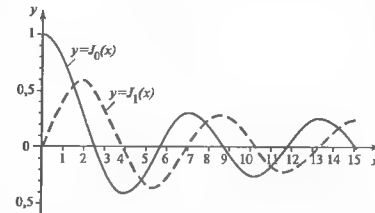


Рис. 3.4. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$

Таблица 3.2. Корни характеристического уравнения $\frac{J_0(\epsilon)}{J_1(\epsilon)} = \frac{1}{Bi\epsilon}$

Bi	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
0,0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,0	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,0	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Таблица 3.3. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	2,3	0,0555	0,5399
0,1	0,9975	0,0499	2,4	0,0025	0,5202
0,2	0,9900	0,0995	2,5	0,0484	0,4971
0,3	0,9776	0,1483	2,6	-0,0968	0,4708
0,4	0,9604	0,1960	2,7	0,1424	0,4416
0,5	0,9385	0,2423	2,8	-0,1850	0,4097
0,6	0,9120	0,2867	2,9	0,2243	0,3754
0,7	0,8812	0,3290	3,0	-0,2600	0,3391
0,8	0,8463	0,3688	3,1	0,2921	0,3009
0,9	0,8075	0,4059	3,2	0,3202	0,2613
1,0	0,7652	0,4400	3,3	-0,3440	0,2207
1,1	0,7196	0,4709	3,4	-0,3643	0,1792
1,2	0,6711	0,4983	3,5	0,3801	0,1374
1,3	0,6201	0,5220	3,6	-0,3918	0,0955
1,4	0,5669	0,5419	3,7	-0,3992	0,0538
1,5	0,5118	0,5579	3,8	0,4026	0,0128
1,6	0,4554	0,5699	3,9	0,4018	-0,0272
1,7	0,3980	0,5778	4,0	-0,3971	0,0660
1,8	0,3400	0,5815	4,1	0,3887	-0,1033
1,9	0,2818	0,5812	4,2	-0,3766	-0,1386
2,0	0,2239	0,5767	4,3	0,3610	0,1719
2,1	0,1666	0,5683	4,4	-0,3423	-0,2028
2,2	0,1104	0,5560	4,5	0,3205	-0,2311

В частном случае $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$)

$$\Theta = e^{-2BiFo} \quad (3.48)$$

При $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$)

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\epsilon_n J_1(\epsilon_n)} J_0(\epsilon_n R) e^{-\epsilon_n^2 Fo} \quad (3.49)$$

Для вычисления температуры в цилиндре следует воспользоваться таблицами функций Бесселя (табл. 3.3).

Шар. Постановка задачи для шара такая же, как и для пластины и цилиндра. Характерным размером при этом является радиус шара r_0 . В безразмерных переменных отыскание температурного поля сводится к решению задачи:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R}; \quad (3.50)$$

$$\Theta|_{Fo=0} = 1; \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=0} = 0 \quad (Fo > 0); \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=1} = -Bi\Theta|_{R=1} \quad (Fo > 0). \quad (3.53)$$

В этих уравнениях

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_{ж}}{T_0 - T_{ж}}; \quad R = \frac{r}{r_0}; \quad Fo = \frac{a\tau}{r_0^2}; \quad Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda}.$$

Решая эту задачу методом Фурье, получаем

$$\Theta = \sum_{n=1}^n D_n \frac{\sin(\epsilon_n R)}{\epsilon_n R} e^{-\epsilon_n^2 Fo}. \quad (3.54)$$

Значения ϵ_n являются корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \epsilon = -\frac{\epsilon}{Bi - 1}. \quad (3.55)$$

Первые шесть корней уравнения (3.55) приведены в табл. 3.4.

Коэффициенты D_n определяются по формуле

$$D_n = \frac{2(\sin \epsilon_n - \epsilon_n \cos \epsilon_n)}{\epsilon_n - \sin \epsilon_n \cos \epsilon_n}. \quad (3.56)$$

При $Fo \geq 0,25$ имеем

$$\Theta = \frac{2(\sin \epsilon_1 - \epsilon_1 \cos \epsilon_1)}{\epsilon_1 - \sin \epsilon_1 \cos \epsilon_1} \frac{\sin(\epsilon_1 R)}{\epsilon_1 R} e^{-\epsilon_1^2 Fo}. \quad (3.57)$$

При $Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$) приближенная формула для температуры имеет вид

$$\Theta = e^{-3BiFo}. \quad (3.58)$$

При $Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$)

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi R} \sin(n\pi R) e^{-(n\pi)^2 Fo}. \quad (3.59)$$

Таблица 3.4. Корни характеристического уравнения $\operatorname{tg} \epsilon = -\epsilon/(Bi - 1)$

Bi	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
0,0	0,0000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
0,005	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
0,03	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
0,05	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
0,07	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
0,09	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
0,10	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
0,15	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
0,20	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
0,30	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
0,40	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
0,50	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
0,60	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
0,70	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
0,80	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
0,90	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
1,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
1,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
1,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
1,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
1,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
1,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
1,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
1,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
1,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
1,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
2,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
2,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
3,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
4,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490

Окончание табл. 3.4

Bi	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
5,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
6,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
7,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
8,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6567
9,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
10,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
11,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
16,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
21,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
31,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
41,0	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
51,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
61,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
81,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
101,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

3.4. Нестационарное температурное поле в полуограниченном массиве

Начальный этап охлаждения или нагревания тел. Рассмотрим особенности процесса нестационарной теплопроводности пластины (см. § 3.2) на начальном этапе ее охлаждения или нагревания. Решение этой задачи методом Фурье, как нам известно, представляется в виде бесконечного ряда частных решений. При очень малых числах Fo и больших числах Bi ряд сходится настолько медленно, что нахождение температурного поля становится практически не реализуемой задачей. Физически это объясняется тем, что толщина пластины (или ее половины), которая используется во всех частных решениях, в самом начале охлаждения не влияет на изменение температуры в поверхностном слое. Можно было бы рассмотреть частный случай решения для поверхностного (пограничного) слоя малой толщины, однако методом Фурье этого сделать нельзя. Получить физически обоснованное решение можно, если вместо пластины рассматривать полуограниченный массив. Рассмотрим решение задачи об охлаждении такого массива.

Пусть имеется полуограниченный массив, температура T_0 которого во всех точках постоянна. В начальный момент времени за счет интенсив-

ного охлаждения температура его поверхности скачкообразно уменьшается до T_c , которая в дальнейшем сохраняется постоянной. Дифференциальное уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия в нашем случае при условии, что физические свойства материала массива (λ , ρ , c_p) постоянны, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \\ \theta|_{\tau=0} &= \theta_0, \quad 0 \leq x < \infty; \\ \theta|_{x=0} &= 0, \quad \tau > 0; \\ \theta|_{x \rightarrow \infty} &= \theta_0, \quad \tau > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Здесь $\theta = T - T_c$, $\theta_0 = T_0 - T_c$. Математическая формулировка нашей задачи не содержит ни одного характерного размера. Если в качестве него взять произвольно некоторый отрезок длины l_0 и ввести безразмерные температуру $\Theta = \theta/\theta_0$, координату $X = x/l_0$ и время $Go = a\tau/l_0^2$, то решение задачи сведется к функциональной зависимости

$$\Theta \sim F(X, Go). \quad (3.61)$$

Однако физически температурное поле не должно зависеть от произвольно выбираемых величин. Следовательно, в решение (3.61) X и Go должны входить в виде такой комбинации, чтобы размер сократился. Такой комбинацией будет безразмерная переменная η :

$$\eta = 2 \frac{X}{\sqrt{Go}} = 2 \frac{x}{\sqrt{a\tau}}, \quad (3.62)$$

где двойка введена ради удобства при дальнейших преобразованиях математического описания задачи.

Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\eta}{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{4a\tau} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подставляя последние соотношения в (3.60), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0. \quad (3.63)$$

Граничные условия для функции $\theta(\eta)$ будут следующими:

$$\theta|_{\eta=0} = 0; \quad \theta|_{\eta \rightarrow \infty} = \theta_0. \quad (3.64)$$

Уравнение (3.63) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\eta} \left(\ln \frac{d\theta}{d\eta} \right) = -2\eta.$$

Откуда следует, что

$$d\theta = C e^{-\eta^2} d\eta.$$

Интегрируя последнее равенство на отрезке $[0, \eta]$ и учитывая первое граничное условие в (3.64), получаем

$$\theta = C \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Таблица 3.5. Значения интеграла вероятности $\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$

η	$\operatorname{erf} \eta$	η	$\operatorname{erf} \eta$
0,00	0,00000	1,05	0,86244
0,05	0,05637	1,10	0,88020
0,10	0,11246	1,15	0,89612
0,15	0,16800	1,20	0,91031
0,20	0,22270	1,25	0,92290
0,25	0,27633	1,30	0,93401
0,30	0,32863	1,35	0,94376
0,35	0,37938	1,40	0,95228
0,40	0,42839	1,45	0,95970
0,45	0,47548	1,50	0,96610
0,50	0,52050	1,55	0,97162
0,55	0,56332	1,60	0,97635
0,60	0,60386	1,65	0,98038
0,65	0,64203	1,70	0,98379
0,70	0,67780	1,75	0,98667
0,75	0,71116	1,80	0,98909
0,80	0,74210	1,85	0,99111
0,85	0,77067	1,90	0,99279
0,90	0,79691	1,95	0,99418
0,95	0,82089	2,00	0,99532
1,00	0,84270		

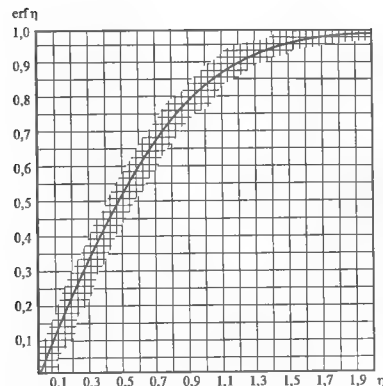


Рис. 3.5. График функции $\operatorname{erf} \eta$

Постоянную C находим из второго граничного условия (3.64):

$$C = \theta_0 \left(\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \right)^{-1}. \quad (3.65)$$

Интеграл в (3.65) определяется по таблице. Он равен $\sqrt{\pi}/2$. Следовательно,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \operatorname{erf} \eta, \quad (3.66)$$

где $\operatorname{erf} \eta$ — табличная функция (табл. 3.5), называемая интегралом вероятности (рис. 3.5).

Пусть $\delta(\tau)$ — область поверхностного (пограничного) слоя, в пределах которой температура θ изменяется от 0 до $0,99\theta_0$. Так как $\operatorname{erf} \eta = 0,99$ при $\eta \approx 1,85$, то с учетом (3.66) получаем

$$\delta = 3,7\sqrt{a\tau}. \quad (3.67)$$

Распределение температуры в пограничном слое для различных моментов времени показано на рис. 3.6.

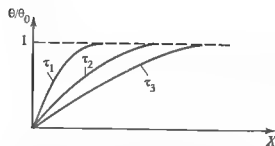


Рис. 3.6. Температурное поле в полубесконечном массиве в различные моменты времени при скачкообразном изменении температуры на его поверхности

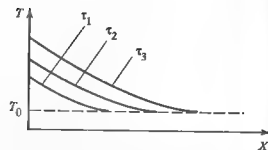


Рис. 3.7. Температурное поле в полубесконечном массиве при постоянной плотности теплового потока

Важным является тот факт, что рассмотренный нами анализ начального этапа охлаждения (нагрева) пластины можно распространить на тело любой формы при условии, что толщина теплового пограничного слоя много меньше радиуса кривизны поверхности этого тела.

Если при $\tau = 0$ скачком изменяется плотность теплового потока на поверхности тела, а при $\tau > 0$ $q = \text{const}$, то $\delta \approx 3,2\sqrt{a\tau}$. При этом распределение температуры будет иметь вид, показанный на рис. 3.7.

При скачкообразном изменении температуры жидкости температура поверхности T_c , как показывает теоретический расчет, будет подчиняться закону

$$T_c - T_{ж} = (T_0 - T_{ж})(1 - \text{erf } Fo')e^{Fo'}, \quad (3.68)$$

где $Fo' = \alpha\tau/l_0^2$; здесь $l_0 = \lambda/\alpha$.

3.5. Охлаждение (нагревание) тел, имеющих форму параллелепипеда или цилиндра конечной длины

Чтобы найти температуру в произвольной точке M (ее координаты x, y, z) параллелепипеда (рис. 3.8) в произвольный момент времени, поступают следующим образом. Сначала рассматривают безграничную пластину толщиной $2\delta_x$. Вычисляют $Bi_x = \alpha\delta_x/\lambda$ и $Fo_x = \alpha\tau/\delta_x^2$. Принимают $X = x/\delta_x$, где x — координата заданной точки M , и при полученных значениях Fo_x и Bi_x находят безразмерную температуру Θ_x в этой точке по формулам, приведенным выше (см. § 3.2). Затем рассматривают безграничную пластину толщиной $2\delta_y$. Вычисляют $Bi_y = \alpha\delta_y/\lambda$, $Fo_y = \alpha\tau/\delta_y^2$ и $Y = y/\delta_y$. Аналогично предыдущему случаю находят Θ_y . Наконец, рассматривают безгра-

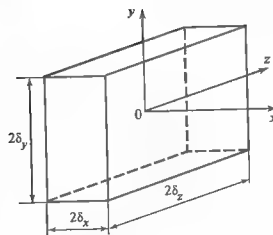
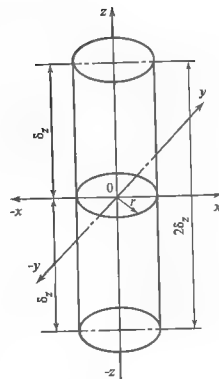


Рис. 3.8. К расчету температурного поля в параллелепипеде

→
Рис. 3.9. К расчету температурного поля в цилиндре конечной длины



ничную пластину толщиной $2\delta_z$. Вычисляют $Bi_z = \alpha\delta_z/\lambda$, $Fo_z = \alpha\tau/\delta_z^2$, $Z = z/\delta_z$ и Θ_z . Искомую безразмерную температуру Θ в точке M находят как произведение $\Theta = \Theta_x\Theta_y\Theta_z$. Температура, имеющая размерность, определяется по формуле

$$T(x, y, z, \tau) = T_{ж} + \Theta(T_0 - T_{ж}),$$

где T_0 — температура параллелепипеда в начальный момент времени; $T_{ж}$ — температура жидкости, в которой происходит процесс охлаждения или нагревания.

Если тело имеет форму цилиндра конечной длины (рис. 3.9), то сначала рассматривают безграничную пластину толщиной $2\delta_z$ ($2\delta_z = l$ — длина цилиндра), вычисляют $Bi_z = \alpha\delta_z/\lambda$, $Fo_z = \alpha\tau/\delta_z^2$. Полагают $Z = z/\delta_z$, где z — координата заданной точки, и вычисляют Θ_z по формулам, приведенным в § 3.2. Затем рассматривают бесконечно длинный цилиндр радиусом r_0 , вычисляют $Bi_r = \alpha r_0/\lambda$ и $Fo_r = \alpha\tau/r_0^2$. Полагают $R = r/r_0$ и по формулам § 3.3 вычисляют Θ_r . Искомую безразмерную температуру Θ в данной точке в данный момент времени находят как произведение $\Theta = \Theta_z\Theta_r$. Размерную температуру $T(r, z, \tau)$ определяют так же, как и в случае параллелепипеда.

3.6. Регулярный режим теплопроводности

Если в процессе охлаждения или нагревания температура $\theta = T - T_{\text{ж}}$ во всех точках тела с течением времени изменяется по одному и тому же закону, режим нестационарной теплопроводности называется *регулярным*. Укажем на два случая, когда может наблюдаться регулярный режим теплопроводности. Первый случай соответствует условию $T_{\text{ж}} = \text{const}$. При $\lambda = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$ и $\epsilon_1 = \text{const}$ в этом случае, начиная с некоторого момента, температура θ со временем изменяется по закону экспоненты. Во втором случае температура $T_{\text{ж}}$ возрастает (или убывает) по линейному закону. Здесь температура θ в стадии регулярного режима также изменяется по линейному закону.

Рассмотрим известную нам задачу об охлаждении пластины (см. § 3.2). При $Fo \geq 0,3$ для температуры θ справедливо выражение

$$\theta = \frac{2\theta_0 \sin \epsilon_1}{\epsilon_1 + \sin \epsilon_1 \cos \epsilon_1} \cos\left(\epsilon_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\epsilon_1^2 Fo}$$

Показатель экспоненты запишем в виде

$$\epsilon_1^2 Fo = \frac{\epsilon_1^2 a}{\delta^2} \tau = m\tau.$$

Величина $m = \epsilon_1^2 a / \delta^2$ называется *темпом регулярного режима* (темпом охлаждения или нагревания). Таким образом, в нашем случае $\theta \sim e^{-m\tau}$. Зависимость такого же типа характерна в случае регулярного режима и для тел другой формы (бесконечного цилиндра, шара, цилиндра конечной длины, параллелепипеда и др.).

Темп регулярного режима не зависит от координат точек тела и от времени, а зависит от интенсивности охлаждения или нагревания (от значения α), физических свойств, формы и размеров тела. Для пластины $\epsilon_1 = \sqrt{Bi}$ при $Bi \rightarrow 0$ и $\epsilon_1 = \pi/2$ при $Bi \rightarrow \infty$. Поэтому максимальное значение величины m приобретает при $Bi \rightarrow \infty$:

$$m_{\infty} = \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2 a.$$

Если число Bi мало ($Bi \rightarrow 0$), то мал и темп регулярного режима: $m = aBi/\delta^2$. С увеличением числа Bi значение ϵ_1 возрастает, в связи с чем возрастает также и m , асимптотически приближаясь к m_{∞} .

Нетрудно получить выражение для m_{∞} в случае нагревания или охлаждения параллелепипеда или цилиндра конечной длины. Рассмотрим второй случай. Из § 3.5 следует, что в стадии регулярного режима

$$\theta \sim \exp(-\epsilon_{1\text{пл}}^2 Fo_{\text{пл}}) \exp(-\epsilon_{1\text{цил}}^2 Fo_{\text{цил}}),$$

где $Fo_{\text{пл}}$ и $Fo_{\text{цил}}$ — числа Фурье для безграничной пластины толщиной l и бесконечно длинного цилиндра радиусом r_0 .

Величина $\epsilon_{1\text{пл}} = \pi/2$, а $\epsilon_{1\text{цил}} = 2,405$. Так как $Fo_{\text{пл}} = 4a\tau/l^2$, а $Fo_{\text{цил}} = a\tau/r_0^2$, то

$$m_{\infty} = \left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{r_0}\right)^2\right] a.$$

Обозначим

$$K = \frac{1}{(\pi/l)^2 + (2,405/r_0)^2}.$$

Тогда получим формулу, с помощью которой можно экспериментально найти температуропроводность материала:

$$a = Km_{\infty}.$$

Метод определения a простой. Исследуемому образцу из данного материала придать форму цилиндра конечной длины, внутрь цилиндра поместить датчик температуры (термопреобразователь) и в процессе нагревания (или охлаждения) образца (в условиях $Bi \rightarrow \infty$) регистрируют изменение θ со временем. В стадии регулярного режима $\ln \theta$ изменяется со временем по линейному закону. Отсюда следует, что, зафиксировав два момента времени τ_1 и τ_2 и измерив в эти моменты времени температуры θ_1 и θ_2 , значение m_{∞} можно найти по формуле

$$m_{\infty} = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Методом регулярного режима определяют также теплопроводность материала. Условия охлаждения или нагревания в этом случае таковы, что коэффициент теплоотдачи — конечная величина. Образец можно изготовить в виде шара. Тогда из теории нестационарной теплопроводности имеем

$$\frac{1}{\text{ctg } \epsilon_1} = -\frac{\epsilon_1}{Bi - 1},$$

где для шара $Bi = \alpha r_0 / \lambda$ (r_0 — радиус шара).

Из последнего соотношения получаем

$$\lambda = \frac{\alpha r_0}{1 - r_0 \sqrt{m/a} \operatorname{ctg}(r_0 \sqrt{m/a})}.$$

Температуропроводность a должна быть известна. Ее можно измерить рассмотренным выше способом. Чтобы найти α , необходимо изготовить образец с известным значением λ (эталонный калориметр) и воспользоваться последней формулой.

3.7. Численный метод решения нестационарных задач теплопроводности

Ранее (см. § 2.9) мы рассмотрели численный метод решения стационарных задач теплопроводности — метод контрольного объема. Этот же метод применим для решения нестационарных задач.

Рассмотрим задачу о симметричном нестационарном охлаждении пластины в среде с постоянной температурой и при постоянном коэффициенте теплоотдачи.

Тонкая пластина толщиной δ , имевшая в начальный момент времени постоянную температуру t_0 , помещена в среду, температура t_{∞} которой ниже t_0 и остается постоянной в течение всего периода охлаждения. На обеих сторонах пластины происходит конвективный теплообмен с постоянной интенсивностью α . Необходимо рассчитать температурное поле в пластине как функцию координат и времени $t(x, \tau)$.

Приведем математическую формулировку задачи. Найти на отрезке $x \in [-\delta, +\delta]$ решение $t(x, \tau)$ нестационарного дифференциального уравнения теплопроводности

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right)$$

при начальном условии $t(x, 0) = t_0$ и граничных условиях

$$\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t(-\delta, t) - t_{\infty}) \quad \text{при } x = -\delta;$$

$$-\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t(\delta, t) - t_{\infty}) \quad \text{при } x = +\delta.$$

Используя симметрию температурного поля относительно оси ординат y , будем, как и прежде, искать решение задачи для правой полуплоскости декартовой системы координат xOy . Тогда вместо граничного условия третьего рода для левой поверхности пластины $x = -\delta$ можно записать граничное условие симметрии температурного поля для $x = 0$:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Время, в течение которого пластина охлаждается, как правило, задается конечным: $\tau \in [0, \tau_k]$. Если же время не ограничено, то счет ведется до наступления нового стационарного распределения температуры в пластине (счет на установление).

Процедура дискретизации области интегрирования остается такой же, какой она была приведена выше (см. § 2.9). Дискретизация же уравнения отличается тем,

что интегрировать его нужно не только по контрольному объему ΔV , но и по времени в пределах заданного временного шага $\Delta \tau \approx \tau_{k+1} - \tau_k$:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\Delta V} \rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} dV d\tau = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dV d\tau.$$

Интеграл от левой части уравнения берется легко, в правой части нам знаком процедура интегрирования по ΔV от x_w до x_e . Предварительно получаем

$$\rho c_p \Delta V (\tau_{k+1} - \tau_k) = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_w \right] d\tau$$

Интеграл по времени в правой части можно, в частности, аппроксимировать выведением, представляющим собой линейную комбинацию подынтегральной функции для предыдущего τ_k и последующего τ_{k+1} моментов времени:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_w \right] d\tau = \left\{ \gamma \left[\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_w \right]^{k+1} + (1-\gamma) \left[\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)_w \right]^k \right\} \Delta \tau.$$

где γ — коэффициент, принимающий значения от нуля до единицы; индексы «e» и «w» относятся к координатам границ контрольного объема.

Выразим производные в правой части через конечные разности, как это делается раньше, и получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho c_p \Delta x}{\Delta \tau} (t_p^{k+1} - t_p^k) = & \gamma \left[\frac{\lambda_e}{\delta x_e} (t_e - t_p) - \frac{\lambda_w}{\delta x_w} (t_p - t_w) \right]^{k+1} + \\ & + (1-\gamma) \left[\frac{\lambda_e}{\delta x_e} (t_e - t_p) - \frac{\lambda_w}{\delta x_w} (t_p - t_w) \right]^k \end{aligned} \quad (3.69)$$

Если в (3.69) положить $\gamma = 1$, то получившееся уравнение можно в явном виде решить относительно t_p^{k+1} : температура в узле P в последующий момент времени τ_{k+1} выражается через температуру в нем и соседних узлах в предыдущий момент времени τ_k . Такой конечно-разностный аналог называют явным. В этом случае решение системы уравнений сводится к последовательному вычислению искоимой температуры в узлах. Алгоритм легко программируется.

При нулевом значении параметра γ получается неявный аналог. В этом случае не удается решить уравнение относительно t_p^{k+1} , так как значения температуры в соседних узлах также отнесены к последующему моменту времени и, следовательно, неизвестны. Решение системы уравнений неявного аналога при большом числе узлов достаточно трудоемко. Наконец, при промежуточных значениях γ получается явно-неявный аналог.

В практических расчетах можно использовать любое значение параметра γ . Следует иметь в виду, что явный аналог даст наиболее точное решение задачи, но весьма чувствителен к соотношению шагов по времени и по координате. Если это соотношение выбрано неудачно, то в процессе решения возникает неустойчивость,

проявляющаяся в том, что вычисляемые в процессе счета поля температуры не только не соответствуют решаемой задаче, но и не имеют физического смысла. Для одномерной линейной задачи условие устойчивости имеет вид $\Delta t \tau / \Delta x^2 \leq 1/2$, где a — температуропроводность материала пластины. Так как для повышения точности шаг по пространственной координате выбирается мелкий, то, чтобы выполнить условие устойчивости, приходится сильно измельчать шаг по времени, а это приводит к увеличению продолжительности процесса решения.

Неявная схема является абсолютно устойчивой (по крайней мере для линейных задач). В дальнейшем мы опробуем обе схемы.

Перейдем к обозначениям, которые были рассмотрены в § 2.9. Опустим также временной индекс « $k+1$ », а индекс « k » заменим нулем. Тогда наше конечно-разностное уравнение примет следующий вид:

для явной схемы

$$t_P = (a_E t_E^0 + a_W t_W^0 - (a_E + a_W) t_P^0 + b) / a_P^0; \quad (3.70)$$

для неявной схемы

$$a_P t_P = a_E t_E + a_W t_W + b, \quad (3.71)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta x_e = x_E - x_P; \quad \delta x_w = x_P - x_W; \quad a_E = \lambda_e / \delta x_e; \quad a_W = \lambda_w / \delta x_w; \\ b = a_P^0 t_P^0; \quad a_P = a_E + a_W + a_P^0; \quad a_P^0 = \rho c_P \Delta V / \Delta \tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Еще раз отметим, что верхний индекс «0» при t показывает, что это значение относится к предыдущему моменту времени.

Напомним, что по существу уравнения (3.70) и (3.71) являются системами алгебраических уравнений, записанных для внутренних узлов сетки: полюс P перемещается по всем контрольным объемам (как внутренним, так и граничным).

Теплопроводность на границах e и w контрольного объема рассчитываем по формуле, приведенной выше (см. § 2.9). Граничные условия записываются в виде (3.70), (3.71) соответственно с учетом изложенного в § 2.9.

Аппроксимация начального условия сводится к вычислению массива значений температуры в узлах для момента времени, равного нулю: $t_P^0 = t(P, 0)$.

Так как начальное поле температуры задано, то дальнейшее решение задачи заключается в последовательном вычислении значений температуры во всех узлах для следующего момента времени $0 + \Delta \tau$ по (3.70) для явной схемы, либо в решении системы (3.71) и уравнений для граничных контрольных объемов методами, изложенными в § 2.9. Полученное поле является начальным условием для нового продвижения во времени на один шаг. Процесс вычислений заканчивают по истечении расчетного интервала времени задачи τ_n .

Перейдем к конкретным вычислениям. Имеем следующие исходные данные:

$$\delta x = 0,25 \text{ м}; \quad \lambda = 20 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad \tau_n = 6125 \text{ с}; \quad \rho = 7300 \text{ кг/м}^3; \quad c_P = 537 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$\alpha = 100 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}; \quad T_{ж} = 293,15 \text{ К}; \quad T_0(x) = 1273,15 \text{ К}.$$

Обозначения в программе Mathcad будут несколько отличаться от принятых ранее, но понятны из контекста. В частности, в формулах для определения коэффици-

циентов конечно-разностных уравнений шаг h_x вычисляется как разность координат узлов X и (или) границ x .

Разбиваем отрезок $[0, \delta]$ на m равных частей с шагом h_x :

$$m = 20; \quad h_x = \delta/m; \quad h_x = 0,013$$

и вычисляем массивы координат узлов и границ контрольных объемов.

Заддим временной шаг из условия устойчивости явной схемы:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_P}; \quad h\tau = \frac{h^2}{2a}, \quad h\tau = 15,313; \quad a = 5,102 \cdot 10^{-6}; \quad h\tau = 25;$$

$$n\tau = \text{floor}\left(\frac{\tau_n}{h\tau}\right); \quad n\tau = 245.$$

Примем шаг $h\tau$ равным 25 с, число шагов по времени составит 245.

Дискретизируем начальное условие:

$$i = 0, 1, \dots, m; \quad T_i = T_0(X_i); \quad T_P0_i = T_i.$$

Коэффициенты в уравнениях конечно-разностного аналога не зависят от выбора схем (явная, неявная) и вычисляются по формулам (3.72) с учетом граничных условий для граничных контрольных объемов (см. § 2.9). Приведем только те коэффициенты, которые изменяются в связи с временным членом дифференциального уравнения:

для внутренних контрольных объемов при $i = 1, 2, \dots, m-1$

$$a_P0_i = \rho c_P (x_{i+1} - x_i) \frac{1}{h\tau}; \quad b_i = a_P0_i T_P0_i; \quad a_P i = a_E + a_W + a_P0_i;$$

для левой границы ($x = 0$) при $i = 0$

$$a_W i = 0; \quad a_P0_i = \rho c_P (x_{i+1} - x_i) \frac{1}{h\tau}; \quad b_i = a_P0_i T_P0_i; \quad a_P i = a_E + a_W + a_P0_i;$$

для правой границы ($x = \delta$)

$$i = m; \quad a_E i = 0; \quad a_P0_i = \rho c_P (x_i - x_{i-1}) \frac{1}{h\tau};$$

$$b_i = a_P0_i T_P0_i + \alpha T_{ж}; \quad a_P i = a_E + a_W + a_P0_i + \alpha.$$

Коэффициенты уравнений вычислены и находятся в памяти ПЭВМ в виде одноименных массивов (векторов) a_E , a_P и др. Приступим к решению системы уравнений.

Рассмотрим неявную схему. Решать систему (3.71) будем методом прогонки (см. рис. 2.29) с шагом по времени 25 с.

Результаты этого расчета в сравнении с результатами аналитического решения (см. § 3.1) приведены на рис. 3.10, а. На графике приняты следующие обозначения кривых: θ_0 — начальное распределение температуры в пластине; θ_{50} — распределение температуры через 50 временных интервалов счета, т.е. через 1250 с; θ_{∞} — конечное распределение температуры в момент τ_n ; T_i — конечное распределение температуры, вычисленное по аналитической формуле (с помощью ряда Фурье). Из рисунка видно хорошее совпадение результатов численного и аналитического решений.

Рассмотрим явную схему. Нет смысла решать наши уравнения по явной схеме с целью проверки точности неявной схемы: априори известно, что первая точнее. Приведем решение в области неустойчивости явной схемы.

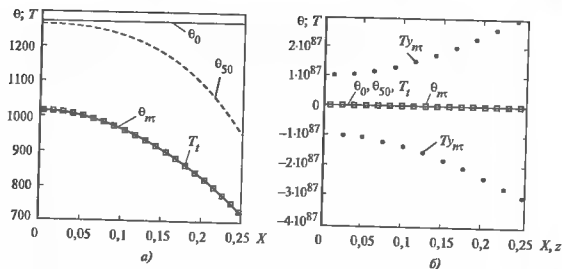


Рис. 3.10. Результаты расчета температурного поля в пластине

$$T_{y0} := T_{p0}$$

$$k := 1..nT$$

$$T_{yk} := \begin{cases} T_{p0} \leftarrow T_{yk-1} \\ \text{for } i \in 0..m \\ \quad b_i \leftarrow ap_{0i} \cdot T_{p0i} + \alpha \cdot (T_{ж} - T_{p0i}) \text{ if } i = m \\ \quad b_i \leftarrow ap_{0i} \cdot T_{p0i} \text{ otherwise} \\ \quad S_i \leftarrow \frac{1}{ap_{0i}} \cdot [an_i \cdot (T_{p0i+1} - T_{p0i}) + b_i] \text{ if } i = 0 \\ \quad S_i \leftarrow \frac{1}{ap_{0m}} \cdot [as_m \cdot (T_{p0m-1} - T_{p0m}) + b_m] \text{ if } i = m \\ \quad S_i \leftarrow \frac{1}{ap_{0i}} \cdot [an_i \cdot T_{p0i+1} + as_i \cdot T_{p0i-1} - (an_i + as_i) \cdot T_{p0i} + b_i] \text{ otherwise} \end{cases}$$

Рис. 3.11. Расчет температурного поля в пластине по явной схеме

Итак, зададим для явной схемы тот же шаг по времени 25 с (условие устойчивости давало шаг 15 с). Программа вычислений по явной схеме приведена на рис. 3.11. Она весьма проста, вычисления проводятся по (3.70). Результаты работы программы приведены на рис. 3.10, б в виде зависимости $T_{y_{пт}}(x)$. Из рисунка видно, что решение по явной схеме (черные точки) сильно «расходится». Температура принимает большие по модулю, то положительные, то отрицательные значения, что никак не соответствует физическому смыслу задачи.

В заключение приведем еще один пример численного расчета — охлаждение пластины за счет конвекции и излучения. Влияние дополнительного отвода тепло-

ты излучением особенно заметно при умеренных значениях конвективного коэффициента теплоотдачи. Аналитическое решение такой задачи сопряжено с большими трудностями. Нам же практически не нужно переделывать программу расчета.

Охлаждение пластины с учетом излучения. Пусть, как и прежде, пластина охлаждается жидкостью, имеющей постоянную температуру $T_{ж}$, при том же самым коэффициенте теплоотдачи α . Естественно, она участвует и в радиационном взаимодействии с окружающими ее телами, имеющими температуру, равную, например $T_{ж}$. Результат этого взаимодействия — плотность теплового потока результирующего излучения можно записать так:

$$q_{рез} = \epsilon_{eq} \sigma (T(\delta, \tau)^4 - T_{ж}^4),$$

где ϵ_{eq} — приведенная степень черноты обменивающейся излучением системы; σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Присвоим числовые значения этим параметрам.

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4); \quad \epsilon_{eq} := 0,7; \quad T_{ж} := T_{ж}$$

В математической постановке задачи изменится только граничное условие при $x = \delta$:

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T(\delta, \tau) - T_{ж}) + q_{рез}.$$

При дискретизации это скажется на коэффициентах конечно-разностного уравнения, записываемого для правого граничного объема, а также на алгоритме решения. Проблема состоит в том, что граничное условие, содержащее искомую температуру в четвертой степени, не линейно. Не хотелось бы отказываться от метода прогонки в пользу чисто итеративных методов, а прогонка — метод решения линейных систем уравнений. Попробуем со совместить итерации с прогонкой.

Итак, при интегрировании для правого контрольного объема получаем

$$\rho c_p (X_i - x_i) \frac{1}{\Delta x} (T_p - T_{p0}) = q_s - q_p,$$

где q_s — плотность теплового потока, передаваемого теплопроводностью через левую границу s приграничного контрольного объема; q_p — плотность теплового потока, отводимого (подводимого) конвекцией и излучением от правой границы пластины;

$$q_s = \frac{-\lambda}{X_m - X_{m-1}} (T_p - T_s);$$

$$q_p = \alpha_2 (T_p - T_{ж}) + \epsilon_{eq} \sigma (T_p^4 - T_{ж}^4).$$

Линеаризуем второе слагаемое уравнения для q_p . Представим его в виде суммы постоянной и переменной частей:

$$q_p = q_{rc} + q_{rv} = -(\epsilon_{eq} \sigma T_{ж}^4) + \epsilon_{eq} \sigma (T_p)^3 T_p,$$

где T_p — приближенная в итеративном смысле температура поверхности пластины.

Если приближенное значение T_p близко к истинному значению T_p , то погрешность в определении q_p невелика. В то же время выражение для q_p линейно относ-


```

    Tr0 := T   θ0 := Tr0
    k := 1, 2... nт
    θk := Tr0 - θk-1
    Tri := 0
    while |Tri - Tm| > 0.5
    |
        Tri := Tm
        qrc ← -εeq · σ · (Tr4)
        qrv ← -εeq · σ · Tri3
        for iе 0, 1... m
        |
            ai ← ((bi + asi + ap0i)) if i = 0
            ai ← ((bi + asi + ap0i) - qrv) + α if i = m
            ai ← api otherwise
            bi ← ai
            ci ← asi
            bi ← ap0i · Trp0i if i = 0
            bi ← qrc + ap0i · Trp0i + α · Tж if i = m
            bi ← ap0i · Trp0i otherwise
            di ← bi
        β0 ←  $\frac{B_0}{a_0}$ 
        γ0 ←  $\frac{d_0}{a_0}$ 
        for iе 1, 2... m - 1
        |
            βi ←  $\frac{B_i}{a_i - c_i \beta_{i-1}}$ 
            γi ←  $\frac{d_i + c_i \gamma_{i-1}}{a_i - c_i \beta_{i-1}}$ 
            Tm ←  $\frac{d_m + c_m \gamma_{m-1}}{a_m - c_m \beta_{m-1}}$ 
        for iе m - 1, m - 2... 0
        |
            Ti ← βi · Ti+1 + γi
        T
    
```

Рис. 3.12. Расчет температурного поля с учетом излучения. Программа прогонки

тельно температуры T_p , следовательно, возможен метод прогонки.

После простых преобразований получаем коэффициенты уравнения для правого граничного объема:

$$i \rightarrow m;$$

$$aw_m := \frac{\lambda}{X_m - X_{m-1}} ae_m := 0;$$

$$ap0_m := \rho c_f \left(\frac{hx}{2} \right) \frac{1}{h\tau};$$

$$b_i := q_{rc} + ap0_i Trp0_i + \alpha T_{ж};$$

$$ap_i := aw_i + ae_i + ap0_i + \alpha - q_{rv}$$

Эти коэффициенты должны быть вставлены в программу прогонки. Сам же блок прогонки вставляется в итеративный цикл. С помощью итераций разность между значениями T_p и T_r становится меньше заданной погрешности.

Программа прогонки, вставленная в итеративный цикл, показана на рис. 3.12. Результат расчета представлен на рис. 3.13. Интересно сравнить кривые $\theta_{mT}(x)$ (результаты численного решения) и $T(x)$ (результаты теоретического расчета без учета излучения). Видно, что совместное охлаждение более эффективно.

3.8. Задачи с решениями

Задача 1. Начальная температура листа стали (его толщина 10 мм) $t_0 = 100^\circ\text{C}$. Физические свойства стали: $\lambda = 45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\rho = 7900 \text{ кг/м}^3$; $c_p = 0,46 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$. Найдите температуру листа через 1 мин после начала охлаждения в воздухе и в воде. Для воздуха $\alpha = 8 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, для воды $\alpha = 500 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. И в том, и в другом случае $t_{ж} = 20^\circ\text{C}$.

Решение. Температуропроводность стали

$$a = \frac{45}{7900 \cdot 460} = 1,24 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Определим числа Бю при охлаждении в воздухе (Bi_1) и в воде (Bi_2):

$$Bi_1 = \frac{5 \cdot 0,005}{45} = 0,000555;$$

$$Bi_2 = \frac{500 \cdot 0,005}{45} = 0,0555.$$

Так как $Bi_1 \ll 1$ и $Bi_2 \ll 1$, то в двух случаях в любой момент времени температура будет одинакова во всех точках листа. Число Фурье

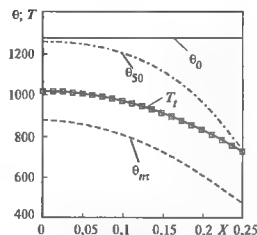


Рис. 3.13. Температурное поле в пластине с конвективно-радиационным охлаждением

$$Fo = \frac{1,24 \cdot 10^{-5} \cdot 60}{0,005^2} = 30.$$

Найдем безразмерные температуры в заданный момент времени при охлаждении в воздухе (Θ_1) и воде (Θ_2):

$$\Theta_1 = \exp(-5,55 \cdot 10^{-4} \cdot 30) = 0,983;$$

$$\Theta_2 = \exp(-5,55 \cdot 10^{-2} \cdot 30) = 0,189.$$

Температура листа в первом случае $t_1 - t_{ж} + \Theta_1(t_0 - t_{ж}) = 20 + 0,983 \cdot 80 = 98,6$ °C, во втором $t_2 = 20 + 0,189 \cdot 80 = 35,1$ °C.

Ответ. При охлаждении в воздухе температура листа $t_1 = 98,6$ °C, а при охлаждении в воде $t_2 = 35,1$ °C.

Задача 2. Внутренняя часть ограждения промышленной печи выполнена из огнеупорного материала (шамотного кирпича), а внешняя представляет собой тепловую изоляцию. Толщина огнеупора $\delta = 250$ мм. Его физические свойства следующие: $\lambda = 1,6$ Вт/(м·К); $a = 3,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Температура огнеупора и температура в печи $t_0 = 20$ °C. Найдите температуры внутренней и внешней поверхностей огнеупора через 10 ч после того, как температура газов в печи скачком возрастет до 1000 °C. Коэффициент теплоотдачи от газов к стенке $\alpha = 32$ Вт/(м²·К). Условно считайте, что через внешнюю поверхность огнеупора тепловой поток отсутствует.

Решение. Число Фурье для заданного момента времени

$$Fo = \frac{3,5 \cdot 10^{-7} \cdot 3600 \cdot 10}{0,25^2} = 0,202.$$

Число Био

$$Bi = \frac{32 \cdot 0,25}{1,6} = 5,0.$$

Так как $Fo < 0,3$, то для расчета температур необходимо взять несколько членов суммы в выражении (3.22). Из табл. 3.1 находим: $\epsilon_1 = 1,3138$; $\epsilon_2 = 4,0336$; $\epsilon_3 = 6,9096$. Вычисляем коэффициенты:

$$D_1 = \frac{2 \sin 1,3138}{1,3138 + \sin 1,3138 \cos 1,3138} = 1,240;$$

$$D_2 = \frac{2 \sin 4,0336}{4,0336 + \sin 4,0336 \cos 4,0336} = -0,3442;$$

$$D_3 = \frac{2 \sin 6,9096}{6,9096 + \sin 6,9096 \cos 6,9096} = 0,1587.$$

Найдем безразмерные температуры на внешней ($X = 0$) и внутренней ($X = 1$) поверхностях:

$$\Theta_{X=0} = 1,240e^{-1,726 \cdot 0,202} - 0,3442e^{-16,3 \cdot 0,202} + 0,1587e^{-48 \cdot 0,202} = 0,8750 - 0,0128 + 0,000009 - 0,8622;$$

$$\Theta_{X=1} = 0,8750 \cos 1,3138 - 0,0128 \cos 4,0336 - 0,2224 + 0,0080 - 0,2304.$$

Определяем искомые температуры:

$$t_{x=0} = 1000 - 0,2304 \cdot 980 - 772$$
 °C;

$$t_{x=1} = 1000 - 0,8622 \cdot 980 = 155$$
 °C.

Ответ. На внутренней поверхности температура $t_{x=1} = 155$ °C, а на внешней $t_{x=0} = 772$ °C.

Задача 3. В печь с температурой газов $t_{ж} = 800$ °C помещен длинный стальной вал диаметром 120 мм. Физические свойства стали таковы: $\lambda = 42$ Вт/(м·К); $a = 1,22 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Начальная температура вала $t_0 = 30$ °C.

В процессе нагревания вала $\alpha = 140$ Вт/(м²·К). Определите время, по истечении которого температура на оси вала станет равной 780 °C.

Решение. Число Био

$$Bi = \frac{140 \cdot 0,06}{42} = 0,2.$$

Из табл. 3.2 находим $\epsilon_1 = 0,6170$ и вычисляем

$$D_1 = \frac{2J_1(0,6170)}{0,6170[J_0'(0,6170) + J_1'(0,6170)]} = 1,048.$$

В заданный момент времени безразмерная температура на оси вала

$$\Theta_{R=0} = \frac{780 - 800}{30 - 800} = 0,026.$$

Находим время нагревания вала:

$$0,026 = 1,048e^{-0,3807Fo};$$

$$Fo = 9,7045;$$

$$\tau = 9,7045 \frac{0,06^2}{1,22 \cdot 10^{-5}} = 2863 \text{ с} = 0,795 \text{ ч}.$$

Ответ. Время нагревания составляет 0,795 ч.

Часть вторая КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Глава четвертая

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

4.1. Предварительные замечания

Практический интерес представляет изучение процесса теплообмена между движущейся средой и поверхностью твердого тела. Обычно рассматриваются две задачи. В первой — заданной величиной является температура поверхности тела и требуется найти тепловой поток от среды к телу (или наоборот). Во второй — заданной величиной является тепловой поток через поверхность тела и требуется найти температуру его поверхности. Решение этих задач сводится к отысканию температурного поля в потоке жидкости, т.е. к отысканию функции

$$T = T(x, y, z, \tau). \quad (4.1)$$

Если зависимость (4.1) найдена, то плотность теплового потока на поверхности тела q_c можно определить по закону Фурье:

$$q_c = q_{n, \text{пов}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{пов}}, \quad (4.2)$$

где $q_{n, \text{пов}}$ — проекция вектора q на направление внутренней к поверхности тела нормали (рис. 4.1); λ — теплопроводность жидкости.

Тепловой поток через поверхность тела площадью F можно найти как

$$Q = \int_F q_{n, \text{пов}} dF = \int_F q \cdot n_0 dF.$$

Из (4.2) видно, что q_c будет тем больше, чем больше производная $(\partial T / \partial n)_{\text{пов}}$ (градиент температуры в слое жидкости, примыкающей к поверхности твердого тела).

Зная q_c в данной точке поверхности, можно найти *местный коэффициент теплоотдачи*:

$$\alpha = \frac{q_c}{\Delta T} = -\frac{\lambda}{\Delta T} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{пов}}.$$

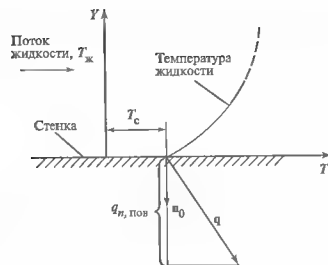


Рис. 4.1. К определению плотности теплового потока на поверхности тела

Здесь $\Delta T = T_{\text{ж}} - T_c$ представляет собой *местный температурный напор* между средой и поверхностью твердого тела, $T_{\text{ж}}$ — характерная температура жидкости (например, температура набегающего потока), T_c — температура поверхности в данной точке¹. Эта температура равна температуре тонкого «прилипшего» к стенке слоя жидкости.

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}_c}{\Delta T} = \frac{\bar{q}_c}{T_{\text{ж}} - T_c}, \quad (4.3)$$

$$\text{где } \bar{q}_c = \frac{1}{F} \int_F q_c dF; \quad \Delta T = \frac{1}{F} \int_F \Delta T dF.$$

В частном случае $\Delta T = \text{const}$ из (4.3) вытекает формула

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F} \int_F \alpha dF.$$

Из сказанного ясно, что нахождение зависимости (4.1) является основной задачей теории конвективного теплообмена. В движущейся жидкости поле температуры зависит от поля скорости, которое описывается уравнениями гидродинамики. Поэтому решение задач конвективного теплообмена сводится к решению системы дифференциальных уравнений: *уравнения неразрывности, уравнений движений, уравнения энергии*. Система состоит из пяти уравнений. Они служат для нахождения пяти неизвестных функций: T, v_x, v_y, v_z, P , где v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости v в данной точке пространства.

¹ Часто считают, что q_c — проекция вектора $\vec{q}$ на направление внешней нормали и тогда $\Delta T = T_c - T_{\text{ж}}$.

4.2. Два способа наблюдения за движущейся жидкостью. Субстанциональная производная. Вектор плотности потока энthalпии

При изучении процессов переноса энергии, количества движения (импульса) и массы в движущейся жидкости используются два способа наблюдения.

Первый способ заключается в наблюдении за движущейся частицей сплошной среды фиксированной массы (индивидуальной¹ частицей). При этом координаты x, y, z индивидуальной частицы зависят от времени. Изменение во времени той или иной субстанции (удельной внутренней энергии, температуры, давления, плотности, скорости и др.), которая является функцией координат x, y, z и времени t , характеризуется *субстанциональной производной*, вычисляемой по правилу дифференцирования сложной функции.

В качестве примера субстанции возьмем температуру $T = T(x, y, z, t)$, где x, y, z — координаты индивидуальной частицы, зависящие от времени. Тогда субстанциональная производная температуры по времени

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Для данной движущейся частицы частные производные составляют:

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Поэтому

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T. \quad (4.4)$$

Производная $\partial T / \partial t$ характеризует изменение температуры частицы, обусловленное нестационарностью процесса теплообмена. Эта часть субстанциональной производной называется *локальной производной*. Вторая часть $\mathbf{v} \cdot \text{grad} T$ называется *конвективной производной*. Поясним смысл конвективной производной с помощью рис. 4.2. На этом рисунке условно изображены две изотермические поверхности. В момент времени t частица находится в точке M_1 , а в момент времени $t + \Delta t$ — в точке M_2 . Разность температур в этих точках составляет ΔT . Путь, пройденный частицей за время Δt , определяется по формуле $\Delta l = v \Delta t$, причем $\Delta l = \Delta n / \cos \alpha$, где Δn — расстояние между изотермическими поверхностями, отсчитываемое по нормали к изотермической поверхности (она направлена в сторону уве-

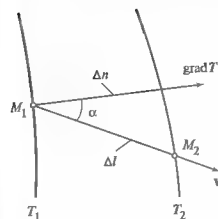


Рис. 4.2. К понятию конвективной производной

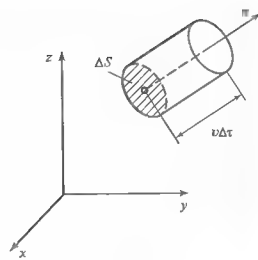


Рис. 4.3. К понятию векторов $\mathbf{rv}$ и $\rho \mathbf{v}$

личения T), а α — угол между $\mathbf{v}$ и $\text{grad} T$. Рассмотрим предел (он является определением производной):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \mathbf{v} \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} \cos \alpha = |\mathbf{v}| |\text{grad} T| \cos \alpha = \mathbf{v} \cdot \text{grad} T.$$

Следовательно, скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \text{grad} T$ — производная, которая характеризует скорость изменения температуры в процессе перемещения частицы из одной точки пространства в другую, близко расположенную к первой. Эта производная отлична от нуля и в случае стационарного процесса теплообмена, когда температура жидкости не зависит от времени.

Во втором способе наблюдения фиксируется неподвижный физически бесконечно малый объем ΔV (контрольный объем). Для контрольного объема составляются уравнения баланса массы, количества движения (импульса) и энергии жидкости.

Изменение массы, обусловленное втеканием в объем ΔV и вытеканием из него жидкости, рассчитывается с помощью *вектора плотности потока жидкости* $\rho \mathbf{v}$, кг/(м² · с). Поясним это понятие. В потоке жидкости зафиксируем площадку ΔS (рис. 4.3), перпендикулярную к вектору $\mathbf{v}$. Масса жидкости, которая проходит через ΔS за элементарный промежуток времени Δt , равна $\rho \Delta S v \Delta t$, где v — значение вектора скорости в данной точке. Отношение указанной массы жидкости к ΔS и Δt равно значению вектора плотности потока жидкости. Его направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{v}$. Умножая значение вектора плотности потока жидкости на единичный вектор $\mathbf{v} / v$, получаем $\rho \mathbf{v}$.

Аналогично тому, как это было сделано при выводе формулы (1.4), можно доказать, что $-\text{div} \rho \mathbf{v} \Delta V \Delta t$, кг, определяет приток массы жидкости в контрольный объем ΔV за элементарный отрезок времени Δt .

¹ Индивидуальную частицу можно представить в виде «меченой» в совокупности частиц.

Изменение энтальпии, обусловленное втеканием в ΔV и вытеканием из него неравномерно нагретой жидкости, рассчитывается с помощью вектора плотности потока энтальпии $\rho h v$, Дж/(м²·с). Выясним смысл этого вектора. Внутренняя энергия жидкости, переносимая через площадку ΔS за время Δt , равна $\rho \Delta S v \Delta t u$, где u — удельная внутренняя энергия, Дж/кг. За то же время сила давления совершает работу, равную $\rho \Delta S (v \Delta t)$ (площадка ΔS как бы выдавливается жидкостью на расстояние $v \Delta t$). Таким образом, через ΔS переносится внутренняя энергия и энергия в форме работы силы давления. Их сумма, отнесенная к ΔS и Δt , равна значению вектора плотности потока энтальпии, так как

$$\frac{\rho \Delta S v \Delta t u}{\Delta S \Delta t} + \frac{\rho \Delta S v \Delta t}{\Delta S \Delta t} = \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v = \rho h v,$$

где h — удельная энтальпия жидкости.

Умножая значение вектора плотности потока энтальпии на единичный вектор v/v , получаем $\rho h v$.

В общем случае следует учитывать также перенос кинетической энергии через площадку ΔS . Тогда вектором плотности потока энергии будет $\rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) v$. Иногда в переносимую энергию включают еще работу вязких напряжений.

Аналогично выводу формулы (1.4) можно доказать, что приток энтальпии жидкости в контрольный объем ΔV за элементарный отрезок времени Δt определяется как $-\text{div } \rho h v \Delta V \Delta t$.

Понятие вектора плотности потока энергии $\vec{j}_{\text{эн}}$ введено Н.А. Умовым в виде

$$\vec{j}_{\text{эн}} = \omega v,$$

где ω — объемная плотность энергии, Дж/м³.

В гидродинамике иногда используется понятие вектора плотности потока i -й компоненты ($i = 1, 2, 3$) импульса жидкости $\rho v_i v$, где ρv_i — объемная плотность i -й компоненты импульса. Приток импульса в контрольный объем ΔV за Δt определяется как $-\text{div } \rho v_i v \Delta V \Delta t$. Если $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, то $v_i \rightarrow v_x$ при $i = 1$, $v_i = v_y$ при $i = 2$ и $v_i = v_z$ при $i = 3$.

Рассмотренные два способа наблюдения далее мы будем применять при выводе дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Каждое из этих уравнений записывается в двух формах, соответствующих тому или иному способу наблюдения.

4.3. Уравнение неразрывности. Понятие несжимаемой жидкости

Применим закон сохранения массы для контрольного объема ΔV , выделенного в потоке жидкости (рис. 4.4).

В момент времени t масса жидкости в ΔV равна $\rho(x, y, z, t) \Delta V$, а в момент времени $t + \Delta t$ — $\rho(x, y, z, t + \Delta t) \Delta V$. Баланс массы имеет вид

$$\rho(x, y, z, t + \Delta t) \Delta V = \rho(x, y, z, t) \Delta V - \text{div } \rho v \Delta V \Delta t. \quad (4.4a)$$

Второе слагаемое в правой части определяет приток массы в ΔV за Δt (см. § 4.2).

Сократив на ΔV и разделив на Δt (4.4a), устремим Δt к нулю. Так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

то в результате получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho v = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называется *уравнением неразрывности*. Его можно записать в другой форме. Легко доказать, что

$$\text{div } \rho v = \rho \text{div } v + v \cdot \text{grad } \rho.$$

Кроме того, по аналогии с (4.4)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \rho.$$

В результате уравнение (4.5) приобретает вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div } v = 0. \quad (4.5a)$$

Пусть $\Delta m = \rho \Delta V$ — масса данной (индивидуальной) частицы жидкости. Допустим, что во все время ее движения $\Delta V = \text{const}$ (по определению индивидуальной частицы $\Delta m = \text{const}$). Жидкость, удовлетворяющая этому условию, называется *несжимаемой*. Для несжимаемой жидкости первое слагаемое в (4.5a) равно нулю, так как

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho \Delta V} \frac{d(\rho \Delta V)}{dt} = \frac{1}{\Delta m} \frac{d(\Delta m)}{dt} = 0.$$

Следовательно, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\text{div } v = 0. \quad (4.5b)$$

Сделаем грубую оценку условия, при котором жидкость или газ можно считать практически несжимаемой средой. Пусть $\partial \rho / \partial t = 0$, $v_x = v_y = 0$, $v_z = 0$. Последние три допущения соответствуют прямой струйке жидкости, для которой справедливо уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}.$$

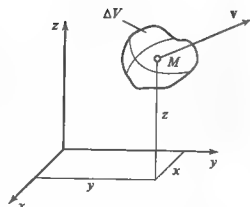


Рис. 4.4. Элементарный контрольный объем ΔV

Отсюда следует

$$v dv = -\frac{dp}{\rho} = -a^2,$$

где a — скорость звука.

При наших допущениях первое слагаемое в (4.5а) будет составлять $\frac{1}{\rho} \left(v \frac{dp}{dx} \right)$, а второе — dv/dx . Первым слагаемым можно пренебречь, если

$$\frac{1}{\rho} \left(v \frac{dp}{dx} \right) \ll -\frac{dv}{dx},$$

что равносильно

$$\frac{dp}{\rho} \ll -\frac{dv}{v}.$$

Но $dv/v = -(a/v)^2$. Отношение скорости потока к скорости звука называется числом Маха:

$$M = v/a.$$

Мы получили, что жидкость или газ можно считать практически несжимаемыми, если число Маха значительно меньше единицы. Более точные расчеты показывают, что это условие соответствует $M \leq 0.25$. Для «капельных» жидкостей это условие выполняется во всех практически важных случаях. При 20 °С скорость звука в воздухе составляет 343 м/с, в водяном паре — 424 м/с, а в гелии — 1005 м/с. Эти газы можно считать несжимаемыми соответственно при их скоростях, меньших 85, 106 и 250 м/с.

При скоростях, меньших одной четверти скорости звука, потоки газов ничем не отличаются от потоков «капельных» жидкостей (за исключением того, что для газов существуют свои зависимости ρ , μ и λ от температуры). Тогда под термином «жидкость» подразумевают как «капельную» жидкость, так и газ. При больших дозвуковых и тем более сверхзвуковых скоростях потоки газа рассматриваются отдельно.

Закон сохранения массы в интегральной форме можно вывести из (4.5). При интегрировании (4.5) получаем

$$\int_V \operatorname{div} \rho v dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Если F — площадь граничной поверхности контрольного объема V , то, применяя формулу Остроградского—Гаусса, получаем

$$\int_F \rho v_n dF = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (4.5b)$$

где v_n — проекция v на направление внешней нормали.

Для стационарных потоков правая часть (4.5b) равна нулю, откуда следует

$$\int_F \rho v_n dF = 0. \quad (4.5r)$$

Из (4.5r) нетрудно получить формулу для вычисления массового расхода жидкости G , кг/с, протекающей по трубе с поперечным сечением площадью S :

$$G = \rho \bar{v} S, \quad (4.6)$$

где $\bar{v}$ — усредненная по сечению площадью S скорость жидкости (точнее ее продольная составляющая).

Формула (4.6) справедлива при $\rho = \text{const}$. Если плотность изменяется, то в (4.6) $\rho \bar{v}$ надо заменить на ρv . Часто ρv называют массовой скоростью, кг/(м²·с).

4.4. Силы, действующие в движущейся жидкости. Закон внутреннего трения Ньютона. Вязкость

В земных условиях на каждую частицу движущейся жидкости действует сила тяжести, равная произведению массы частицы $\Delta m = \rho \Delta V$ на ускорение свободного падения g . В гидродинамике и теории тепломассообмена эта сила относится к категории массовых сил.

Массовыми силами являются также силы инерции (сила инерции поступательного движения, центробежная сила инерции, сила Кориолиса), которые вводятся при изучении движения в неинерциальной системе координат. Силы инерции действуют на жидкость, например, в системе охлаждения двигателя движущегося с ускорением автомобиля, в ракете — на этапе ее вывода на космическую орбиту и др. Сила инерции равна взятому со знаком «минус» произведению Δm на ускорение движущейся системы координат (связанной с автомобилем, ракетой и др.). Кроме сил тяжести и сил инерции могут быть и другие массовые силы. Все массовые силы (кроме силы тяжести) в дальнейшем исключаются из рассмотрения¹.

Другими силами, действующими в жидкости, являются *поверхностные* силы, которые обнаружим, если в жидкости выделим контрольный объем и будем его рассматривать в отдельности. Действие остальной массы жидкости на выделенный объем при этом заменяется силами, непрерывно распределенными по всей его поверхности (поверхностными силами).

В идеальной жидкости силы внутреннего трения отсутствуют и поверхностная сила — это сила давления, не зависящая от ориентации элементарной площадки, на которую она действует. В данной точке поверхности выделенного объема она характеризуется вектором напряжения $\sigma = -p n_0$, где n_0 — единичный вектор внешней нормали к элементарной площадке поверхности.

Всем реальным жидкостям присуще свойство вязкости. Оно проявляется сразу же после того, как жидкость приводится в движение. Тогда между

¹ Действие массовой силы характеризуется ее вектором плотности f , равным силе, отнесенной к единице массы. В уравнениях, приведенных ниже, путем замены вектора g на вектор f всегда можно учесть любую массовую силу или равнодействующую нескольких таких сил.

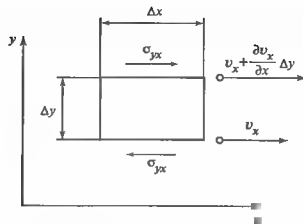


Рис. 4.5. Касательное напряжение при «простом сдвиге»

ее слоями возникают силы трения, обусловленные молекулярным переносом количества движения (импульса) от одного слоя к другому. Рассмотрим случай «простого сдвига», когда все слои жидкости перемещаются параллельно друг другу вдоль оси Ox (рис. 4.5). Пусть σ_{yx} — касательное напряжение (его называют также вязким напряжением) на элементарной площадке, перпендикулярной к оси Oy . По закону внутреннего трения Ньютона

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (4.7)$$

где μ — динамическая вязкость, Па·с.

Значения μ для некоторых жидкостей и газов приведены в табл. 4.1.

С повышением температуры вязкость жидкостей уменьшается, а вязкость газов увеличивается. Вязкости жидкостей и газов практически не зависят от давления. Наряду с μ в расчетах используется также ν — кинематическая вязкость, м²/с:

$$\nu = \mu / \rho.$$

В общем случае поверхностная сила, действующая на произвольной элементарной площадке, выделенной в потоке вязкой жидкости, характеризуется вектором напряжения σ_n , где индекс « n » указывает на единич-

Таблица 4.1. Вязкость μ для некоторых жидкостей и газов

Вещество	$\mu, 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$	
	$T = 273 \text{ K}$	$T = 373 \text{ K}$
Трансформаторное масло	6298	213
Вода (состояние насыщения)	179	28,2
Воляной пар (состояние насыщения)	0,922	1,23
Воздух	1,72	2,19

нормаль к площадке. Для площадок, перпендикулярных к осям Ox , Oy и Oz , векторами напряжения будут σ_x , σ_y и σ_z соответственно. Можно доказать существование следующего векторного равенства:

$$\sigma_n = \sigma_x l + \sigma_y m + \sigma_z n,$$

где l , m и n — направляющие косинусы, т.е. косинусы углов, образованных направлением указанной нормали с положительными направлениями осей координат.

В проекциях на оси координат указанное векторное равенство имеет вид:

$$\sigma_{nx} = \sigma_{xx} l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n;$$

$$\sigma_{ny} = \sigma_{yx} l + \sigma_{yy} m + \sigma_{yz} n;$$

$$\sigma_{nz} = \sigma_{zx} l + \sigma_{zy} m + \sigma_{zz} n.$$

Величины σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} называют нормальными напряжениями, а давлением называют величину

$$p = -1/3 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}).$$

Величины σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} и другие, имеющие аналогичную запись, называются касательными напряжениями. Первый индекс здесь указывает на ориентацию площадки (например, σ_{xy} действует на площадке, перпендикулярной к оси Ox), а второй индекс обозначает ось, на которую спроектировано это напряжение. Используя закон сохранения момента количества движения, можно доказать, что $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Для идеальной жидкости касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$.

По закону Ньютона—Навье—Стокса (обобщенному закону Ньютона)

$$\sigma_{xx} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v\right) + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$\sigma_{yy} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v\right) + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y},$$

$$\sigma_{zz} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v\right) + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right).$$

Обозначим $x = x_1, y = x_2, z = x_3, v_x = v_1, v_y = v_2$ и т.д. Тогда приведенные выше шесть формул кратко можно записать так:

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v\right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

где $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$, а $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории σ_x, σ_y и σ_z определяют молекулярный перенос импульса соответственно через площадки, перпендикулярные к осям Ox, Oy и Oz . Величина $-\operatorname{div} \sigma_x \Delta V \Delta t$ определяет молекулярный приток в ΔV за Δt x -компоненты импульса, величина $-\operatorname{div} \sigma_y \Delta V \Delta t$ — приток y -компоненты, а величина $-\operatorname{div} \sigma_z \Delta V \Delta t$ — приток z -компоненты.

4.5. Уравнения движения

Запишем уравнения движения (уравнения Навье—Стокса) в двух формах:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i; \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v_i v = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i. \quad (4.9)$$

Эти уравнения справедливы для несжимаемой жидкости при $\mu = \text{const}$. В них $i = 1, 2, 3; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z; v_1 = v_x, v_2 = v_y, v_3 = v_z$. Три скалярных уравнения (4.8) эквивалентны одному векторному:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 v, \quad (4.10)$$

где $\nabla^2 v$ — символический вектор с компонентами $\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z$.

Пусть $i = 1$, т.е. $x_1 = x$. Тогда будем иметь уравнение движения в проекции на ось Ox . В (4.8) и (4.9) dv_x/dt и $\operatorname{div} \rho v_x v$ в развернутом виде пишутся так:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \rho v_x v = \frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z}.$$

Уравнение (4.10) выражает второй закон Ньютона для движущейся частицы жидкости. Имея в виду, что все члены уравнения (4.10) отнесены к единице объема, можно сказать, что его левая часть — произведение массы на ускорение частицы, первое слагаемое в правой части — сила тяжести, действующая на частицу, второе — сила давления, третье — сила вяз-

кости. Левую часть (4.8) иногда называют инерционной силой (отнесенной к единице объема).

Уравнение движения в виде (4.9) в проекции на ось Ox можно вывести следующим образом. Воспользуемся вторым способом наблюдения (см. § 4.2). На основании теоремы об изменении импульса запишем:

$$\frac{\partial(\rho \Delta V v_x)}{\partial t} \Delta t = - \operatorname{div} \rho v_x \Delta V \Delta t + \operatorname{div} \sigma_x \Delta V \Delta t + \rho \Delta V g_x \Delta t.$$

Левая часть этого уравнения определяет изменение за Δt импульса жидкости в элементарном контрольном объеме ΔV , первое слагаемое в правой части — приток импульса через поверхность ΔV , второе слагаемое — импульс поверхностных сил (оно же определяет молекулярный отток импульса из объема ΔV через его поверхность), третье слагаемое — импульс силы тяжести. Сокращая на $\Delta V \Delta t$ и расписывая $\operatorname{div} \sigma_x$, получаем

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v_x v = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}.$$

Это уравнение справедливо для любой движущейся сплошной среды. Напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}$ для ньютоновской жидкости определяются законом Ньютона—Навье—Стокса (см. § 4.4). Используя этот закон и полагая $\mu = \text{const}, \operatorname{div} v = 0$, после преобразований получаем

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v_x v = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

При изотермическом течении жидкости в отсутствии свободных поверхностей сила тяжести исключается из уравнений Навье—Стокса заменой $p_1 = p - p_0$, где p_0 — гидростатическое давление, определяемое уравнением

$$\rho g - \operatorname{grad} p_0 = 0.$$

Заменяя в (4.10) ρg на $\operatorname{grad} p_0$, получаем

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p_1 + \nu \nabla^2 v. \quad (4.11)$$

Допустим, что в правой части (4.10)

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)], \quad (4.12)$$

где T_0 — произвольно взятая температура жидкости; ρ_0 — плотность при $T = T_0$; β — коэффициент объемного расширения;

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

Соотношение (4.12) справедливо при $\beta = \text{const}$.

Преобразуем первые два слагаемых в правой части (4.10):

$$\rho g - \text{grad } p = \rho g - \rho_0 g - \text{grad } p + \text{grad } p_0 = (\rho - \rho_0)g - \text{grad } p_1 = \\ = -\beta \rho_0 (T - T_0)g - \text{grad } p_1.$$

Здесь p_0 — гидростатическое давление в изотермической ($T = T_0$) жидкости. Выражение $-\beta \rho_0 (T - T_0)g$ определяет отнесенную к единице объема *термогравитационную силу* — равнодействующую сил тяжести и Архимеда.

Полагая в левой части (4.10) $\rho = \rho_0 = \text{const}$, получаем в векторной форме уравнение движения с учетом действия термогравитационной силы:

$$\frac{dv}{dt} = -\beta(T - T_0)g - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_1 + v \nabla^2 v. \quad (4.13)$$

4.6. Уравнение энергии

Для относительно медленных течений жидкости и газа при составлении уравнения энергии можно пренебречь теплотой внутреннего трения и считать $p = \text{const}$. Тогда на основании первого закона термодинамики для выделенной в потоке частицы жидкости, масса которой $\rho \Delta V$, можно записать

$$\frac{d(\rho \Delta V h)}{dt} = -\text{div } q \Delta V \Delta \tau. \quad (4.14)$$

Левая часть этого уравнения определяет изменение энтальпии частицы жидкости за элементарный отрезок времени $\Delta \tau$, правая — подведенное к частице за $\Delta \tau$ количество теплоты (от окружающей жидкости)¹.

Массу частицы в (4.14) вынесем за знак производной. Сокращая на $\Delta V \Delta \tau$, получаем уравнение энергии в виде

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\text{div } q. \quad (4.15)$$

При $p = \text{const}$

$$\frac{dh}{dt} = c_p \frac{dT}{dt}.$$

Тогда вместо (4.15) будем иметь

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\text{div } q.$$

Распишем субстанциональную производную dT/dt и учтем, что $q = -\lambda \text{grad } T$.

¹ Внутренние источники теплоты не учитываются.

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + v \cdot \text{grad } T \right) = \text{div}(\lambda \text{grad } T). \quad (4.16)$$

При $\lambda = \text{const}$ уравнение (4.16) приобретает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + v \cdot \text{grad } T = a \nabla^2 T, \quad (4.17)$$

где a — температуропроводность жидкости;

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}.$$

В декартовой системе координат в развернутом виде (4.17) записывается так

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (4.17a)$$

Уравнение энергии в другой форме можно получить при использовании второго способа наблюдения (см. § 4.2). В неподвижном элементарном объеме ΔV изменение энтальпии за время $\Delta \tau$ происходит за счет ее притока через поверхность ΔF и подводимого количества теплоты:

$$\frac{\partial(\rho \Delta V h)}{\partial \tau} \Delta \tau = -\text{div } \rho h v \Delta V \Delta \tau - \text{div } q \Delta V \Delta \tau.$$

Здесь $\Delta V = \text{const}$. Сокращая на $\Delta V \Delta \tau$, получаем

$$\frac{\partial \rho h}{\partial \tau} + \text{div } \rho h v = -\text{div } q. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) запишем в виде

$$\frac{\partial \rho h}{\partial \tau} = -\text{div}(q + \rho h v).$$

Уравнение (4.18) называется уравнением Фурье—Остроградского.

Уравнения (4.15) и (4.18) преобразуются друг в друга с помощью уравнения неразрывности.

Из (4.18) можно получить уравнение баланса энтальпии (или уравнение теплового баланса) для контрольного объема V , ограниченного неподвижной поверхностью F :

$$\int_V \frac{\partial \rho h}{\partial \tau} dV + \int_V \text{div } \rho h v dV = - \int_V \text{div } q dV. \quad (4.18a)$$

Для стационарных процессов первый интеграл в левой части (4.18а) равен нулю. Преобразуя по формуле Остроградского—Гаусса оставшиеся интегралы в поверхностные, получаем

$$-\int_F q_n dF = \int_F \rho h v_n dF. \quad (4.19)$$

Здесь q_n и v_n — проекции векторов q и v на направление внешней к поверхности F нормали.

Левая часть (4.19) определяет подводимый к объему V тепловой поток, правая — изменение энтальпии втекающей и вытекающей из него жидкости. Уравнение (4.19) используется при составлении теплового баланса в различных теплообменных устройствах.

Вывод общего дифференциального уравнения энергии сложен из-за громоздкости расчета работы поверхностных сил в вязкой жидкости. Чтобы была ясна структура общего уравнения энергии, сначала предположим, что жидкость идеальная. Для идеальной жидкости на основании первого закона термодинамики можно записать

$$-\operatorname{div} q \Delta V \Delta \tau = \rho \Delta V \frac{dh}{d\tau} \Delta \tau - \Delta V \frac{dp}{d\tau} \Delta \tau,$$

откуда следует уравнение

$$\rho \frac{dh}{d\tau} = -\operatorname{div} q + \frac{dp}{d\tau}. \quad (4.20)$$

Для реальной жидкости в правую часть (4.20) следует добавить слагаемое, учитывающее работу вязких напряжений. В простейшем случае движения слоев жидкости вдоль оси Ox (см. рис. 4.5) сила трения на площадке $\Delta x \Delta z$ равна $\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta x \Delta z$.

Относительная скорость слоев составляет $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y$. Работа, совершаемая силой трения за время $\Delta \tau$, определяется так:

$$\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta x \Delta z \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y \Delta \tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \Delta V \Delta \tau.$$

Обозначим

$$\epsilon = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2.$$

Величина ϵ , Вт/м³, определяет теплоту трения и называется *диссипативной функцией*. В общем виде

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} v)^2 + 2 \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Введя диссипативную функцию в (4.20), получим

$$\rho \frac{dh}{d\tau} = -\operatorname{div} q + \frac{dp}{d\tau} + \epsilon. \quad (4.21)$$

Это и есть общее уравнение энергии. Возможны и другие формы его представления.

4.7. Безразмерные параметры (числа подобия), характеризующие процессы конвективного теплообмена

В математическое описание процессов конвективного теплообмена входит большое число размерных величин: независимые переменные (координаты и время), зависимые переменные (температура, скорость течения и давление), а также параметры (физические свойства жидкости) и величины, входящие в условия однозначности (характерный размер l_0 , характерная скорость v_0 , характерный температурный напор между средой и поверхностью твердого тела θ_0 и др.). Единицы величин выбираются произвольно. Явления природы, к числу которых относится процесс конвективного теплообмена, от единиц величин не зависят. Следовательно, если получено решение какой-либо задачи конвективного теплообмена, оно всегда может быть записано в безразмерной форме. При этом параметры задачи группируются в безразмерные комплексы. Примером такого комплекса, оказывающего влияние на температурное поле в твердом теле, может служить число Bi .

Число и структуру безразмерных параметров можно получить либо методом размерностей, либо путем приведения математического описания процесса к безразмерному виду. Знание этих безразмерных параметров имеет особое значение для изучения процессов конвективного теплообмена.

Рассмотрим следующую задачу (рис. 4.6): твердое тело с постоянной температурой поверхности T_c омывается потоком жидкости, температура которой вдали от тела равна T_∞ , скорость потока составляет v_0 . Характерный размер тела обозначим l_0 .

Сначала будем считать, что физические свойства жидкости постоянны и влияние свободной конвекции пренебрежимо мало. Запишем уравнения гидродинамики и уравнение энергии:

$$\operatorname{div} v = 0;$$

$$\rho \frac{dv}{d\tau} = -\operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 v;$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = a \nabla^2 \theta$$

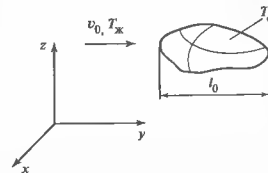


Рис. 4.6. Внешнее обтекание тела

В уравнении движения давление p есть разность между истинным давлением и гидростатическим, в уравнении энергии $\theta = T - T_{ж}$.

Искомые функции должны удовлетворять следующим условиям. На больших расстояниях от тела скорость равна v_0 , причем вектор v_0 параллелен оси Ox , а температура $\theta = 0$. На поверхности тела скорость равна нулю, а температура $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 = T - T_{ж}$).

В качестве масштаба измерения переменных примем: для координат — l_0 , для скорости — v_0 , для времени — l_0/v_0 , для давления — ρv_0^2 , для температуры — θ_0 . Путем деления размерных переменных на масштаб получим безразмерные переменные: $x', y', z', \tau', v', p', \theta'$. Тогда старые переменные запишутся так: $x = x'l_0$, $y = y'l_0$, $z = z'l_0$, $v = v'v_0$, $\tau = \tau'l_0/v_0$, $p = p'\rho v_0^2$, $\theta = \theta'\theta_0$. В таком виде эти переменные подставим в уравнения гидродинамики и уравнение энергии. Приведем некоторые примеры преобразования производных, входящих в уравнения:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(v'_x v_0)}{\partial(x'l_0)} = \frac{v_0}{l_0} \frac{\partial v'_x}{\partial x'};$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \frac{v_0}{l_0^2} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2};$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{d(v'v_0)}{d(\tau'l_0/v_0)} = \frac{v_0^2}{l_0} \frac{dv'}{d\tau'}.$$

Окончательно уравнения будут иметь вид:

$$\operatorname{div} v' = 0;$$

$$\operatorname{Re} \frac{dv'}{d\tau'} = -\operatorname{Re} \operatorname{grad} p' + \nabla^2 v';$$

$$\operatorname{Pe} \frac{d\theta'}{d\tau'} = \nabla^2 \theta'.$$

Символами Re и Pe обозначены комплексы следующих величин:

$$\operatorname{Re} = \rho v_0 l_0 / \mu = v_0 l_0 / \nu;$$

$$\operatorname{Pe} = v_0 l_0 / a.$$

Первый комплекс называют *числом Рейнольдса*, второй — *числом Пекле*. Граничные условия безразмерных параметров не содержат: вдали от трубы скорость $v' = 1$, температура $\theta' = 0$; на поверхности трубы $v' = 0$, а $\theta' = 1$.

Проанализируем полученные результаты. Так как мы приняли, что физические свойства жидкости постоянны, гидродинамическую задачу можно рассматривать отдельно от тепловой. В этой задаче один безразмерный параметр — число Re . Он полностью определяет картину обтекания твердого тела. При фиксированном значении Re безразмерные переменные v' и p' зависят от координат x', y', z' и времени τ' , а в стационарных условиях — только от координат. Следовательно, во всех случаях, которые характеризуются различными значениями v_0 , l_0 и ν и одним и тем же числом Re , распределения скорости и давления вблизи тела будут подобны друг другу. В связи с этим число Re называют числом (или критерием) подобия. Коэффициент гидравлического сопротивления при обтекании тел одной и той же формы зависит только от числа Re .

Левая часть уравнения движения $\rho dv/d\tau$ характеризует инерционные свойства потока (инерционные силы). При обтекании тела инерционные силы в набегающем потоке определяются как $\rho v_0^2/l_0$, а силы вязкости — как $\mu v_0/l_0^2$. Число Рейнольдса определяет отношение инерционных сил потока жидкости к силам вязкости, так как

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho v_0 l_0}{\mu} = \frac{\rho v_0^2 / l_0}{\mu v_0 / l_0^2}.$$

С увеличением числа Re область влияния сил вязкости (область заторможенной жидкости) сужается, и при очень больших числах Re она приобретает вид тонкого *пограничного слоя*.

Режим течения жидкости может быть ламинарным или турбулентным. Ламинарный режим течения наблюдается при относительно малых числах Re , а турбулентный — при больших. Переход от одного режима к другому происходит при определенном (критическом) значении $\operatorname{Re} = \operatorname{Re}_{кр}$.

При обтекании тела конвективный перенос теплоты в набегающем потоке соответствует $\rho c_p v_0^2/l_0$, а молекулярный перенос теплоты — $\lambda v_0/l_0^2$. Число Пекле определяет отношение конвективного переноса теплоты к молекулярному, так как

$$\operatorname{Pe} = \frac{\rho c_p v_0 l_0}{\lambda} = \frac{\rho c_p v_0^2 / l_0}{\lambda v_0 / l_0^2}.$$

При увеличении Pe область влияния молекулярного переноса теплоты сужается, и при очень больших числах Pe она приобретает вид тонкого *теплого пограничного слоя*.

Число Пекле запишем в виде

$$Pe = \frac{v_0 l_0}{\nu} \frac{\nu}{a} = Re Pr.$$

Безразмерный комплекс физических величин, равный отношению ν/a , называется числом Прандтля:

$$Pr = \nu/a.$$

Температуропроводность a характеризует скорость распространения теплового возмущения, а вязкость ν — скорость переноса количества движения. Следовательно, число Pr характеризует соотношение скорости переноса теплоты и количества движения.

Из предыдущего следует, что для температурного поля в стационарных процессах справедливы две равнозначные зависимости:

$$\theta' = f_1(x', y', z', Re, Pr);$$

$$\theta' = f_2(x', y', z', Re, Pr).$$

Приведем к безразмерному виду формулу, с помощью которой определяется коэффициент теплоотдачи¹:

$$\alpha = \frac{q_c}{T_c - T_{ж}} = - \frac{\lambda}{T_c - T_{ж}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{\text{пов}} = - \frac{\lambda}{l_0} \left. \frac{\partial \theta'}{\partial n'} \right|_{\text{пов}}.$$

Введем число Нуссельта Nu (безразмерный коэффициент теплоотдачи):

$$Nu = \alpha l_0 / \lambda.$$

Тогда

$$Nu = - \left. \frac{\partial \theta'}{\partial n'} \right|_{\text{пов}}.$$

Если x'_c, y'_c, z'_c — безразмерные координаты точек поверхности, то

$$Nu = f_3(x'_c, y'_c, z'_c, Re, Pr). \quad (4.22)$$

Среднее число Нуссельта, определяемое как

$$\bar{Nu} = \bar{\alpha} l_0 / \lambda,$$

будет зависеть только от Re и Pr :

$$\bar{Nu} = f_4(Re, Pr). \quad (4.23)$$

В виде зависимостей (4.22) и (4.23) представляют результаты экспериментальных и теоретических исследований конкретных процессов конвективного теплообмена при *вынужденном* движении жидкости. Эти зависимости (фор-

мулы) далее используются для определения коэффициентов теплоотдачи, с помощью которых выполняются расчеты теплообменных аппаратов.

Рассмотрим теперь случай *смешанной конвекции*. При этом уравнение движения надо взять в виде (4.13). Проведя преобразования, аналогичные предыдущим, приведем к следующему безразмерному уравнению:

$$Re \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = - \frac{Gr}{Re} \mathbf{g} \theta' - Re \operatorname{grad} p' + \nabla^2 \mathbf{v}'.$$

Здесь Gr — число Грасгофа:

$$Gr = g \beta \theta_0^3 l_0^3 / \nu^2.$$

Числом Грасгофа учитывается действие в потоке жидкости термogravitационной силы. Для смешанной конвекции

$$Nu = f_5(x'_c, y'_c, z'_c, Re, Pr, Gr/Re); \quad (4.24)$$

$$\bar{Nu} = f_6(Re, Pr, Gr/Re). \quad (4.25)$$

Если вынужденное движение отсутствует, то около нагретого тела будет иметь место свободная конвекция. Все преобразования уравнений конвективного теплообмена останутся в силе, но теперь v_0 — величина, которую невозможно задать граничными условиями. Другими словами, v_0 — некоторая условная величина, принятая в качестве масштаба скорости только для того, чтобы привести уравнения к безразмерному виду. Зависимости (4.24) и (4.25) являются решениями системы безразмерных уравнений конвективного теплообмена. При свободной конвекции число Re не может входить в эти решения, так как оно теперь содержит произвольную заданную скорость v_0 . Следовательно, из зависимостей (4.24) и (4.25) число Re должно исчезнуть. Это значит, что Re и Gr/Re войдут в решение в виде произведения. Таким образом, для теплоотдачи при *свободной конвекции* будем иметь:

$$Nu = f_7(x'_c, y'_c, z'_c, Gr, Pr); \quad (4.26)$$

$$\bar{Nu} = f_8(Gr, Pr). \quad (4.27)$$

Рассмотренные выше безразмерные функциональные зависимости следует считать решениями безразмерных уравнений конвективного теплообмена с соответствующими безразмерными условиями однозначности. При равенстве в двух процессах безразмерных параметров математические описания этих процессов будут тождественны, а сами процессы будут подобны друг другу. Это означает, что по известным характеристикам одного процесса можно найти характеристики другого путем простого пересчета — умножением на некоторую постоянную величину.

Сформулируем *условия подобия процессов*. Во-первых, процессы должны описываться одинаковыми по форме и содержанию дифференциальными уравнениями. Во-вторых, должны быть подобны условия однозначности

¹ В отличие от (4.2) здесь n — внешняя нормаль.

сти (геометрические, начальные и граничные условия). В-третьих, безразмерные параметры (определяющие числа подобия) должны быть равны друг другу, т.е. $Re_1 = Re_2 = \dots = Re_n$; $Pr_1 = Pr_2 = \dots = Pr_n$ и т.п.

Отметим, что число и структура безразмерных параметров процесса можно получить методом размерностей.

В основе метода размерностей лежит π -теорема: зависимость между n размерными величинами, с помощью которых описывается данное физическое явление, может быть представлена в виде зависимости между безразмерными комплексами, число которых $m = n - k$ (k — число величин, имеющих независимые размерности).

4.8. Ламинарный и турбулентный режимы течения.

Уравнения Рейнольдса

Движение жидкости, при котором возможно существование стационарных траекторий частиц, называется *ламинарным*. При этом, например, при течении в трубе струйки жидкости не перемешиваются друг с другом, и при неизменном перепаде давления на концах трубы скорость жидкости в любой точке не зависит от времени. Ламинарный режим течения в трубе имеет место при числах Рейнольдса, меньших $Re_{кр}$ ($Re \leq 2300$). При $Re > Re_{кр}$ течение теряет устойчивость, струйки жидкости перемешиваются друг с другом, а траектории частиц хаотически изменяются во времени (рис. 4.7, а). В потоке возникают нерегулярные пульсации скорости (рис. 4.7, б), и при стационарных граничных условиях на концах трубы не зависит от времени только усредненное за относительно большой промежуток времени значение скорости в данной точке. Такой режим течения называется *турбулентным*. Этот режим течения наиболее часто встречается на практике. Течение теплообменников в теплообменных аппаратах, установленных на тепловых и атомных электрических станциях, как правило, является турбулентным.

Из-за хаотичности траекторий частиц теоретическое изучение турбулентных потоков значительно усложняется. До недавнего времени считалось, что без привлечения дополнительных гипотез и опытных данных с помощью уравнений гидродинамики вообще невозможно рассчитать поле скорости и гидравлическое сопротивление при турбулентном режиме движения жидкости. В настоящее время это мнение можно считать устаревшим. Для некоторых простейших случаев (течение жидкости в трубах и каналах на участках, значительно удаленных от входа, и др.) численным моделированием с помощью сверхмощных компьютеров получены решения уравнений Навье—Стокса и для турбулентных потоков: рассчитаны напряжения в жидкости, подтверждены эмпирические законы гидравлического сопротивления, установлено критическое число Рейнольдса ($Re_{кр} \approx 2300$) и т.п. Тем не менее, основным методом изучения турбулентных потоков в настоящее время остается метод, предложенный в XIX в. английским ученым О. Рейнольдсом.

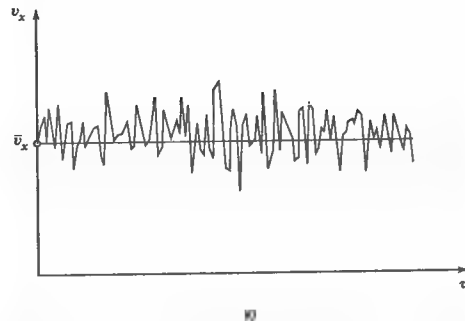
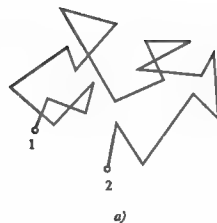


Рис. 4.7. Траектория частицы (а) и изменение во времени скорости в данной точке турбулентного потока (б)
1, 2 — начальное и конечное положения частицы

По методу Рейнольдса мгновенные значения переменных, входящих в уравнения конвективного теплообмена (скорость, температура, энтальпия и др.), представляются в виде суммы средних значений и пульсаций, являющихся случайными функциями времени. Средние значения величин — это усредненные за достаточно большой интервал времени (по сравнению с периодом пульсаций) мгновенные значения. В то же время интервал усреднения должен быть малым по сравнению с характерным временем изменения параметров процесса. За исключением особых случаев последнее условие на практике всегда выполняется.

Пусть v , T и h — мгновенные значения компонентов скорости, температуры и энтальпии в данной точке, а $\bar{v}$, $\bar{T}$ и $\bar{h}$ — их средние значения. Тогда $v_i = \bar{v} + v'_i$, $T = \bar{T} + T'$, $h = \bar{h} + h'$, где v'_i , T' и h' — пульсации.

Можно также записать: $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$, где $\mathbf{v}'$ — вектор пульсации скорости жидкости. Считая жидкость несжимаемой, пульсации плотности, давления, вязкости и теплопроводности учитывать не будем. Записанные в виде суммы средних значений и пульсаций мгновенные величины подставим в (4.56), (4.9) и (4.18) и проведем почленное усреднение этих уравнений. Для напорного течения (свободные поверхности отсутствуют) при пренебрежении малом влиянии термогравитационной конвекции после этого получим систему усредненных уравнений конвективного теплообмена (уравнений Рейнольдса) для турбулентных течений жидкости:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{v}_i \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \rho \bar{v}_i' \mathbf{v}' = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \bar{v}_i;$$

$$\frac{\partial \rho \bar{h}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{h} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \rho \bar{h}' \mathbf{v}' = - \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}.$$

В этих уравнениях появившиеся слагаемые $\operatorname{div} \rho \bar{v}_i' \mathbf{v}'$ и $\operatorname{div} \rho \bar{h}' \mathbf{v}'$ учитывают перенос импульса и энтальпии жидкости турбулентными пульсациями. Первое слагаемое, которое фигурирует в уравнении движения в проекции на ось Ox , запишем в виде

$$\operatorname{div} \rho \bar{v}_x' \mathbf{v}' = \frac{\partial \rho \bar{v}_x' v_x'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}_x' v_y'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{v}_x' v_z'}{\partial z}.$$

Умноженные на ρ усредненные значения произведений двух пульсаций скорости (и взятые со знаком «минус») называют *напряжениями Рейнольдса*. В усредненных уравнениях движения эти напряжения представляют собой новые неизвестные функции координат. В трех уравнениях движения таких неизвестных шесть (так как $\bar{v}_x' v_y' = \bar{v}_y' v_x'$ и т.п.).

Пульсацию энтальпии можно записать так: $h' = c_p T'$. Тогда

$$\operatorname{div} \rho \bar{h}' \mathbf{v}' = \frac{\partial \rho c_p \bar{T}' v_x'}{\partial x} + \frac{\partial \rho c_p \bar{T}' v_y'}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_p \bar{T}' v_z'}{\partial z}.$$

Умноженные на ρc_p усредненные значения произведений пульсаций температуры и компоненты скорости (т.е. $\rho c_p \bar{T}' v_x'$, $\rho c_p \bar{T}' v_y'$ или $\rho c_p \bar{T}' v_z'$) называют *плотностями турбулентного теплового потока*. В уравнении энергии три плотности турбулентного теплового потока представляют собой новые неизвестные функции координат.

Таким образом, в полной системе усредненных уравнений конвективного теплообмена содержится девять новых неизвестных. Для замыкания системы приходится привлекать гипотезы и разрабатывать модели турбулентности.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

5.1. Понятие пограничного слоя

Краткая история возникновения теории пограничного слоя. Уравнения движения вязкой жидкости были получены в середине XIX в., а уравнение энергии в его простейшей форме (уравнение Фурье—Остроградского) — в 1836 г. С помощью этих уравнений составляется математическое описание конкретных задач конвективного теплообмена и рассчитываются гидравлическое сопротивление, тепловой поток и коэффициент теплоотдачи.

До начала XX в. теоретическое решение многих практически важных задач теплообмена и гидродинамики было затруднительно. Это объясняется тем, что аналитическое решение полных уравнений движения (уравнений Навье—Стокса) невозможно, а численное решение требует применения мощных компьютеров.

В XIX в. были решены лишь некоторые частные задачи, в которых полагались равными нулю конвективные производные (инерционные силы) в уравнениях Навье—Стокса. К таким задачам относятся задачи Хагена—Пуазюля (определение гидравлического сопротивления при ламинарном течении жидкости в области, удаленной от входа в трубу) и Гретца (расчет в этой области чисел Нуссельта). Однако в то время не было получено решение одной из самых простых задач гидродинамики — задач об определении поля скорости и силы трения при продольном обтекании тонкой пластины. Понятно, что без знания поля скорости невозможно было в этом случае провести расчет конвективного теплообмена.

Вместе с тем в XIX в. были достигнуты большие успехи в изучении движения идеальной (лишенной свойства вязкости) жидкости. Большой вклад в развитие теории движения идеальной жидкости внесли акад. РАН Л. Эйлер и Д. Бернулли. В частности, уравнения движения идеальной жидкости были получены Л. Эйлером (1755 г.). С помощью уравнений Эйлера можно рассчитать гипотетическое поле скорости в окрестности омываемого тела и определить силы давления на поверхность тела, а силы трения найти нельзя. Теория движения идеальной жидкости не объясняла также причину возникновения вихрей в кормовой части плохо обтекаемых тел. В случае поперечного обтекания цилиндра она приводила к парадоксу Даламбера: ввиду симметричного распределения давления по окружности цилиндра (см. § 11.1) сила сопротивления равна нулю.

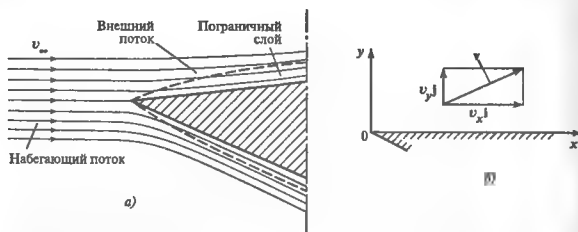


Рис. 5.1. Обтекание клиновидного тела

a — схема обтекания; b — компоненты скорости v_x и v_y в пограничном слое

В 1904 г. немецкий ученый Л. Прандтль опубликовал работу «О движении жидкости при очень малом трении», в которой обратил внимание на то, что при обтекании твердого тела влияние сил вязкости может быть существенным только в области тонкого пограничного слоя, а за его пределами им можно пренебречь. Другими словами, весь поток жидкости он разбил на две части: *внешний поток* и *пограничный слой*. Для внешнего потока справедлива теория движения идеальной жидкости (т.е. справедливы уравнения Эйлера). Для пограничного слоя справедливы уравнения Навье—Стокса, причем посредством такого допущения, как малая толщина пограничного слоя, эти уравнения удалось существенно упростить. Таким образом, были заложены основы теории пограничного слоя, которая сыграла большую роль в изучении процессов теплообмена¹. Достижения в развитии авиации и ракетно-космической техники неразрывно связаны с успехами в решении проблем теории пограничного слоя.

Пограничный слой называется *динамическим* (когда изучается гидродинамическая задача) и *тепловым* (когда изучается температурное поле).

Динамический пограничный слой. Это понятие разберем на примере обтекания клиновидного тела (рис. 5.1, a). Фундаментальным является следующий постулат: *скорость жидкости на поверхности твердого тела равна нулю*. В области пограничного слоя ($0 \leq y \leq \delta$) продольная составляющая вектора скорости v_x (рис. 5.1, b) изменяется от нуля до v_1 — скорости внешнего потока в точке с координатой $y = \delta$ (рис. 5.2). Для ускоренного (как в нашем случае) или замедленного внешнего потока v_1 зависит от координаты x . Иначе, v_1 зависит от x тогда, когда вдоль потока существует градиент давления. При продольном обтекании тонкой пластины гра-

¹ Теория пограничного слоя подробно излагается во многих книгах, посвященных механике жидкости и газа, в частности, в [34, 53].

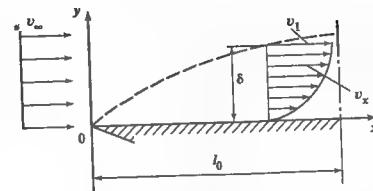


Рис. 5.2. Образование пограничного слоя при обтекании плоской поверхности тела

диент давления равен нулю и $v_1 = v_{\infty} = \text{const}$ (v_{∞} — скорость набегающего потока).

В основу своей теории Л. Прандтль заложил допущение о том, что *толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с продольным размером тела l_0 ($\delta \ll l_0$)*. Ввиду малости δ в направлении оси Oy наблюдаются большие градиенты v_x , поэтому даже при малой вязкости μ в пограничном слое силы вязкости могут быть большими (что вытекает из закона трения Ньютона). Они будут иметь тот же порядок, что и инерционные силы в уравнениях Навье—Стокса.

Можно доказать (см. § 5.2), что отношение δ/l_0 пропорционально $Re^{-1/2}$, где число Рейнольдса

$$Re = v_{\infty} l_0 / \nu. \quad (5.1)$$

Отсюда следует, что понятие пограничного слоя справедливо в том случае, если при внешнем обтекании тела число $Re \rightarrow \infty$.

В движущейся реальной жидкости при наличии градиентов скорости всегда осуществляется перенос импульса от одних частиц к другим. В пограничном слое в силу малости его толщины $v_x \ll v_y$, перенос импульса к стенке происходит так, как будто все слои перемещаются параллельно ей. Другими словами, перенос импульса (передача импульса от одного слоя к другому) осуществляется только в направлении, перпендикулярном стенке. В теории пограничного слоя переносом импульса (диффузией импульса) в продольном направлении пренебрегают.

С увеличением координаты x возрастает сила трения на поверхности продольно омываемого тела. За счет этого уменьшается кинетическая энергия пристенных слоев жидкости и возрастает толщина пограничного слоя (рис. 5.2).

Тот факт, что $\delta \ll l_0$, приводит к тому, что *давление в пограничном слое такое же, как и на его внешней границе*. Значит при решении уравнений пограничного слоя его можно считать известным. Это обстоятельство имеет большое значение, так как число искомых функций уменьшается на единицу.

ниту. Само же распределение давления можно найти либо теоретически, решая более простые уравнения Эйлера, либо экспериментально.

Резкой границы между пограничным слоем и внешним потоком не существует. Обычно в качестве δ принимают то значение координаты y , при котором $v_x = 0,99v_1$.

Для нахождения напряжения трения на стенке σ_c используется закон Ньютона:

$$\sigma_c = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Тепловой пограничный слой. Предположим, что температура набегающего потока T_∞ больше температуры поверхности тела T_c ($T_c = \text{const}$). Температура внешнего потока будет равна T_∞ , а в области толщиной δ_T температура будет изменяться от T_c до T_∞ (рис. 5.3). Эта область называется тепловым пограничным слоем. В теории пограничного слоя принимают, что $\delta_1 \ll l_0$. Можно показать (см. § 5.4), что отношение δ_1/l_0 пропорционально $Re^{-1/2}$, где число Пекле

$$Pe = v_\infty l_0 / \alpha. \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что понятие теплового пограничного слоя справедливо тогда, когда при обтекании тела выполняется условие $Pe \rightarrow \infty$.

Резкой границы между тепловым пограничным слоем и внешним потоком, в котором $T = T_\infty$, не существует. Обычно за толщину δ_T принимают то значение y , при котором

$$T - T_c = 0,99(T_\infty - T_c).$$

С увеличением координаты x количество теплоты, отданное телу, увеличивается, в связи с чем растет толщина δ_T .

Ввиду малости δ_T в направлении оси Oy наблюдаются большие градиенты температуры, и в пограничном слое $q_x \ll q_y$ (q_x и q_y — проекции вектора q на оси Ox и Oy).

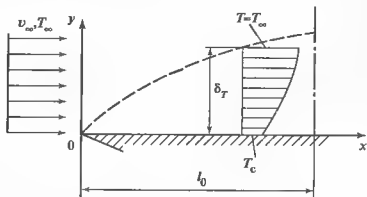


Рис. 5.3. Тепловой пограничный слой

Перенос теплоты в пограничном слое происходит так, как будто все слои перемешаются параллельно стенке и температура каждого слоя вдоль координаты x не изменяется. Другими словами, перенос теплоты осуществляется только в направлении, перпендикулярном стенке. В теории пограничного слоя переносом теплоты (диффузией теплоты) в продольном направлении пренебрегают.

Для нахождения плотности теплового потока на стенке q_c ($q_c = q_y$ при $y = 0$) используется закон Фурье:

$$q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (5.3)$$

При росте δ_T производная в (5.3) с увеличением x уменьшается, а q_c падает. При этом уменьшается и α (рис. 5.4), так как

$$\alpha = q_c / (T_c - T_\infty).$$

Распределение температуры и скорости в пограничном слое показано на рис. 5.5.

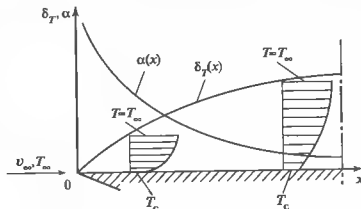


Рис. 5.4. Зависимость δ_T и α от координаты x

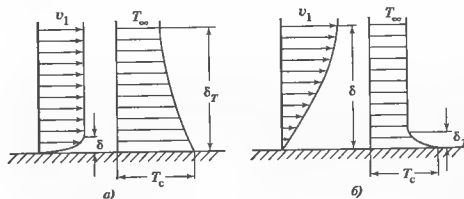


Рис. 5.5. Распределение температуры и скорости в пограничном слое
а — $Pr < 1$; б — $Pr \gg 1$

Чем больше вязкость ν (коэффициент диффузии импульса), тем больше толщина δ ; чем больше температуропроводность a (коэффициент диффузии теплоты), тем больше δ_T . Отношение δ_T/δ зависит от отношения ν/a , т.е. от числа Прандтля. Из рис. 5.5 видно, что при $Pr > 1$ $\delta > \delta_T$, а при $Pr < 1$ $\delta_T > \delta$.

5.2. Теоретический анализ динамического пограничного слоя

Рассмотрим случай обтекания плоской поверхности (см. рис. 5.2). Полученные результаты будут справедливы и для искривленной поверхности твердого тела, если радиус кривизны много больше толщины пограничного слоя.

Вывод уравнений Прандтля. Будем считать жидкость несжимаемой, ее свойства постоянными ($\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) и полагать, что выделение теплоты вследствие трения практически не сказывается на изменении энthalпии жидкости.

Компоненты скорости v_x , v_y и давление p удовлетворяют уравнению неразрывности и уравнениям Навье—Стокса. Запишем эти уравнения в безразмерном виде (см. § 4.7):

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0; \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial v'_x}{\partial \tau'} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \right); \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial v'_y}{\partial \tau'} + v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} \right). \quad (5.6)$$

Здесь Re — число Рейнольдса [см. (5.1)]; $x' = x/l_0$, $y' = y/l_0$, $\tau' = \nu_\infty \tau / l_0$,

$v'_x = v_x/\nu_\infty$, $v'_y = v_y/\nu_\infty$, $p' = p/(\rho \nu_\infty^2)$ — безразмерные переменные.

Следуя Прандтлю, принимаем условие: $Re \rightarrow \infty$. Тогда для внешнего потока слагаемые, учитывающие действие сил вязкости в (5.5) и (5.6), обратятся в нуль, а уравнения Навье—Стокса превратятся в уравнения Эйлера. Во внешнем потоке завихренность отсутствует; он называется потенциальным потоком, так как вектор скорости выражается как градиент некоторого потенциала аналогично вектору напряженности в электростатике.

Рассмотрим уравнение (5.5) для пограничного слоя. Чтобы производные в слагаемом, учитывающем силы вязкости, были одного порядка (порядка единицы), координату y будем измерять в масштабе, равном толщине δ :

$$y'' = \frac{y}{\delta} = \frac{l_0}{\delta} y'.$$

Из (5.4) следует, что масштабом измерения v_y будет $\nu_\infty \delta / l_0$, а безразмерная компонента скорости

$$v''_y = \frac{v_y}{\nu_\infty \delta} = v'_y \frac{l_0}{\delta}.$$

В (5.5) последнее слагаемое запишем в виде суммы:

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{l_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y''^2}.$$

Производные $\partial^2 v'_x / \partial x'^2$ и $\partial^2 v'_x / \partial y''^2$ одного порядка. Так как по определению $l_0 \gg \delta$, то при $Re \rightarrow \infty$ первая часть представленной суммы исчезает, а вторая будет порядка единицы [как и другие слагаемые (5.5)]. Отсюда получаем

$$\delta / l_0 \sim 1 / \sqrt{Re}.$$

Таким образом, $\delta \sim \sqrt{\nu}$ и $\delta \sim \nu_\infty^{-1/2}$

Рассмотрим уравнение (5.6). Производная $\partial p' / \partial y'$ имеет тот же порядок, что и последнее слагаемое в левой части (5.6):

$$v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = v'_y \frac{\partial v''_y}{\partial y''}.$$

Но $\partial v''_y / \partial y''$ — величина порядка единицы, а v'_y — порядка δ / l_0 . Следовательно,

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

При $Re \rightarrow \infty$ можно принять $\partial p' / \partial y' = 0$: давление в пограничном слое равно давлению на его внешней границе, а его в первом приближении можно принять таким, какое получится в результате решения задачи об обтекании тела идеальной жидкостью. Таким образом, давление исключается из числа неизвестных функций в уравнениях гидродинамики, записанных для пограничного слоя. Для стационарного потока с учетом того, что на внешней границе пограничного слоя $\partial v_x / \partial y = 0$, из уравнения Эйлера получим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v_1 \frac{dv_1}{dx}.$$

В частном случае $v_1 = v_{\infty} = \text{const}$ (случай тонкой пластины в неограниченном потоке жидкости) $dp/dx = 0$.

В результате проведенного анализа приходим к тому, что при $Re \rightarrow \infty$ система уравнений (5.4)—(5.6) упрощается и приобретает вид:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v''_y}{\partial y''} = 0; \quad (5.6a)$$

$$\frac{\partial v'_x}{\partial \tau'} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v''_y \frac{\partial v'_x}{\partial y''} = - \frac{dp'}{dx'} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y''^2}. \quad (5.6b)$$

Граничными условиями являются:

$$v'_x = 0; \quad v''_y = 0 \text{ при } y'' = 0;$$

$$v'_x = v_1/v_{\infty} = f(x') \text{ при } y'' \rightarrow \infty.$$

При изучении нестационарных течений должно быть задано начальное условие для v'_x и v'_y . Для стационарных потоков $\partial v'_x / \partial \tau' = 0$, при этом начальное условие отпадает.

Уравнения (5.6a) и (5.6b) называются *уравнениями Прандтля* [обычно они записываются в размерном виде (см. § 5.2)]. Уравнения Прандтля (уравнения ламинарного пограничного слоя) справедливы не только для плоской, но и для искривленной поверхности тела.

Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса. Для стационарных течений из (5.6a) и (5.6b) и соответствующих граничных условий следует, что

$$v'_x = f_1(x', y''), \quad (5.7)$$

$$v''_y = f_2(x', y''). \quad (5.8)$$

Введем коэффициент трения:

$$c_f = \frac{2\sigma_c}{\rho v_{\infty}^2},$$

где σ_c — касательное напряжение (напряжение трения) на поверхности тела.

Имея в виду, что $\sigma_c = \mu \left(\frac{\partial v'_x}{\partial y} \right)_{y=0}$ и $\frac{\partial v'_x}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y''} \frac{\partial y''}{\partial y}$, из (5.7) легко получить зависимость c_f от числа Рейнольдса, справедливую для всех ламинарных пограничных слоев:

$$c_f = \varphi \left(\frac{x}{l_0} \right) Re^{-1/2}. \quad (5.9)$$

Функция φ зависит от формы обтекаемого тела.

Явление отрыва пограничного слоя. На участках поверхности тела с замедленным движением жидкости ($dp/dx > 0$) может возникнуть отрыв пограничного слоя (рис. 5.6). Слой жидкости, примыкающий к стенке, обладает небольшой кинетической энергией, и эта энергия уменьшается по мере продвижения жидкости в область более высокого давления. В некотором сечении пограничного слоя (рис. 5.6, точка A) скорость жидкости вблизи стенки становится равной нулю. Далее под действием перепада давления жидкость вблизи стенки движется в сторону, противоположную внешнему течению. Точка A , разграничивающая области прямого и возвратного течений, называется *точкой отрыва* пограничного слоя.

Оторвавшийся пограничный слой оттесняет поток от поверхности тела. Толщина слоя при этом резко возрастает, в связи с чем положения теории пограничного слоя теряют силу. Следовательно, теория пограничного слоя справедлива только до точки отрыва. Отрыв его влияет на распределение давления вверх по потоку, оно иногда не соответствует случаю обтекания

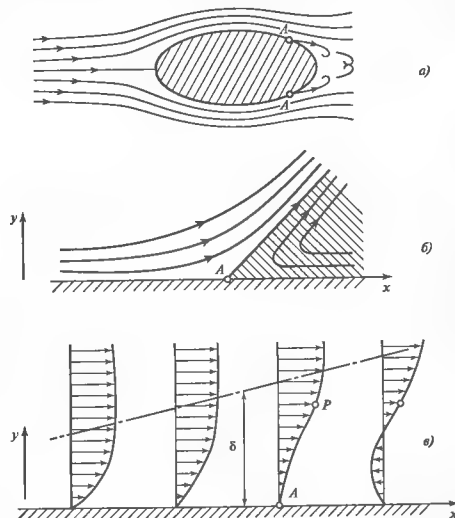


Рис. 5.6. Отрыв пограничного слоя

a — схема обтекания с отрывом пограничного слоя в точке A ; b — линии тока в окрестности точки отрыва; c — профили скорости до и после отрыва пограничного слоя

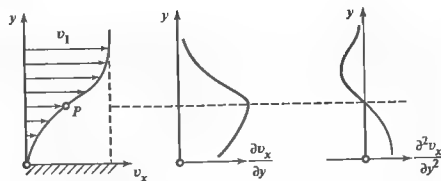


Рис. 5.7. Профиль скорости при замедленном внешнем потоке

тела идеальной жидкостью. Тогда для решения уравнений пограничного слоя обычно привлекают данные эксперимента.

Профиль скорости в пограничном слое в случае замедленных течений имеет вид, показанный на рис. 5.7. Во внешней части пограничного слоя напряжения трения ($\sigma_{yx} = \mu \partial v_x / \partial y$) с ростом координаты y уменьшаются, поэтому здесь $\partial^2 v_x / \partial y^2 < 0$. Однако во внутренней части при $dp/dx > 0$ $\partial^2 v_x / \partial y^2 > 0$, что легко доказать, записав уравнение движения для точки $y = 0$:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx}.$$

В результате такого анализа приходим к тому, что в области замедленного внешнего течения профиль скорости в пограничном слое имеет точку перегиба (рис. 5.7, точка P), в которой $\partial^2 v_x / \partial y^2 = 0$.

В точке отрыва $(\partial v_x / \partial y)_{y=0} = 0$. Из (5.7) следует, что положение этой точки на поверхности тела не зависит от числа Рейнольдса.

Отрыв пограничного слоя приводит к увеличению гидравлического сопротивления. Для предотвращения отрыва иногда применяют отсасывание пограничного слоя внутрь тела. Турбулизация этого слоя приводит к смещению точки отрыва вниз по потоку и к уменьшению силы сопротивления.

5.3. Ламинарный пограничный слой при обтекании пластины. Задача Блазиуса

Рассмотрим обтекание пластины (рис. 5.8), расположенной в потоке несжимаемой жидкости параллельно вектору скорости v_∞ . Процессы течения и теплообмена будем считать стационарными, а свойства жидкости — постоянными. Для пластины $dp/dx = 0$, и скорость внешнего потока $v_1 = v_\infty$. В нашей задаче компоненты скорости в пограничном слое будут зависеть только от x и y . Передняя кромка пластины соответствует $x = 0$ и $y = 0$. Поток

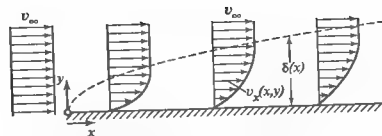


Рис. 5.8. Динамический пограничный слой при обтекании пластины

направлен вдоль оси Ox . Примем, что в этом направлении длина пластины $l_0 \rightarrow \infty$. Так как в теории пограничного слоя процесс переноса импульса в продольном направлении не учитывается, то распределение скорости в данном сечении x не будет зависеть от состояния жидкости вниз по потоку (за пределами данного сечения). Длина l_0 не должна входить в решение задачи. Это возможно тогда, когда переменные x' и y'' (см. § 5.2) образуют такую безразмерную переменную η (переменную Блазиуса), что

$$\eta = \frac{y''}{\sqrt{x'}} = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x},$$

где Re_x — местное число Рейнольдса;

$$Re_x = v_\infty x / \nu.$$

Запишем уравнения Прайдля в размерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0; \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} v_x &= v_y = 0 \quad \text{при } y = 0, x > 0; \\ v_x &= v_\infty \quad \text{при } y = \infty. \end{aligned}$$

Поставленная задача (нахождение v_x , v_y и коэффициента трения c_f) была решена Блазиусом в 1908 г. Уравнения Прайдля он преобразовал в одно обыкновенное дифференциальное уравнение для такой функции $\varphi(\eta)$, что $\varphi'(\eta) = v_x / v_\infty$. Уравнение Блазиуса имеет вид

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0. \quad (5.11)$$

При этом можно записать следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \\ \varphi' &= 1 \quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Уравнение (5.11) можно получить следующим образом. Введем такую функцию тока $\psi(x, y)$, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Переходя к переменной η , получаем

$$v_x = v_{\infty} \varphi'(\eta); \quad v_y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_{\infty} \nu}{x}} (\eta \varphi' - \varphi),$$

где φ — безразмерная функция тока;

$$\varphi = \frac{\psi}{\sqrt{v_{\infty} \nu x}}.$$

Подставив выражения для v_x и v_y в (5.10), получим (5.11).

Решение уравнения (5.11) — нелинейного уравнения третьего порядка можно получить численным методом. В результате будем иметь таблицу значений $\varphi, \varphi', \varphi''$ (табл. 5.1).

График зависимости $v_x/v_{\infty} = f(\eta)$ показан на рис. 5.9, где теоретические расчетные значения сопоставлены с опытными данными.

Из табл. 5.1 следует, что при $\eta = 5$ $\varphi'(\eta) = v_x/v_{\infty} \approx 0,99$. Отсюда

$$\delta/x = 5/\sqrt{\text{Re}_x}. \quad (5.12)$$

Видно, что $\delta \sim \sqrt{x}$ и $\delta \sim v_{\infty}^{-1/2}$. Теперь можно рассчитать коэффициент трения:

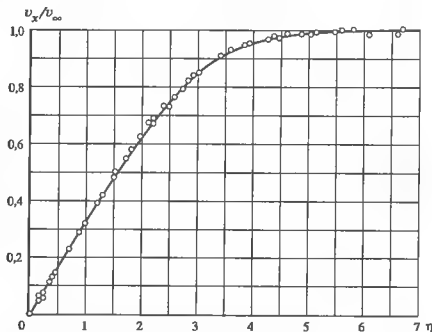


Рис. 5.9. График зависимости $v_x/v_{\infty} = f(\eta)$

Таблица 5.1. Некоторые значения φ, φ' и φ''

η	φ	φ'	φ''	η	φ	φ'	φ''
0	0	0	0,33206	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
4,6	2,88826	0,98269	0,02948	6,0	4,27964	0,99898	0,00240

Примечание. Значения φ, φ' и φ'' при η от 1,2 до 4,4 не приведены.

$$c_f = \frac{2\sigma_c}{\rho v_{\infty}^2} = 2 \frac{\mu}{\rho v_{\infty}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2}{\sqrt{\text{Re}_x}} [\varphi''(\eta)]_{\eta=0}.$$

Воспользовавшись табл. 5.1, окончательно получим

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (5.13)$$

Видно, что c_f уменьшается с ростом x и скорости v_{∞} : $c_f \sim x^{-1/2}$ и $c_f \sim v_{\infty}^{-1/2}$. Напряжение трения σ_c с ростом скорости увеличивается:

$$\sigma_c \sim v_{\infty}^{3/2}.$$

Положения теории пограничного слоя справедливы, если $\delta \ll x$. Сравнение с результатами решения полных уравнений Навье — Стокса показывает, что это условие выполняется, если $\text{Re}_x \geq 1500$. Если $\text{Re}_x \geq \text{Re}_{x \text{ кр}}$ ($\text{Re}_{x \text{ кр}}$ — критическое число Re_x), то режим течения в пограничном слое нарушается (ламинарное течение переходит в турбулентное) и полученные здесь формулы теряют силу.

5.4. Теоретический анализ теплового пограничного слоя

Преобразование уравнения энергии. Будем рассматривать плоский пограничный слой (см. рис. 5.3). Предположим, что температура поверхности ($T_c = \text{const}$) отличается от T_{∞} . Пренебрегая тепловой трения и считая $\lambda = \text{const}$, записываем уравнение энергии в безразмерном виде (см. § 4.7):

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau'} + v'_x \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2} \right). \quad (5.14)$$

Здесь число Пекле

$$\text{Pe} = v_{\infty} l_0 / a, \quad a \theta' = (T - T_c) / (T_{\infty} - T_c).$$

В качестве масштаба измерения по оси Oy выберем толщину теплового пограничного слоя δ_T . Тогда правая часть (5.14) будет выглядеть так

$$\frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x'^2} + \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{l_0}{\delta_T} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2}, \quad (5.14a)$$

$$\text{где } y''_1 = \frac{y'}{\delta_T} = y' \frac{l_0}{\delta_T}.$$

Производные $\partial^2 \theta' / \partial x'^2$ и $\partial^2 \theta' / \partial y'^2$ одного порядка. Так как $l_0 \gg \delta_T$, то при $\text{Pe} \rightarrow \infty$ первая часть суммы (5.14a) исчезает, а вторая будет иметь порядок единицы [как и другие слагаемые (5.14)]. Отсюда

$$\delta_T / l_0 = 1 / \sqrt{\text{Pe}}.$$

Так как $\text{Pe} = \text{RePr}$, то

$$\delta_T / \delta = 1 / \sqrt{\text{Pr}}.$$

Тогда $y'_1 = y'' \sqrt{\text{Pr}}$. Учитывая все эти преобразования, получаем уравнение энергии для пограничного слоя:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau'} + v'_x \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y''} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y''^2}. \quad (5.15)$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \theta' &= 0 & \text{при } y'' = 0, 0 \leq x' \leq 1; \\ \theta' &= 1 & \text{при } y'' \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При решении нестационарных задач теплообмена необходимо задать начальное условие для температуры. Для стационарных задач из (5.15) с учетом (5.7) и (5.8) следует, что $\theta' = F(x', y'', \text{Pr})$.

Для коэффициента теплоотдачи имеем с учетом того, что $\theta = T - T_c$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{q_c}{T_c - T_{\infty}} = \frac{\lambda}{T_{\infty} - T_c} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\lambda}{l_0} \frac{\partial \theta'}{\partial y''} \Big|_{y''=0} = \frac{\lambda}{l_0} \frac{\partial \theta'}{\partial y''} \Big|_{y''=0} \frac{\partial y''}{\partial y'} = \\ &= \varphi_1(x', \text{Pr}) \frac{\lambda}{l_0} \sqrt{\text{Re}}. \end{aligned}$$

Введем число Нуссельта:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l_0}{\lambda}.$$

Для всех ламинарных пограничных слоев справедлива зависимость

$$\text{Nu} = \varphi_1 \left(\frac{x}{l_0}, \text{Pr} \right) \sqrt{\text{Re}}. \quad (5.16)$$

Из (5.16) видно, что коэффициент теплоотдачи α пропорционален $\sqrt{v_{\infty}}$. Этот вывод мы получили, не обращаясь к решению уравнения энергии. Функцию $\varphi_1(x', \text{Pr})$, а также введенную ранее функцию $\varphi(x')$ можно получить при решении уравнений пограничного слоя (или экспериментально).

Аналогия процессов теплообмена и гидродинамики. Рассмотрим частные случаи динамического и теплового пограничных слоев при продольном стационарном обтекании изотермической пластины ($T_c = \text{const}$).

В безразмерном виде математическое описание гидродинамической задачи (см. § 5.2) имеет вид:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0;$$

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2};$$

$$\begin{aligned} v'_x &= 0, \quad v'_y = 0 & \text{при } y' = 0; \\ v'_x &= 1 & \text{при } y' = \infty. \end{aligned}$$

Для тепловой задачи имеем

$$v'_x \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2};$$

$$\begin{aligned} \theta' &= 0 & \text{при } y' = 0; \\ \theta' &= 1 & \text{при } y' = \infty. \end{aligned}$$

Далее положим $\text{Pr} = 1$ и $\theta' = v'_x$. Тогда уравнение неразрывности и уравнение энергии запишутся так:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0;$$

$$\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \theta'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y'^2}.$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\theta' = 0, v_y' = 0 \quad \text{при } y' = 0;$$

$$\theta' = 1 \quad \text{при } y' = \infty.$$

Последняя задача отличается от гидродинамической только обозначениями (вместо θ' в гидродинамической будет v_x'). Ясно, что решения этих двух задач тождественны. Отсюда следует, что при обтекании изотермической пластины в случае $Pr = 1$ безразмерные профили температуры и скорости совпадают:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c}. \quad (5.17)$$

Другими словами, в этом случае имеет место аналогия процессов переноса импульса и теплоты. Имеем в виду, что

$$\sigma_c = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0};$$

$$c_f = \frac{2\sigma_c}{\rho v_\infty^2}; \quad q_c = \alpha(T_c - T_\infty);$$

$\mu c_p = \lambda$, из (5.17) нетрудно получить

$$St = c_f/2, \quad (5.17a)$$

где число Стантона

$$St = \frac{\alpha}{\rho v_\infty c_p}.$$

5.5. Тепловой пограничный слой при обтекании пластины.

Задача Польгаузена

Температурное поле в пограничном слое находится в результате решения уравнения энергии:

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

где $\theta = (T - T_\infty)/(T_c - T_\infty)$.

Граничные условия будут иметь вид:

$$\theta|_{y=0} = 1; \quad \theta|_{y \rightarrow \infty} = 0.$$

Поставленная задача была решена Э. Польгаузеном (1921 г.).

Уравнение энергии преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение, если производные, входящие в него, выразить через производ-

ные по переменной η и учесть вытекающие из решения гидродинамической задачи соотношения для v_x и v_y :

$$v_x = v_\infty \Phi'(\eta);$$

$$v_y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_\infty \nu}{x}} (\eta \Phi' - \Phi).$$

В результате получается дифференциальное уравнение

$$\theta'' + \frac{1}{2} Pr \Phi \theta' = 0. \quad (5.18)$$

Из (5.11) найдем

$$\Phi = -2 \frac{\Phi'''}{\Phi''}.$$

Подставляя последнее соотношение в (5.18), получаем

$$\frac{\theta''}{\theta'} = Pr \frac{\Phi'''}{\Phi''}. \quad (5.18a)$$

После интегрирования (5.18a) с учетом граничных условий найдем

$$\theta = 1 - \frac{\int_0^\eta (\Phi'')^{Pr} d\eta}{\int_0^\infty (\Phi'')^{Pr} d\eta}. \quad (5.19)$$

При $Pr = 1$

$$\theta = 1 - \frac{\Phi'(\eta)}{\Phi'(\infty)} = 1 - \Phi'(\eta),$$

откуда следует (5.17). При этом $\delta = \delta_t$.

Результаты вычисления θ по (5.19) в графической форме приведены на рис. 5.10. Из решения задачи вытекает, что $\delta_t < \delta$ при $Pr > 1$ и $\delta_t > \delta$ при $Pr < 1$.

Для локального числа Нуссельта Nu_x нетрудно получить¹

$$Nu_x = F(Pr) \sqrt{Re_x}.$$

Здесь $F(Pr) = -\theta'|_{\eta=0}$. При $Pr = 1$ и $\eta = 0$ $\theta' = -\Phi'' = -0,332$ и $Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x}$.

Для чисел $Pr = 0,6 \dots 500$ получена формула, аппроксимирующая результаты вычисления $F(Pr)$:

¹ Здесь $Nu_x = \alpha x/\lambda$; $Re_x = v_\infty x/\nu$.

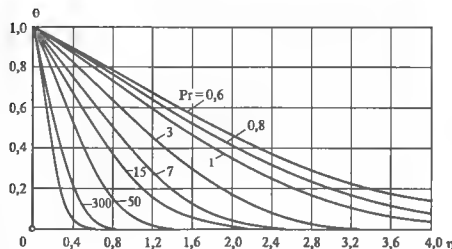


Рис. 5.10. Распределение температуры в пограничном слое при различных значениях числа Прандтля

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}. \quad (5.20)$$

В этом случае

$$\delta_T / \delta \approx 1 / \sqrt[3]{Pr}. \quad (5.21)$$

Коэффициент теплоотдачи прямо пропорционален $\sqrt{v_\infty}$ и обратно пропорционален $\sqrt{x}$. Уменьшение α с увеличением x объясняется ростом толщины δ_T .

Предположим, что $l \gg \delta, l \gg \delta_T$. Найдем средний коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$. При $\Delta T = \text{const}$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha \, dx = 0,332 \lambda \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu}} \sqrt[3]{Pr} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

откуда получаем

$$\bar{Nu} = 0,664 \sqrt{Re} \sqrt[3]{Pr}, \quad (5.22)$$

где $\bar{Nu} = \bar{\alpha} l / \lambda$; $Re = v_\infty l / \nu$.

При $Pr \rightarrow \infty$ можно получить аналитическое решение задачи. В этом случае $\delta \gg \delta_T$ («утопленный» тепловой пограничный слой). Скорость в пределах теплового пограничного слоя по оси Oy изменяется линейно, и

$$\varphi''(\eta) = \varphi''(\eta)|_{\eta=0} = 0,332. \quad (5.22a)$$

Интегрируя дважды (5.22a), находим

$$\varphi = \frac{1}{2} 0,332 \eta^2.$$

Это соотношение подставим в (5.18), в результате чего получим уравнение

$$\theta'' + 0,083 Pr \eta^2 \theta' = 0. \quad (5.22b)$$

При интегрировании (5.22b) получаем

$$\theta'|_{\eta=0} = - \left(\int_0^\infty e^{-0,02767 \eta^3 Pr} d\eta \right)^{-1}. \quad (5.23)$$

Обозначим $t = 0,02767 \eta^3 Pr$, откуда

$$\eta = \frac{t^{1/3}}{0,02767^{1/3} Pr^{1/3}},$$

$$d\eta = \frac{1}{3 \cdot 0,02767^{1/3} Pr^{1/3}} t^{-2/3} dt.$$

Тогда интеграл в (5.23) будет представлять собой табулированную гамма-функцию:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

В нашем случае $x = 1/3$. Из таблиц гамма-функций $\Gamma(1/3) = 2,6801$. Так как

$$Nu_x = - \sqrt{Re_x} \theta'|_{\eta=0},$$

окончательно имеем

$$Nu_x = 0,339 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}.$$

Важно подчеркнуть, что приведенные в этом параграфе формулы для числа Нуссельта справедливы для жидкости с постоянными свойствами при температуре пластины $T_c = \text{const}$. Кроме того, они теряют силу, если $Re_x > Re_{кр} = 5 \cdot 10^5$.

Если перепады температуры в пограничном слое невелики, то в первом приближении свойства жидкости можно считать постоянными и относить их к температуре, равной средней температуре пограничного слоя T_{cp} , причём $T_{cp} = 0,5(T_c + T_\infty)$.

Теоретическое решение задачи о теплообмене при продольном обтекании пластины в случае $q_c = \text{const}$ приводит к формуле

$$Nu_x = 0,46 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}. \quad (5.24)$$

5.6. Автомодельные решения уравнений пограничного слоя

Рассмотрим плоскую задачу гидродинамики и теплообмена при стационарном внешнем обтекании тела несжимаемой жидкостью с постоянными свойствами. Задана форма тела, его характерный размер l_0 и скорость

набегающего потока v_0 . Пусть требуется теоретически найти коэффициенты трения и теплоотдачи. Эти коэффициенты найдем, если будут известны поля скорости $v_x(x, y)$ и температуры $T(x, y)$.

Для нахождения поля скорости при малых числах $Re = v_0 l_0 / \nu$ необходимо численно решить систему трех уравнений с частными производными: уравнение неразрывности и два уравнения Навье—Стокса. После этого можно найти поле температуры при различных значениях числа Pr . В целом решение этой задачи является сложным и дорогостоящим.

Для больших чисел Re можно воспользоваться более простыми уравнениями пограничного слоя. Численное решение задачи упрощается, так как при этом вместо четырех переменных величин ($x/l_0, y/l_0, Re, Pr$) имеем

три ($x/l_0, y/l_0 \sqrt{Re}, Pr$), а зависимости коэффициента трения и числа Nu от Re известны (см. § 5.2):

$$c_f \sim Re^{-1/2}; \quad Nu \sim Re^{1/2}.$$

Наконец, задача еще более упрощается, если уравнения Прандтля и уравнение энергии удастся свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям. То, что это возможно сделать, мы видели на примере задач Блазиуса и Польгаузена (см. § 5.3 и 5.5). В этих задачах независимые переменные x, y и постоянные v_∞ и ν сводятся к одной независимой переменной $\eta = y / x \sqrt{Re_x}$.

Такое решение, при котором задачу, содержащую несколько независимых переменных (например, две), удастся свести к задаче с одной независимой переменной, называется *автомодельным*, а сама переменная называется *автомодельной переменной*. Таким образом, решения гидродинамической и тепловой задач при обтекании пластины, когда $df/dx = 0$, являются автомодельными.

Автомодельные решения имеют место и при наличии градиента давления вдоль потока, когда скорость внешнего потока зависит от координаты x в соответствии со степенным законом: $v_1(x) = Cx^m$, где C и m — постоянные величины. Случай $m = 0$ соответствует продольному обтеканию пластины; случай $m = 1$ — обтеканию пластины, поставленной поперек потока (рис. 5.11), или области течения в непосредственной близости от передней критической точки круглого цилиндра, а также любого другого притупленного цилиндрического тела.

Изменение скорости во внешнем потоке в соответствии со степенным законом наблюдается в окрестности передней критической точки при обтекании клиновидного тела (рис. 5.12) с углом раствора $\pi\beta$, причем $\beta = 2m/(m+1)$.

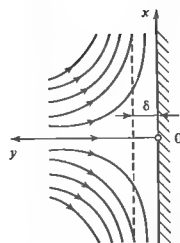


Рис. 5.11. Обтекание пластины, поставленной поперек потока

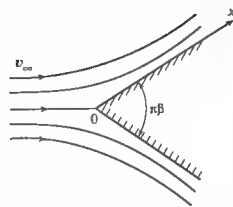


Рис. 5.12. Обтекание клиновидного тела

Если ввести новую переменную η и безразмерную функцию тока ϕ , определяемые как

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{v_1(x)}{\nu x}}; \quad (5.25)$$

$$\phi = \frac{\psi}{\sqrt{\frac{2\nu x}{m+1}} v_1(x)}, \quad (5.26)$$

то для функции ϕ из уравнений Прандтля получим *уравнение Фолкнера—Скэн*:

$$\phi''' + \phi\phi'' + \beta(1 - \phi'^2) = 0. \quad (5.27)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi = 0, \quad \phi' = 0 & \quad \text{при } \eta = 0; \\ \phi' = 1 & \quad \text{при } \eta = \infty. \end{aligned}$$

Уравнение (5.27) переходит в уравнение Блазиуса, если положить $\beta = 0$ или $m = 0$ и учесть, что новая переменная η в $\sqrt{2}$ раз меньше переменной Блазиуса.

Решив задачу Фолкнера—Скэн, можно получить представление о том, как влияет параметр β на распределение продольной составляющей скорости по толщине пограничного слоя δ , и найти значение δ . Оказывается (рис. 5.13), что при ускоряющемся течении во внешнем потоке ($\beta > 0$) профили скорости более заполнены, чем при обтекании пластины ($\beta = 0$). При замедленном течении ($\beta < 0$) в профиле скорости наблюдается точка перегиба, а при $\beta = -0,199$ градиент скорости на стенке равен нулю, что соответствует состоянию потока перед отрывом пограничного слоя. Следова-

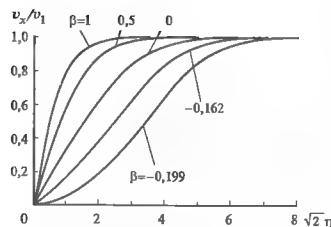


Рис. 5.13. Распределение безразмерной скорости по толщине пограничного слоя при различных значениях β

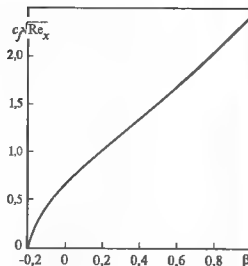


Рис. 5.14. Зависимость $c_f \sqrt{Re_x} = f(\beta)$

тельно, безотрывное обтекание тела возможно лишь при очень малом замедлении внешнего потока. Как видно из рис. 5.13, безразмерная толщина пограничного слоя уменьшается с увеличением β . При $\beta = 1$

$$\delta = 2,4 \sqrt{\nu/C}.$$

Для круглого цилиндра с диаметром d $C = 4v_\infty/d$ и (если $Re = v_\infty d/\nu$) $\delta/d = 1,2/\sqrt{Re}$.

В § 5.2 было доказано, что для любого ламинарного пограничного слоя коэффициент трения $c_f \sim Re^{-1/2}$. Для пластины $c_f \sqrt{Re_x} = 0,664$, а для клиновидного тела $c_f \sqrt{Re_x} = f(\beta)$ (рис. 5.14).

Располагая результатами расчета динамического пограничного слоя, можно провести анализ процесса теплообмена для случая изменения скорости v_1 по степенному закону: $v_1(x) = Cx^m$.

При постоянной температуре поверхности тела уравнение энергии преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение, которое имеет такой же вид, как в задаче Польгаузена (см. § 5.5). Следует только иметь в виду, что в данном случае η и $\varphi(\eta)$ — величины, рассчитываемые по формулам (5.25) и (5.26). Функцию $\varphi(\eta)$ можно определить численным интегрированием $\varphi'(\eta)$ при данных значениях β . Результаты расчета показывают, что в частном случае $Pr = 1$ толщины δ_t и δ совпадают только при $\beta = 0$, при $\beta > 0$ $\delta_t > \delta$, а при $\beta < 0$ $\delta_t < \delta$. В случае $\beta < 1$ качественно зависимость $\alpha = \alpha(x)$ имеет такой же характер, как и при продольном обтекании пластины. Однако в случае $\beta > 1$ коэффициент теплоотдачи растет с увеличением x , а при $x = 0$ $\alpha = 0$.

В § 5.4 было доказано, что для любого ламинарного пограничного слоя число Нуссельта $Nu \sim \sqrt{Re}$. Для пластины было получено: $Nu_x/\sqrt{Re_x} = 0,332 Pr^{1/3}$. Для клиновидного тела решение тепловой задачи дает:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = F(Pr, m),$$

где

$$Re_x = v_1 x/\nu; \quad Nu_x = \alpha x/\lambda;$$

$$F(Pr, m) \approx 0,56 Pr^{0,35} + 0,02 \beta \frac{(\beta + 0,2)^{0,11}}{(2 - \beta)^{1/2}}.$$

В результате расчета получено, что вблизи передней критической точки цилиндра α — постоянная величина, а в диапазоне $0,7 \leq Pr \leq 500$

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 1,14 Pr^{0,364} \sqrt{Re}. \quad (5.28)$$

Если температура поверхности тела изменяется по степенному закону

$$T_c - T_\infty = Ax^n,$$

распределение температуры в пограничном слое зависит от β , n и числа Pr .

На рис. 5.15 показано изменение профиля температуры в пограничном слое на пластине при изменении n в частном случае $Pr = 0,7$. Из рисунка видно, что при $n = -0,5$ производная $(\partial T/\partial y)_y = 0 = 0$ и, следовательно, $q_c = 0$, хотя при этом температурный напор $T_c(x) - T_\infty$ не равен нулю. При $n > 0$ с увеличением n градиент температуры у стенки возрастает, что приводит к увеличению числа Нуссельта по сравнению со случаем изотермической пластины. При некотором значении n ($n < 0$) $q_c < 0$, т.е. тепловой поток направлен от жидкости к стенке, хотя $T_c > T_\infty$. Отмеченные эффекты объясняются тем, что при быстром изменении температуры стенки на формирование температурного поля оказывает влияние предистория потока и профиль температуры успевает перестроиться только вблизи стенки. Для числа Нуссельта в случае $\beta = 0$ (обтекание пластины) получена формула

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,33(2n + 1)^{0,37} Pr^{1/3}.$$

Если $-n > 0,5$, то $Nu_x < 0$ ($\alpha < 0$). В этом случае тепловой поток от жидкости к стенке можно рассчитать, зная зависимость $q_c(x)$.

На рис. 5.16 показана зависимость $Nu_x/\sqrt{Re_x}$ от параметра n и β в случае $Pr = 0,7$.

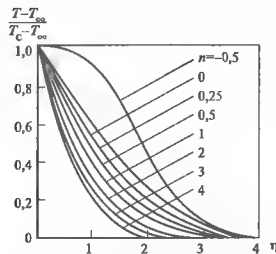


Рис. 5.15. Распределение безразмерной температуры в пограничном слое на пластине при степенном законе изменения температуры поверхности и $Pr = 0,7$

Мы рассмотрели некоторые автомодельные решения для плоского пограничного слоя. Согласно *теореме Степанова—Манглера*, существуют такие преобразования переменных, что задачу изучения осесимметричного пограничного слоя (например, в случае обтекания снаряда или ракеты) можно свести к задаче изучения плоского пограничного слоя.

Автомодельные решения возможны и тогда, когда через пористую стенку осуществляется вдувание и отсасывание газа из пограничного слоя. Вдувание газа в пограничный слой проводится для защиты поверхности тела от чрезмерного повышения температуры. Отсасывание газа позволяет сохранить течение в пограничном слое ламинарным при более высоких числах Re , чем в случае непроницаемой поверхности. С помощью этого способа можно также избежать отрыва пограничного слоя при положительных ($dp/dx > 0$) градиентах давления.

При вдувании газа толщина пограничного слоя растет, и в определенных условиях в профиле скорости наблюдается точка перегиба, что при обтекании пластины ($dp/dx = 0$) приводит к более раннему переходу к турбулентному течению в пограничном слое, а при $dp/dx > 0$ — к его отрыву. Коэффициенты трения и теплоотдачи с увеличением скорости вдувания уменьшаются.

Отсасывание газа из пограничного слоя приводит к уменьшению толщины динамического и теплового пограничных слоев и к увеличению c_p и α .

Наконец отметим, что посредством таких преобразований, как *преобразования Дородницына, Иллиингворта—Стюарта—Хоарта—Лиза*, уравнения пограничного слоя в случае переменных свойств жидкости удается свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям [22, 34, 53].

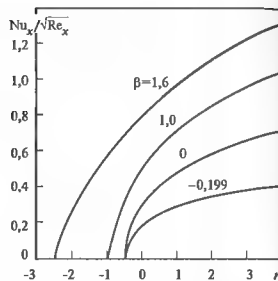


Рис. 5.16. Зависимость $Nu_x / \sqrt{Re_x} = f(\eta)$ при различных значениях β

5.7. Пограничный слой при обтекании тела сжимаемым газом

При значении числа Маха $M \leq 0,25$ течение газа практически не отличается от течения несжимаемой («капельной») жидкости (см. § 4.3). Газ называется сжимаемым, если его скорость такова, что $M > 0,25$. Для сжимаемого газа характерными являются следующие особенности. Во-первых, при натекании газа на поверхность тупоносого тела (ракеты, космического корабля и др.) в окрестности лобовой точки вследствие его сжатия происходит выделение значительного количества теплоты, в связи с чем в этой области потока температура достигает высоких значений. Например, если температура набегающего потока воздуха $T_\infty = 300$ К, а число $M_\infty = 5$, то в пристенном слое температура равна приблизительно 1800 К. С увеличением числа M эта температура возрастает и может достигнуть значения, при котором возникает диссоциация молекул газа и имеют место другие физико-химические превращения. Во-вторых, при больших числах M в пограничном слое наблюдаются большие градиенты скорости, в связи с чем оказываются большими силы внутреннего трения. Из-за действия сил трения происходит диссипация кинетической энергии газа, т.е. эта энергия превращается в теплоту. Выделение теплоты приводит к повышению температуры газа. В этом случае в уравнении энергии (см. § 4.6) нельзя пренебрегать диссипативной функцией ϵ . В-третьих, из-за больших перепадов температуры (в общем случае и давления) в пограничном слое физические свойства газа нельзя считать постоянными. Такие свойства газа, как плотность ρ , вязкость μ , теплопроводность λ , могут сильно изменяться при переходе от одной точки пограничного слоя к другой. Отмеченные особенности учитываются в теории пограничного слоя сжимаемого газа.

В расчетах процессов теплообмена в сжимаемом газе используется такое понятие, как *энтальпия торможения* $h_{0\infty}$, определяемая по формуле

$$h_{0\infty} = h_\infty + v_\infty^2 / 2, \quad (5.29)$$

где h_∞ и v_∞ — энтальпия и скорость набегающего потока.

Температура, соответствующая $h_{0\infty}$, называется *температурой торможения* $T_{0\infty}$. Часто для газа можно принять $c_p = \text{const}$. Тогда $h_{0\infty} - h_\infty = c_p(T_{0\infty} - T_\infty)$ и

$$T_{0\infty} = T_\infty + \frac{v_\infty^2}{2c_p}. \quad (5.29a)$$

Имея в виду, что для идеального газа скорость звука $a_\infty = \sqrt{kRT_\infty}$, где $k = c_p / c_v$, $R = c_p - c_v$ из (5.29a) получаем

$$\frac{T_{0\infty}}{T_{\infty}} = 1 + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2.$$

Здесь $M_{\infty} = v_{\infty}/a_{\infty}$. При значении числа $Pr = 1$ температура $T_{0\infty}$ равна температуре теплоизолированной поверхности тела (доказательство см. ниже), которая называется *адиабатной температурой стенки* $T_{a,c}$. Следовательно, если $Pr = 1$, то $T_{a,c} = T_{0\infty}$. Величина r , определяемая как

$$r = \frac{T_{a,c} - T_{\infty}}{T_{0\infty} - T_{\infty}},$$

называется *коэффициентом восстановления температуры*. Теоретически получено, что при существовании ламинарного пограничного слоя на пластине в области изменения числа Pr от 0,5 до 2

$$r = \sqrt{Pr}.$$

Теплота трения существенно сказывается на распределении температуры в пограничном слое. Изменяя температуру пластины, омываемой потоком газа с высокой скоростью, можно получить кривые, показанные на рис. 5.17. Оказывается, что, если температура пластины $T_c > T_{a,c}$, тепловой

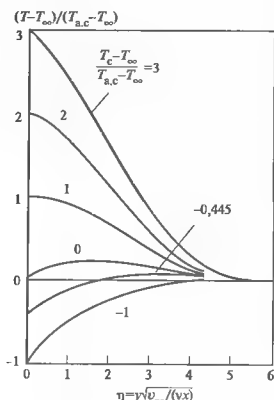


Рис. 5.17. Изменение температуры в пограничном слое при различных значениях безразмерной температуры пластины $(T_c - T_{\infty}) / (T_{a,c} - T_{\infty})$ и числе $Pr = 0,7$

поток направлен от стенки к газу ($q_c > 0$). Когда $T_c = T_{a,c}$, градиент температуры на стенке равен нулю и $q_c = 0$, хотя при этом температура T_c больше температуры набегающего потока газа T_{∞} . Наконец, в случае $T_c < T_{a,c}$ градиент температуры на стенке больше нуля, что говорит о том, что тепловой поток направлен от газа к стенке, хотя при этом стенка может иметь температуру $T_c > T_{\infty}$.

Очевидно, что если бы мы пытались вычислять q_c по обычной формуле $q_c = \alpha(T_c - T_{\infty})$, то пришли бы к результатам, противоречащим действительности. Поэтому при высоких скоростях движения газа, когда существенно диссипация кинетической энергии, коэффициент теплоотдачи следует относить к разности между температурой стенки и ее адиабатной температурой, т.е. считать

$$\alpha = \frac{q_c}{T_c - T_{a,c}}. \quad (5.30)$$

Для адиабатной температуры стенки справедлива формула

$$\frac{T_{a,c}}{T_{\infty}} = 1 + r \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2,$$

из которой следует, что при $M_{\infty} \rightarrow 0$ $T_{a,c} = T_{\infty}$. Тогда формула (5.30) соответствует обычному (справедливому при малых скоростях движения газа) определению коэффициента теплоотдачи.

Формула (5.30) применяется также для расчета процесса теплообмена при обтекании тела «капельной» жидкостью, если ее скорость такова, что нельзя пренебрегать теплотой трения. В этом случае адиабатная температура стенки вычисляется по формуле

$$\frac{T_{a,c}}{T_{\infty}} = 1 + \frac{1}{2} r E_c.$$

где E_c — число Эккерта;

$$E_c = \frac{v_{\infty}^2}{c_p T_{\infty}}.$$

Для теоретического анализа процессов переноса теплоты и импульса при продольном обтекании пластины сжимаемым газом возьмем уравнение стационарного пограничного слоя, которые запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0; \quad (5.31)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right); \quad (5.32)$$

$$\rho v_x \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (5.33)$$

Уравнение (5.31) является уравнением неразрывности; уравнение (5.32) — уравнением движения в проекции на ось Ox , которая направлена так же, как в задачах Блазуса и Польгаузена (см. § 5.3 и 5.5); уравнение (5.33) — уравнением энергии. В этих уравнениях учтено, что ρ , λ и μ — функции температуры. Последнее слагаемое в правой части (5.33) — диссипативная функция для пограничного слоя.

Рассмотрим случай обтекания изотермической пластины ($T_c = \text{const}$) при значении числа $Pr = 1$. Уравнение энергии (5.33) преобразуем так, чтобы в нем вместо h фигурировала энтальпия торможения

$$h_0 = h + v_x^2/2,$$

причем h , h_0 и v_x — функции координат x и y .

Уравнение движения (5.32) почленно умножим на v_x . Затем правую часть этого уравнения запишем так:

$$v_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \right) - \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2.$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (5.33):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h_0}{\partial y} - \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \right].$$

Преобразованное уравнение движения сложим с преобразованным уравнением энергии. После простых выкладок получим новое уравнение энергии, справедливое для $Pr = 1$:

$$\rho v_x \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y} \right). \quad (5.34)$$

В общем случае, когда число $Pr \neq 1$, уравнение энергии для пограничного слоя в сжимаемом газе имеет вид

$$\rho v_x \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \right]. \quad (5.35)$$

Уравнение (5.35) превращается в (5.34), если принять $Pr = 1$.

При $T_c = \text{const}$ энтальпия газа на стенке $h_c = \text{const}$. Тогда можно ввести текущую избыточную энтальпию торможения $h'_0 = h_0 - h_c$ и $h'_{0\infty} = h_{0\infty} - h_c$, где $h_{0\infty}$ определяется по (5.29).

Теперь запишем граничные условия для v_x и h'_0 :

$$v_x = 0, h'_0 = 0 \quad \text{при } y = 0, x > 0;$$

$$v_x = v_\infty, h'_0 = h'_{0\infty} \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Видно, что граничные условия для скорости и избыточной энтальпии отличаются только обозначениями функций (v_x или h'_0). Так, уравнение энергии (5.34) (с заменой в нем h_0 на h'_0) аналогично уравнению движения (5.32), можно утверждать, что в безразмерном виде

$$\frac{h'_0 - h_c}{h'_{0\infty} - h_c} = \frac{v_x}{v_\infty}. \quad (5.36)$$

Здесь $h_0 = h_0(x, y)$ и $v_x = v_x(x, y)$. Положим $c_p = \text{const}$ и продифференцируем

(5.36) по y . Учтем, что $q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$, $\sigma_c = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}$, а $\lambda/\mu = c_p$ (так как в нашем случае $Pr = 1$).

Тогда получим

$$\frac{q_c}{T_c - T_{0\infty}} = c_p \frac{\sigma_c}{v_\infty}. \quad (5.37)$$

Для теплоизолированной стенки (пластины) $q_c = 0$. Из (5.37) следует, что в этом случае $T_c = T_{0\infty}$. Таким образом, мы доказали, что в случае $Pr = 1$ адиабатная температура стенки $T_{ac} = T_{0\infty}$.

Выражая σ_c через коэффициент трения c_f и учитывая, что левая часть (5.37) — коэффициент теплоотдачи α , формулу (5.37) представляем в виде

$$St = c_f/2. \quad (5.38)$$

Выше (см. § 5.4) формула (5.38) была выведена для случая медленного движения газа. Эта формула указывает на аналогию процессов теплообмена и трения в пограничном слое. Оказывается, что она имеет место и при высокой скорости движения газа, когда ρ , μ и λ — переменные величины.

При постоянных свойствах газа $St = Pr^{-2/3}$. Расчеты показывают, что зависимость числа St от числа Pr сохраняется и для переменных свойств газа при условии, что

$$St = \frac{\alpha}{\rho_\infty c_{p\infty} v_\infty} = \frac{q_c}{(T_c - T_{ac}) \rho_\infty c_{p\infty} v_\infty}.$$

Иначе говоря, при $\rho = \rho(T)$, $\mu = \mu(T)$, $\lambda = \lambda(T)$, $c_p = \text{const}$, $Pr = \text{const}$

$$St = \frac{c_f}{2} Pr^{-2/3} \quad (5.39)$$

или

$$Nu_x = \frac{q_c x}{(T_c - T_{ac}) \lambda_\infty} = \frac{c_f}{2} Re_x Pr^{1/3}$$

Если все свойства газа постоянны, $c_f = 0,664/\sqrt{Re_x}$. Решение уравнений пограничного слоя приводит к тому, что коэффициент трения c_f в (5.39) описывается формулой

$$c_f \sqrt{Re_x} = 0,664 [1 + 0,365 \sqrt{Pr} (k-1) M_\infty^2]^{0,5(n-1)}.$$

где n — показатель степени в формуле

$$\frac{\mu}{\mu_{\infty}} = \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^n$$

Для воздуха в интервале температур от 273 до 1273 К $n = 0,683$. С увеличением температуры значение n уменьшается, при высоких температурах $n = 0,5$.

Расчет теплоотдачи при обтекании изотермической пластины сжимаемым газом можно проводить, пользуясь методом *определяющей температуры* T_* , которая вычисляется по формуле Эккерта:

$$T_* = T_{\infty} + 0,5(T_c - T_{\infty}) + 0,22(T_{a,c} - T_{\infty}).$$

Зная температуру T_* , находим ρ , μ , c_p и число Pr . Найденные таким образом величины обозначим ρ_* , μ_* , c_{p*} и Pr_* . Коэффициент трения c_{f*} рассчитывается по формуле

$$c_{f*} = \frac{0,664}{\sqrt{\rho_* c_{p*} x / \mu_*}},$$

а число Стантона

$$St_* = \frac{c_{f*}}{2} Pr_*^{-2/3}.$$

По определению

$$St_* = \frac{q_c}{\rho_* c_{p*} v_{\infty}}.$$

После вычисления коэффициента теплоотдачи α плотность теплового потока q_c находят как

$$q_c = \alpha(T_c - T_{a,c}).$$

Адиабатную температуру стенки $T_{a,c}$ определяют с помощью коэффициента восстановления r_* :

$$r_* = \sqrt{Pr_*},$$

$$\text{где } r_* = \frac{2c_{p*}(T_{a,c} - T_{\infty})}{v_{\infty}^2}.$$

Указанный метод справедлив, если c_p и Pr незначительно зависят от температуры.

Если все свойства газа сильно изменяются с изменением температуры, используется метод *определяющей энтальпии* h_* , которая находится как

$$h_* = h_{\infty} + 0,5(h_c - h_{\infty}) + 0,22(h_{a,c} - h_{\infty}).$$

Коэффициент восстановления энтальпии r_h , вводимый вместо коэффициента восстановления температуры, определяется с помощью уравнения

$$r_h = \frac{2(h_{a,c} - h_{\infty})}{v_{\infty}^2} = \sqrt{Pr_*}.$$

Отсюда следует выражение для адиабатной энтальпии на стенке:

$$\frac{h_{a,c}}{h_{\infty}} = 1 + r_h \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2.$$

Коэффициент теплоотдачи относят не к разности температур, а к разности энтальпий, т.е.

$$\alpha_h = \frac{q_c}{h_c - h_{a,c}}.$$

При этом число Стантона

$$St_{h*} = \frac{\alpha_h}{\rho_* v_{\infty}} = \frac{c_{f*}}{2} Pr_*^{-2/3}.$$

Коэффициент трения c_{f*} вычисляется так же, как и в методе определяющей температуры. Свойства газа ρ_* , μ_* , c_{p*} и Pr_* находят по температуре, которая соответствует h_* .

5.8. Интегральные соотношения импульсов и энергии

В сложных случаях теплообмена (обтекание тела при сложном изменении скорости внешнего потока, вдувание охлаждающего газа через пористую стенку и др.) применяется приближенный метод расчета коэффициентов теплоотдачи и сопротивления трения. В основе метода, называемого «интегральным», лежат обыкновенные дифференциальные уравнения (интегральные соотношения), которые можно получить, проинтегрировав по толщине пограничного слоя уравнения движения и энергии. Этот метод является приближенным потому, что здесь приходится привлекать некоторые дополнительные условия, основываясь либо на аналогии с простыми задачами (например, с задачей обтекания пластины), либо на данных эксперимента.

Интегральное соотношение импульсов получено Т. Карманом в 1921 г. Это соотношение выводится следующим образом.

По закону Ньютона выразим напряжение трения в ламинарном пограничном слое в виде

$$\sigma = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

а в турбулентном пограничном слое в виде

$$\sigma = (\mu + \mu_t) \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

где μ_t — турбулентная вязкость (см. далее § 6.3).

Запишем уравнение динамического пограничного слоя, считая жидкость несжимаемой:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (5.40)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \quad (5.41)$$

Далее учтем, что

$$\frac{dp}{dx} = -\rho v_1 \frac{dv_1}{dx}, \quad (5.42)$$

где v_1 — скорость внешнего потока.

С учетом (5.40) и (5.42) уравнение (5.41) запишется в виде

$$\frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial y} = v_1 \frac{dv_1}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \quad (5.42a)$$

Уравнение неразрывности (5.40) умножим на v_1 и из полученного уравнения почленно вычтем (5.42a). Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_x(v_1 - v_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [v_y(v_1 - v_x)] = - (v_1 - v_x) \frac{dv_1}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \quad (5.43)$$

В рассмотренной в данной главе теории пограничного слоя мы принимаем, что $v_x = v_1$ при $y = \infty$. Теперь положим, что $v_x = v_1$ при $y = \delta$, где δ — конечная толщина пограничного слоя, удовлетворяющая условию $\sigma = 0$ при $y = \delta$.

Уравнение (5.43) проинтегрируем от нуля до δ . После простых преобразований получим *интегральное соотношение Кармана* в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x(v_1 - v_x) dy + \frac{dv_1}{dx} \int_0^\delta (v_1 - v_x) dy = \frac{\sigma_c}{\rho}. \quad (5.44)$$

Уравнение (5.44) можно записать более просто, если ввести *толщину вытеснения* δ_* и *толщину потери импульса* δ_{**} , где

$$\delta_* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{v_1}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho v_x}{\rho v_1}\right) dy; \quad (5.45)$$

$$\delta_{**} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{v_1}\right) \frac{v_x}{v_1} dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{v_1}\right) \frac{\rho v_x}{\rho v_1} dy. \quad (5.46)$$

Заменив верхнего предела интегрирования δ на ∞ практически не скажется на значениях δ_* и δ_{**} .

Рассмотрим смысл δ_* и δ_{**} . Так как скорость жидкости в пограничном слое меньше, чем во внешнем потоке, то расход жидкости, протекающей через данное сечение x , умень-



шается на величину $\int_0^\delta \rho(v_1 - v_x) dy$. Пусть те-

перь δ_* — толщина слоя жидкости, в котором скорость уменьшается от v_1 до нуля (рис. 5.18), причем

$$\rho v_1 \delta_* = \int_0^\delta \rho(v_1 - v_x) dy.$$

Из последнего равенства следует (5.45). Таким образом, δ_* — расстояние, на которое внешний поток оттесняется от поверхности тела из-за существования пограничного слоя. Аналогично, δ_{**} — условный слой жидкости, в котором при уменьшении скорости v_1 до нуля поток импульса уменьшается на то же значение, что и в действительном пограничном слое.

С учетом (5.45) и (5.46) уравнение (5.44) записывается в виде

$$\frac{d\delta_{**}}{dx} + \frac{\delta_{**}}{v_1} \frac{dv_1}{dx} \left(2 + \frac{\delta_*}{\delta_{**}}\right) = \frac{\sigma_c}{\rho v_1^2}. \quad (5.47)$$

Интегральное соотношение энергии было выведено Г.Н. Кружильным в 1936 г. Оно получается в результате интегрирования следующего уравнения энергии:

$$\rho c_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v_y \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (5.48)$$

где плотность теплового потока в ламинарном пограничном слое

$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$, а в турбулентном пограничном слое $q = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y}$; здесь λ_t — турбулентная теплопроводность.

Уравнение неразрывности умножим на температуру внешнего потока T_1 и полученное уравнение вычтем из (5.48). Затем преобразованное урав-

нение энергии проинтегрируем по y от нуля до δ_τ , где δ_τ — конечная толщина теплового пограничного слоя, удовлетворяющая условию $q = 0$ при $y = \delta_\tau$. Окончательно получим *интегральное соотношение Кружилина*:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_\tau} v_x (T - T_1) dy = \frac{q_c}{\rho c_p}, \quad (5.49)$$

$$\text{где } q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Уравнение (5.49) можно записать проще, если ввести *толщину потери энthalпии* $\delta_{\tau*}$:

$$\delta_{\tau*} = \int_0^{\delta_\tau} \frac{v_x}{v_1} \frac{T - T_1}{T_c - T_1} dy. \quad (5.50)$$

В (5.50) T_c — температура поверхности тела, причем $T_c = T_c(x)$. С учетом выражения (5.50) соотношение Кружилина можно записать в виде

$$\frac{d\delta_{\tau*}}{dx} + \delta_{\tau*} \left[\frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{dx} + \frac{1}{T_c - T_1} \frac{d(T_c - T_1)}{dx} \right] = \frac{q_c}{\rho c_p v_1 (T_c - T_1)}. \quad (5.51)$$

В соотношениях Кармана и Кружилина не учитывается процесс вдувания или отсоса газа через пористую стенку. Для расчета процессов трения и теплообмена при наличии вдувания или отсоса и высокой скорости газа используются обобщенные интегральные соотношения импульсов и энергии. Первое соотношение имеет вид

$$\frac{d\delta_{**}}{dx} + \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{dx} (2\delta_{**} + \delta_*) + \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} \delta_{**} - \frac{\rho_c v_n}{\rho_1 v_1} = \frac{\sigma_c}{\rho_1 v_1^2}. \quad (5.52)$$

где ρ_1 и v_1 — плотность и скорость газа при $y = \delta$; ρ_c — плотность газа при $y = 0$; v_n — поперечная составляющая скорости на поверхности тела (скорость вдувания).

Толщины δ_* и δ_{**} определяются выражениями:

$$\delta_* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho v_x}{\rho_1 v_1} \right) dy; \quad (5.53)$$

$$\delta_{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho v_x}{\rho_1 v_1} \left(1 - \frac{v_x}{v_1} \right) dy. \quad (5.54)$$

Интегральное соотношение энергии записывается в виде

$$\frac{d\delta_{\tau*}}{dx} + \delta_{\tau*} \left[\frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{dx} + \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{1}{h_c - h_{01}} \frac{d(h_c - h_{01})}{dx} \right] - \frac{\rho_c v_n}{\rho_1 v_1} = \frac{q_c}{\rho_1 v_1 (h_c - h_{01})}, \quad (5.55)$$

где h_c и h_{01} — энтальпии газа соответственно на стенке и торможения в точке $y = \delta$;

$$\delta_{\tau*} = \int_0^{\delta_\tau} \frac{\rho v_x}{\rho_1 v_1} \frac{h_c - h_{01}}{h_c - h_{01}} dy. \quad (5.56)$$

При $\rho = \text{const}$, $c_p = \text{const}$ и малой скорости газа формула (5.56) превращается в (5.50).

Чтобы понять, как практически используются выведенные соотношения, рассмотрим основные положения *интегрального метода Кармана—Польгаузена*. В этом методе принимается, что распределение безразмерной скорости v_x/v_1 в пограничном слое подчиняется зависимости вида $v_x/v_1 = f(y/\delta)$. С подобного типа распределением скорости мы ранее имели дело при изучении автомобильных решений уравнений пограничного слоя. Обозначим $\eta = y/\delta$. По Польгаузену,

$$v_x/v_1 = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4,$$

где коэффициенты a_0 — a_4 находятся с помощью граничных условий.

Очевидно, что при $\eta = 0$ $v_x/v_1 = 0$. При $\eta = 1$ $v_x/v_1 = 1$; $\partial(v_x/v_1)/\partial\eta = 0$ и $\partial^2(v_x/v_1)/\partial\eta^2 = 0$. Последние три условия являются условиями сопряжения скорости в пограничном слое со скоростью внешнего потока. Недостающее пятое условие (у нас пять неизвестных коэффициентов) можно дополнить, применив (5.41) к условиям на стенке. Тогда при $\eta = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{v_x}{v_1} \right) = -\frac{\delta^2}{v} \frac{dv_1}{dx} = -\lambda(x),$$

где $\lambda(x) = (\delta^2/v)/(dv_1/dx)$ — *формпараметр*, с помощью которого учитывается изменение скорости внешнего потока вдоль оси Ox .

После нахождения постоянных получают профиль скорости в виде зависимости $v_x/v_1 = \varphi(\eta, \lambda)$, а также выражения для δ_* , δ_{**} и σ_c . Подставив все эти величины в (5.47), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения $\delta = \delta(x)$. Зная $\delta(x)$, можно рассчитать сопротивление трения. Можно также находить не δ , а δ_{**} . Тогда вместо $\lambda(x)$ используется второй формпараметр

$$\kappa(x) = \frac{\delta_{**}^2}{v} \frac{dv_1}{dx}.$$

Отметим, что при определенном значении формпараметра ($\lambda = -12$ для профиля Польгаузена) в определенной точке поверхности тела $\partial v_x/\partial y = 0$ при $y = 0$. В этой точке происходит отрыв пограничного слоя. За пределами этой точки теория пограничного слоя теряет силу.

Для нахождения коэффициентов теплоотдачи методом Кармана—Польгаузена—Кружилина распределение температуры в пограничном слое за-

дают в виде зависимости $(T - T_{\infty})/(T_c - T_{\infty}) = \psi(y/\delta_r)$, где обычно функция $\psi(y/\delta_r)$ представляет собой полином четвертой степени. Имея в виду, что распределение скорости и формпараметра вдоль оси Ox найдено в результате решения гидродинамической задачи, а q_c может быть выражено через δ_r , из (5.51) находят толщину теплового пограничного слоя, q_c и α .

Важно подчеркнуть, что интегральные соотношения Кармана и Крусш-лина (и их обобщения) справедливы не только для ламинарного, но и для турбулентного пограничного слоя. Для расчета трения и теплообмена, наряду с рассмотренными методами, используются и другие методы, которые излагаются в монографиях по теории пограничного слоя.

5.9. Задачи с решениями

Задача 1. Найдите толщины динамического и теплового пограничных слоев в точке $x = 1$ м при обтекании пластины воздухом ($t_{\infty} = 30$ °C, $v_{\infty} = 5$ м/с). Температура пластины $t_c = 10$ °C. Определите коэффициент теплоотдачи α в данной точке, а также средний коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$ для участка пластины $0 \leq x \leq 1$ м.

Решение. Средняя температура пограничного слоя $\bar{t} = 0,5(t_{\infty} + t_c) = 20$ °C. При $\bar{t} = 20$ °C для воздуха $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 0,0259$ Вт/(м·К), $Pr = 0,7$. Число Рейнольдса $Re = \frac{5 \cdot 1}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 3,32 \cdot 10^5$.

Так как $Re < 5 \cdot 10^5$, то течение в пограничном слое ламинарное. Толщина динамического пограничного слоя

$$\delta = \frac{5 \cdot 1}{\sqrt{3,32 \cdot 10^5}} = 0,0087 \text{ м} = 8,7 \text{ мм}.$$

Толщина теплового пограничного слоя

$$\delta_T = \frac{8,7}{\sqrt[3]{0,7}} = 9,8 \text{ мм}.$$

В данной точке число

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{3,32 \cdot 10^5} \sqrt[3]{0,7} = 170.$$

Найдем местный и средний коэффициенты теплоотдачи:

$$\alpha = Nu_x \frac{\lambda}{x} = 170 \frac{0,0259}{1} = 4,4 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\bar{\alpha} = 2 \cdot 4,4 = 8,8 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. $\delta = 8,7$ мм; $\delta_T = 9,8$ мм; $\alpha = 4,4$ Вт/(м²·К); $\bar{\alpha} = 8,8$ Вт/(м²·К).

Задача 2. Решите задачу 1, предполагая, что пластина омывается водой со скоростью $v_{\infty} = 0,1$ м/с. Остальные условия оставьте без изменения.

Решение. Для воды при $\bar{t} = 20$ °C $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 0,599$ Вт/(м·К), $Pr = 7,02$. Последовательно находим

$$Re = \frac{0,1 \cdot 1}{1,006 \cdot 10^{-6}} = 10^5;$$

$$\delta = \frac{5 \cdot 1}{\sqrt{10^5}} = 0,0158 \text{ м} = 15,8 \text{ мм};$$

$$\delta_T = \frac{15,8}{\sqrt[3]{7,02}} = 8,25 \text{ мм};$$

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{10^5} \sqrt[3]{7,02} = 200;$$

$$\alpha = 200 \frac{0,599}{1} = 120 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\bar{\alpha} = 2 \cdot 120 = 240 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. $\delta = 15,8$ мм; $\delta_T = 8,25$ мм; $\alpha = 120$ Вт/(м²·К); $\bar{\alpha} = 240$ Вт/(м²·К).

Задача 3. Тонкая пластина из нержавеющей стали обтегается электрическим током так, что $q_c = 386$ Вт/м². Пластина продольно обдувается воздухом ($v_{\infty} = 10$ м/с; $t_{\infty} = 10$ °C). Найдите температуру пластины на расстоянии $x = 0,2$ м от передней кромки.

Решение. Задаем среднюю температурой пограничного слоя $\bar{t} = 20$ °C. Физические свойства воздуха будут таким же, как и в задаче 1. Число Рейнольдса

$$Re_x = \frac{10 \cdot 0,2}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 1,32 \cdot 10^5.$$

В заданной точке число

$$Nu_x = 0,46 \sqrt{1,32 \cdot 10^5} \sqrt[3]{0,7} = 149.$$

Местный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = 149 \frac{0,0259}{0,2} = 19,3 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Температура стенки

$$t_c = 10 + \frac{386}{19,3} = 30^\circ \text{C}.$$

Средняя температура $\bar{t} = 0,5(10 + 30) = 20^\circ \text{C}$.

Ответ. Температура пластины $t_c = 30^\circ \text{C}$.

Задача 4. Для набегающего на пластину потока воздуха скорость $v_\infty = 200 \text{ м/с}$ и температура $t_\infty = 20^\circ \text{C}$. Рассчитайте плотность теплового потока q_c в точке $x = 35 \text{ мм}$ при температуре пластины: а) $t_c = 36,8^\circ \text{C}$; б) $t_c = 25^\circ \text{C}$; в) $t_c = 40^\circ \text{C}$.

Решение. Скорость звука в воздухе

$$a_\infty = \sqrt{kRT_\infty} = 20,1 \sqrt{T_\infty} = 344 \text{ м/с}.$$

Число Маха $Mo_\infty = v_\infty / a_\infty = 200/344 = 0,58$.

Коэффициент восстановления температуры

$$r = \sqrt{Pr} = \sqrt{0,7} = 0,84.$$

Адиабатная температура стенки

$$t_{ac} = 20 + 0,84 \frac{200^2}{2 \cdot 10^3} = 36,8^\circ \text{C}.$$

В первом случае ($t_c = 36,8^\circ \text{C}$) $q_c = 0$.

Для расчета q_c во втором случае принимаем $v = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 0,0259 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $Pr = 0,7$.

Число Рейнольдса

$$Re_x = \frac{200 \cdot 0,035}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 4,64 \cdot 10^5.$$

Найдем число Nu_x и местный коэффициент теплоотдачи:

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{4,64 \cdot 10^5} \sqrt[3]{0,7} = 190;$$

$$\alpha = 190 \frac{0,0259}{0,035} = 141 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

При этом $q_c = 141(25 - 36,8) = -1664 \text{ Вт/м}^2$.

Знак «минус» говорит о том, что тепловой поток направлен от воздуха к стенке, хотя $t_c > t_\infty$.

При $\bar{t} = 0,5(20 + 40) = 30^\circ \text{C}$ $v = 16,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 0,0267 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $Pr = 0,7$. Последовательно находим

$$Re_x = \frac{200 \cdot 0,035}{16,0 \cdot 10^{-6}} = 4,37 \cdot 10^5;$$

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{4,37 \cdot 10^5} \sqrt[3]{0,7} = 184;$$

$$\alpha = 184 \frac{0,0267}{0,035} = 141 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Плотность теплового потока $q_c = 140(40 - 36,8) = 448 \text{ Вт/м}^2$. Так как $q_c > 0$, то тепловой поток направлен от стенки к воздуху.

Ответ. а) $q_c = 0$; б) $q_c = -1664 \text{ Вт/м}^2$; в) $q_c = 448 \text{ Вт/м}^2$.

Задача 5. Используя соотношение Кармана, найдите толщину динамического пограничного слоя δ и коэффициент трения c_f при продольном обтекании пластины несжимаемой жидкостью. Скорость жидкости v_∞ , ее кинетическая вязкость ν . Начало координат поместите на переднюю кромку пластины, ось Ox расположите вдоль течения, а ось Oy — перпендикулярно к пластине.

Решение. Для профиля скорости возьмем полином третьей степени:

$$v_x/v_\infty = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3,$$

где $\eta = y/\delta$.

Постоянные a_0 — a_3 найдем из граничных условий:

$$\text{при } \eta = 0 \quad v_x/v_\infty = 0 \text{ и } \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{v_x}{v_\infty} \right) = 0;$$

$$\text{при } \eta = 1 \quad v_x/v_\infty = 1 \text{ и } \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_x}{v_\infty} \right) = 0$$

Постоянные составляют: $a_0 = 0$; $a_1 = 1,5$; $a_2 = 0$; $a_3 = -0,5$. Следовательно,

$$v_x/v_\infty = 1,5\eta - 0,5\eta^3.$$

В нашем случае $v_1 = v_\infty$, $dv_1/dx = 0$, а

$$\sigma_c = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 1,5 \frac{\mu v_\infty}{\delta}.$$

После подстановки в соотношение Кармана (см. § 5.8) полученных выражений для v_x/v_∞ и σ_c оно приобретает следующий вид:

$$\delta \, d\delta = \frac{140}{13} \frac{\nu}{v_\infty} \, dx.$$

Интегрируя это уравнение, с учетом того, что при $x = 0$ $\delta = 0$, получаем

$$\delta = \frac{4,64x}{\sqrt{v_{\infty}x/\nu}} = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Находим коэффициент трения:

$$c_f = \frac{2\sigma_c}{\rho v_{\infty}^2} = \frac{3\nu}{v_{\infty}\delta} = \frac{0,646}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Полученные результаты для δ и c_f незначительно отличаются от результатов точного решения (см. § 5.3).

Задача 6. Используя соотношение Крузилина, выведите формулу для числа Nu_x при продольном обтекании пластины (см. задачу 5). Температуры пластины $T_c = \text{const}$ при $x \geq \xi$ и равна температуре внешнего потока T_{∞} в области $0 \leq x \leq \xi$.

Решение. Для профиля температуры возьмем полином третьей степени:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = a'_0 + a'_1\eta' + a'_2\eta'^2 + a'_3\eta'^3,$$

где $\theta = T_c - T$, $\theta_0 = T_c - T_{\infty}$; $\eta' = y/\delta_T$.

На поверхности пластины $v_x = v_y = 0$. Из уравнения энергии для пограничного слоя следует, что при этом $\partial^2 T / \partial y^2$. Тогда граничные условия будут иметь вид:

$$\text{при } \eta' = 0 \quad \theta/\theta_0 = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta'^2} = 0;$$

$$\text{при } \eta' = 1 \quad \theta/\theta_0 = 1 \text{ и } \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta'^2} = 0.$$

Постоянные $a'_0 = a_0$, $a'_1 = a_1$, $a'_2 = a_2$, $a'_3 = a_3$, где a_0 — a_3 — постоянные, найденные в задаче 5.

Следовательно,

$$\theta/\theta_0 = 1,5\eta' - 0,5\eta'^3.$$

Будем считать, что $\delta_T \leq \delta$. В нашем случае $T_1 = T_{\infty}$, а

$$q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 1,5 \frac{\lambda \theta_0}{\delta_T}.$$

Обозначим $k = \delta_T/\delta$. Зависимости $\theta/\theta_0 = f_1(\eta')$ и $v_x/v_{\infty} = f_2(\eta)$ подставим в интегральное соотношение Крузилина (см. § 5.8). После преобразований получим уравнение

$$2\delta^2 k^2 \frac{dk}{dx} + k^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = 10 \frac{a}{v_{\infty}},$$

где a — температуропроводность жидкости.

Толщина динамического пограничного слоя δ была найдена в задаче 5. Имея это в виду, получаем уравнение для определения k :

$$k^3 + 4k^2 x \frac{dk}{dx} = \frac{13}{14} \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (5.57)$$

Динамический пограничный слой нарастает с самого начала обтекания пластины ($x = 0$), а тепловой — с сечения $x = \xi$. Поэтому $k = 0$ при $x = \xi$. Интегрируя (5.57), находим

$$k^3 = Cx^{-3/4} + \frac{13}{14} \frac{1}{\text{Pr}},$$

откуда следует, что

$$k = \left(\frac{13}{14} \right)^{1/3} \text{Pr}^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}$$

Так как

$$\alpha = \frac{q_c}{T_c - T_{\infty}} = 1,5 \frac{\lambda}{k\delta},$$

то

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3}$$

Задача решена. Видно, если $\xi = 0$, то полученная формула имеет такой же вид, как и в задаче Польгаузена (см. § 5.5).

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

6.1. Развитие пограничного слоя при продольном обтекании пластины

При обтекании тонкой пластины в начальной ее части образуется ламинарный пограничный слой, для которого справедлива теория, рассмотренная в гл. 5. Из этой теории, в частности, следует, что толщина динамического пограничного слоя δ зависит от продольной координаты x , скорости потока v_∞ и вязкости ν , причем

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = 5 \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty}} x^{1/2}.$$

Таким образом, толщина $\delta \sim x^{1/2}$. Как было показано выше (см. § 5.5), коэффициент теплоотдачи для изотермической пластины ($T_c = \text{const}$) $\alpha \sim x^{-1/2}$.

Опыты доказывают, что указанные законы изменения δ и α справедливы лишь до определенного (критического) значения числа $Re_x = Re_{x,кр1}$, где $Re_{x,кр1} = v_\infty x_{кр1} / \nu$.

Точка, соответствующая координате $x = x_{кр1}$, является точкой перехода к турбулентному режиму течения в пограничном слое. В точке $x = x_{кр2}$ переход заканчивается, и далее имеет место турбулентный пограничный слой. Таким образом, область потока вблизи поверхности пластины в общем случае можно разбить на три подобласти: ламинарный ($0 \leq x \leq x_{кр1}$), переходный ($x_{кр1} \leq x \leq x_{кр2}$) и турбулентный ($x \geq x_{кр2}$) пограничные слои (рис. 6.1). Координаты критических точек $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ можно определить, зная $Re_{x,кр1}$ и $Re_{x,кр2}$. Из опытов следует, что значения $Re_{x,кр1}$ и $Re_{x,кр2}$ изменяются в довольно широких пределах и зависят от значения Tu — степени турбулентности (степени возмущения) набегающего потока:

$$Tu = \frac{1}{v_\infty} \sqrt{\frac{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}{3}},$$

где v_x' , v_y' и v_z' — пульсации составляющих скорости v_∞ ; v_∞ — усредненная по времени скорость потока.

Рис. 6.1. Развитие пограничного слоя при обтекании пластины

1—3 — ламинарный, переходный и турбулентный пограничные слои; 4 — вязкий подслей

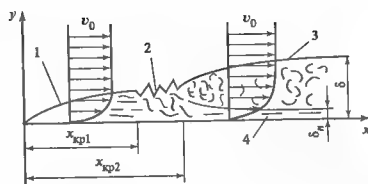
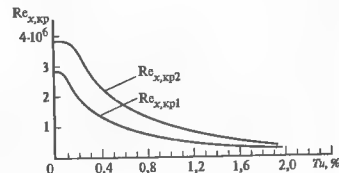


Рис. 6.2. Влияние степени турбулентности внешнего потока на $Re_{x,кр1}$ и $Re_{x,кр2}$



Зависимости $Re_{x,кр1}$ и $Re_{x,кр2}$ от Tu показана на рис. 6.2.

Критические значения чисел Рейнольдса зависят также от шероховатости пластины, причем для шероховатой пластины критические числа Рейнольдса меньше, чем для гладкой. При обтекании пластины с недостаточно острой передней кромкой с самого начала может иметь место турбулентный пограничный слой (ламинарная и переходная зоны в этом случае отсутствуют).

Переходная зона пограничного слоя отличается *перемежаемостью* течения: в данной области потока оно может быть либо ламинарным, либо турбулентным. По мере приближения к точке $x = x_{кр2}$ время существования ламинарного режима течения стремится к нулю. Коэффициент перемежаемости γ , характеризующий долю времени существования турбулентного режима течения, в области $x_{кр1} \leq x \leq x_{кр2}$ изменяется следующим образом: $0 \leq \gamma \leq 1$.

В инженерных расчетах, не требующих большой точности, область перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному можно стянуть в одну точку $x = x_{кр}$ и считать, что

$$Re_{x,кр} = \frac{v_\infty x_{кр}}{\nu} = 5 \cdot 10^5.$$

Тогда в области $0 \leq x \leq x_{кр}$ коэффициенты теплоотдачи и трения рассчитывают по формулам справедливым для ламинарного пограничного слоя, а в области $x > x_{кр}$ — по формулам, справедливым для турбулентного пограничного слоя.

Для определения толщины турбулентного слоя служат формула

$$\delta = \frac{0,37x}{Re_x^{0,2}} = 0,37 \left(\frac{\nu}{v_\infty} \right)^{0,2} x^{0,8}. \quad (6.1)$$

Из (6.1) видно, что турбулентный пограничный слой растет быстрее ламинарного.

Изменение режима течения в пограничном слое можно объяснить следующим образом. При относительно малых числах Re_x ламинарное движение вязкой жидкости устойчиво к малым и конечным возмущениям. При этом возникшие в потоке возмущения за счет действия сил вязкости затухают. С увеличением координаты x растет толщина пограничного слоя, уменьшается градиент скорости, в связи с чем действие сил вязкости ослабевает. Роль же инерционных сил, стремящихся дестабилизировать поток жидкости, возрастает. При определенном значении $Re = Re_{x,кр1}$ движение становится неустойчивым и нестационарным. Потеря устойчивости сопровождается появлением возмущающего (пульсационного) движения, которое накладывается на стационарный поток жидкости. Вначале пульсационное движение — периодическое. Однако с ростом Re_x амплитуда первого появившегося возмущающего движения возрастает, и оно само становится неустойчивым. На него накладывается новое (второе) возмущающее движение, на второе — третье и т.д. В конце концов движение приобретает сложный и запутанный характер, что соответствует турбулентному пограничному слою.

Турбулентное движение в грубом приближении можно представить в виде множества вихрей различных масштабов. Масштаб наибольших вихрей порядка толщины пограничного слоя. Эти вихри, характеризующие пульсационное движение, как и другие, черпают энергию из усредненного движения, а затем передают ее вихрям меньшего масштаба. Последние передают энергию еще меньшим вихрям и т.д. В самых мелких вихрях энергия жидкости превращается в тепло. Говорят, что в этом случае происходит диссипация кинетической энергии жидкости вследствие работы сил вязкости. Отмеченный каскадный процесс передачи энергии является характерной чертой турбулентного движения. Другой его особенностью является трехмерность пульсационных движений (мгновенные значения скорости в произвольной точке турбулентного потока всегда зависят от трех координат x, y и z).

В турбулентном пограничном слое профиль скорости более заполнен, чем в ламинарном (см. рис. 6.1). Вследствие интенсивного перемешивания в основной части турбулентного пограничного слоя скорость жидкости изменяется незначительно. Резкое изменение скорости наблюдается лишь в области, примыкающей к поверхности пластины. Так как здесь градиент скорости больше, чем в ламинарном пограничном слое, переход к турбулентному режиму течения сопровождается ростом напряжения трения на стенке σ_c . Другими словами, гидравлическое сопротивление при турбу-

лентном режиме выше, чем при ламинарном. Увеличение силы сопротивления имеет своим следствием тот факт, что кинетическая энергия потока с ростом x быстро уменьшается. В результате оказывается, что толщина турбулентного пограничного слоя, как указывалось выше, растет быстрее, чем толщина ламинарного.

Рост толщины пограничного слоя (как ламинарного, так и турбулентного) приводит к уменьшению градиента скорости в пристенной области и падению напряжения трения σ_c с увеличением координаты x . Если для ламинарного пограничного слоя $\sigma_c \sim x^{-1/2}$, то для турбулентного $\sigma_c \sim x^{-1/5}$.

Указанные особенности турбулентного пограничного слоя отражаются на процессе конвективного теплообмена. Вследствие интенсивного перемешивания в основной части слоя распределение температуры по нормали к пластине близко к равномерному. Большие градиенты температуры наблюдаются лишь в пристенной области потока. В целом профиль температуры (при $Pr = 1$) подобен профилю скорости. Отсюда следует, что плотность теплового потока q_c (или коэффициент теплоотдачи α) ведет себя так, как показано на рис. 6.3. В области ламинарного пограничного слоя местный коэффициент теплоотдачи при обтекании пластины ($T_c = const$) можно рассчитать по формуле (см. § 5.5)

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}, \quad (6.2)$$

а в области турбулентного пограничного слоя — по формуле

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{0,4}. \quad (6.3)$$

Формула (6.3) будет выведена ниже (см. § 6.5). Если задано условие $q_c = const$, то вместо (6.2) следует взять формулу

$$Nu_x = 0,46 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (6.3a)$$

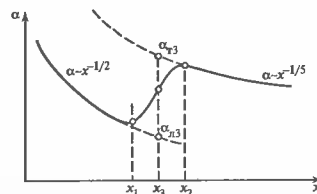


Рис. 6.3. Зависимость $\alpha = f(x)$ при обтекании пластины

Для турбулентного пограничного слоя при $Pt > 0,5$ граничное условие на стенке слабо влияет на значение α , поэтому приближенно можно считать, что формула (6.3) справедлива как при $T_c = \text{const}$, так и при $q_c = \text{const}$.

В переходной области пограничного слоя ($x_{кр1} \leq x \leq x_{кр2}$) теплоотдачу можно рассчитать, учитывая коэффициент перемешивания γ , который равен нулю, если $x = x_{кр1}$, и равен единице, если $x = x_{кр2}$. Приближенно можно считать, что в области $x_{кр1} \leq x \leq x_{кр2}$

$$\gamma = \frac{x - x_{кр1}}{x_{кр2} - x_{кр1}}.$$

Тогда в переходной области

$$\alpha(x) = \alpha_l(x)(1 - \gamma) + \alpha_t(x)\gamma,$$

где $\alpha_l(x)$ рассчитывается по (6.2) или (6.3а) при данном значении x , а $\alpha_t(x)$ — по (6.3) при том же значении x .

Значения $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ определяются по $Re_{x,кр1}$ и $Re_{x,кр2}$, которые должны соответствовать заданной степени турбулентности набегающего потока.

6.2. Структура турбулентного пограничного слоя

Турбулентный пограничный слой можно разбить на две части: внутреннюю и внешнюю. Если во внешней части наблюдать за режимом движения, то можно обнаружить, что он является турбулентным только в течение времени τ_t , а в остальное время τ_l — ламинарным. Это явление (см. § 6.1) характеризуется коэффициентом перемешивания γ :

$$\gamma = \frac{\tau_t}{\tau_t + \tau_l}.$$

Опыты показывают, что γ практически равно единице при $y \leq 0,4\delta$ (y — расстояние от стенки; δ — толщина пограничного слоя) и равно нулю при $y \geq 1,2\delta$ (рис. 6.4). Явление перемешивания можно уяснить рассматривая рис. 6.5, на котором показана картина пограничного слоя при обтекании пластины в произвольно взятый момент времени. На течение во внешней части пограничного слоя существенное влияние оказывают возмущения, которые могут быть в набегающем на пластину потоке жидкости. Вязкость жидкости ν не оказывает влияния на формирование профиля скорости во внешней части пограничного слоя, которая называется также *турбулентным ядром* слоя.

Рассмотрим внутреннюю часть пограничного слоя. Турбулентные пульсации на поверхности пластины существовать не могут, т.е. здесь $v_x' = v_y' = v_z' = 0$. Эти пульсации резко уменьшаются до нуля в очень тонкой при-

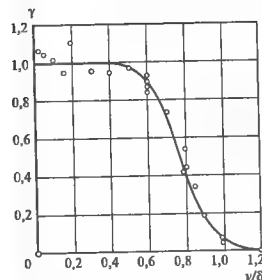


Рис. 6.5. Турбулентный пограничный слой в произвольно взятый момент времени

Рис. 6.4. Опытные данные по коэффициенту перемешивания в турбулентном пограничном слое

стенной области потока, в которой влияние сил вязкости велико. Эта область пограничного слоя называется *вязким подслоем*.

Между вязким подслоем и турбулентным ядром располагается «буферный» слой, состояние которого определяется влиянием как сил вязкости, так и пульсаций скорости. Другими словами, в «буферном» слое вязкие напряжения того же порядка, что и напряжения Рейнольдса (см. § 4.8).

Из опытов и теории турбулентности следует, что во внутренней части пограничного слоя ($0 \leq y \leq 0,2\delta$) распределение скорости по нормали к поверхности пластины зависит только от координаты y , касательного напряжения на стенке σ_τ , плотности ρ и кинематической вязкости ν , а в безразмерном виде

$$\frac{v_x}{v_*} = f(\eta), \quad (6.4)$$

где $\eta = y v_* / \nu$; $v_* = \sqrt{\sigma_\tau / \rho}$ — динамическая скорость.

Зависимость типа (6.4) имеет универсальный характер. Она справедлива как при отсутствии, так и при наличии градиента давления во внешнем потоке, в частности, для течения в трубах. Профиль скорости, описываемый зависимостью (6.4), называется универсальным (иногда эту зависимость называют «законом стенки»).

Если обозначить $\eta = y v_* / \nu$, то для вязкого подслоя $0 \leq \eta \leq 5$, а $v_x / v_* = \eta$. В «буферном» слое безразмерная скорость описывается двумя формулами:

$$\frac{v_x}{v_*} = 5 \ln \eta - 3,05 \quad (5 \leq \eta \leq 30);$$

$$\frac{v_x}{v_*} = 2,5 \ln \eta + 5,5 \quad (\eta \geq 30, y/\delta \leq 0,2).$$

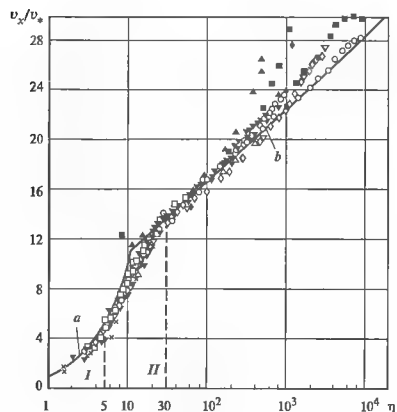


Рис. 6.6. Универсальный профиль скорости в пограничном слое

I — вязкий подслой; II — «буферная» зона; а — $v_x/v_* = \eta$; б — $v_x/v_* = 2,5 \ln \eta + 5,5$

Область значений $\eta \geq 30$ (но $y/\delta \leq 0,2$) называется областью *логарифмического профиля скорости*. Зависимость (6.4), т.е. «закон стенки», подтверждается опытными данными, приведенными на рис. 6.6. Следует обратить внимание на то, что на этом рисунке по горизонтальной оси безразмерная координата η откладывается в логарифмическом масштабе, а по вертикальной оси безразмерная скорость — в обычном (равномерном) масштабе. В таком случае логарифмический профиль скорости изображается в виде прямой линии, а линейная зависимость $v_x/v_* = \eta$ в вязком подслое — в виде кривой линии. Отметим также, что на этом графике (как и в приведенных выше формулах) v_x — усредненная горизонтальная компонента скорости турбулентного потока.

Если $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$, профиль скорости в пограничном слое приблизительно соответствует «закону одной седьмой»:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7},$$

причем толщина δ связана с Re_x соотношением (6.1).

В указанном интервале изменения Re_x коэффициент трения

$$c_f = 0,0592 Re_x^{-0,2}. \quad (6.5)$$

В широком интервале изменения числа Re_x (при $Re_x > 6 \cdot 10^5$) профиль скорости описывается формулой

$$\frac{v_x}{v_*} = 0,41 \ln(1 + 0,41\eta) + \frac{0,119\eta^2}{1 + 0,0157\eta^2} + \frac{\eta/\delta\eta}{1 + 0,41\eta_0} \left(2,2 - 1,8\frac{\eta}{\delta}\right),$$

где η_0 — безразмерная толщина пограничного слоя;

$$\eta_0 = \delta v_* / \nu.$$

Так как $\sigma_c = c_f/2 \rho v_\infty^2$, то динамическая скорость

$$v_* = \sqrt{\frac{\sigma_c}{\rho}} = v_\infty \sqrt{\frac{c_f}{2}}.$$

Плотность теплового потока на стенке однозначно определяется теплопроводностью жидкости λ и поперечным градиентом температуры [производной $(\partial T/\partial y)_y = 0$]. Последняя величина существенно зависит от движения жидкости в непосредственной близости к стенке. Поэтому изучение внутренней части турбулентного пограничного слоя представляет большой практический интерес.

На рис. 6.7 показано, как изменяются по нормали к поверхности пла-

стины безразмерные пульсационные характеристики потока $\sqrt{v_x'^2}/v_*$,

$\sqrt{v_y'^2}/v_*$, $\sqrt{v_z'^2}/v_*$. Кривые на этом рисунке получены в результате многочисленных экспериментов.

Видно, что пульсации скорости равны нулю только на самой стенке. Во внутренней части пограничного слоя указанные пульсационные характеристики достигают максимальных значений и уменьшаются по мере продвижения к его внешней границе. В области вязкого и «буферного» слоев производится наибольшая часть энергии, расходуемой на турбулентные движения объемов жидкости.

Наблюдения показывают, что течение в вязком подслое носит перемежающийся (ламинарно-турбулентный) характер. Оно сопровождается выбросом замороженной части жидкости и вторжением в подслой турбулентных вихрей из смежной области потока. Таким образом, вблизи вязкого подслоя наблюдаются явле-

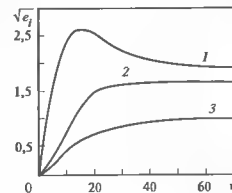


Рис. 6.7. Зависимость безразмерных пульсаций скорости $\sqrt{e_i}$ во внутренней части пограничного слоя от переменной η

1 — $\sqrt{v_x'^2}/v_*$; 2 — $\sqrt{v_z'^2}/v_*$; 3 — $\sqrt{v_y'^2}/v_*$

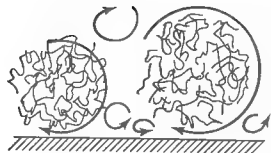


Рис. 6.8. Характер течения жидкости в пристенной области пограничного слоя

Из-за достаточно высокой степени турбулентности потока вблизи стенки толщина вязкого подслоя оказывается малой по сравнению с общей толщиной турбулентного пограничного слоя. Это видно из следующего примера. Пусть $Re_x = 10^6$. Тогда

$$c_f = 0,0592 / (10^6)^{0,2} = 0,0037,$$

а отношение толщины вязкого подслоя δ_b к координате x

$$\frac{\delta_b}{x} = 5 \frac{\nu}{v_{\infty} \lambda c_f} \sqrt{2} = \frac{5}{10^6 \sqrt{0,0037}} \sqrt{2} = 1,16 \cdot 10^{-4}.$$

Для толщины турбулентного пограничного слоя имеем:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{(10^6)^{0,2}} = 2,33 \cdot 10^{-2}.$$

Следовательно, $\delta_b / \delta = 0,005$. Число $Re_x = 10^6$ соответствует скорости воздуха $v_{\infty} = 15$ м/с и координате $x = 1$ м (при температуре $T_{\infty} = 293$ К). Тогда $\delta = 23,3$ мм, а $\delta_b = 0,116$ мм.

Нетрудно подсчитать, что толщина вязкого подслоя незначительно возрастает с увеличением x : $\delta \sim x^{0,1}$. Этим объясняется в первую очередь тот факт, что коэффициент теплоотдачи в области турбулентного пограничного слоя уменьшается более медленно, чем в области ламинарного (см. рис. 6.3).

Если приблизительно принять, что $\alpha_t = \lambda / \delta_b$, то для условий рассмотренного выше примера получим $\alpha_t = 223$ Вт/(м²·К) [более точный расчет показывает, что $\alpha_t = 41,1$ Вт/(м²·К)]. Принимая меры к успокоению избегающего потока воздуха, можно считать, что при $Re_x = 10^6$ пограничный слой остается ламинарным, тогда при расчете по (6.2) получаем $\alpha_{\text{л}} = 7,65$ Вт/(м²·К).

6.3. Уравнения турбулентного пограничного слоя.

Турбулентная вязкость и турбулентная теплопроводность

Будем рассматривать течение несжимаемой жидкости и считать, что усредненные параметры (скорость, температура, давление и др.) не зависят от координаты z . Как известно, такое течение называется плоским. Как

и в гл. 5, ось Ox направим вдоль потока, а ось Oy — перпендикулярно к поверхности тела.

Турбулентные потоки изучают с помощью уравнений Рейнольдса (см. § 4.8). Численное моделирование турбулентных потоков с использованием полных (не усредненных) уравнений Навье—Стокса и уравнения энергии в настоящее время возможно лишь для ограниченного круга задач (например, для стабилизированного течения в трубах).

Упрощая уравнения Рейнольдса аналогично тому, как это было сделано в гл. 5 с уравнениями Навье—Стокса, для турбулентного пограничного слоя получаем следующую систему уравнений, которым должны удовлетворять усредненные значения компонентов скорости $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, давления $\bar{p}$ и температуры $\bar{T}$:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0; \quad (6.6)$$

$$\rho \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \rho \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \rho \bar{v}_x' \bar{v}_y' \right); \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{p} + \rho \bar{v}_y^2 \right) = 0; \quad (6.8)$$

$$\rho c_p \bar{v}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho c_p \bar{v}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \bar{v}_y' \bar{T}' \right). \quad (6.9)$$

Уравнение (6.6) представляет собой усредненное уравнение неразрывности, а (6.7) — уравнение движения в проекции на ось Ox . Уравнение (6.8) получается в результате упрощения уравнения движения в проекции на ось Oy , а (6.9) есть усредненное уравнение энергии.

В (6.7) $\bar{v}_x' \bar{v}_y'$ — усредненное произведение пульсаций скоростей v_x и v_y ; в (6.9) $\bar{v}_y' \bar{T}'$ — усредненное произведение пульсаций v_y и температуры T .

Физический смысл напряжения Рейнольдса $-\rho \bar{v}_x' \bar{v}_y'$ состоит в том, что оно учитывает турбулентный перенос импульса в пограничном слое, а лагасное $\rho c_p \bar{v}_y' \bar{T}'$ определяет турбулентный перенос теплоты.

Основываясь на опытных данных, далее будем считать, что $\partial(\rho \bar{v}_y^2) / \partial y \ll \partial \bar{p} / \partial y$ и $\partial \bar{p} / \partial y = 0$. Следовательно, как и в случае ламинарного пограничного слоя, давление в турбулентном пограничном слое оказывается таким же, как и во внешнем потоке, т.е. $\bar{p} = \bar{p}(x)$.

Мы получили, что уравнения турбулентного пограничного слоя отличаются от уравнений ламинарного слоя только наличием дополнительных слагаемых в правых частях (6.7) и (6.9).

В 1877 г. французский ученый Ж. Буссинеск для объяснения увеличения гидравлического сопротивления при переходе от ламинарного режима течения к турбулентному высказал гипотезу, что турбулентным потокам присуще особое свойство — *турбулентная вязкость* μ_t . По Буссинеску в обобщенный закон Ньютона (см. § 4.4) вместо обычной (молекулярной) вязкости μ следует подставлять сумму $\mu + \mu_t$. Однако вопрос об определении μ_t оставался открытым. Несмотря на то, что турбулентную вязкость теоретически рассчитать невозможно, понятие этой вязкости, введенное Буссинеском, в дальнейшем стало использоваться при изучении турбулентных течений. Более того, наряду с μ_t была введена *турбулентная теплопроводность* λ_t , которая учитывает турбулентный перенос теплоты. При этом в закон Фурье вместо обычной (молекулярной) теплопроводности λ подставляют сумму $\lambda + \lambda_t$.

По аналогии с законами трения Ньютона и теплопроводности Фурье можно записать, что

$$\mu_t = - \frac{\rho \overline{v'_x v'_y}}{\partial v_x / \partial y}; \quad (6.10)$$

$$\lambda_t = \frac{\rho c_p \overline{v'_y T'}}{\partial T / \partial y}. \quad (6.11)$$

Уравнения (6.10) и (6.11) представляют собой не что иное, как определение μ_t и λ_t . Видно, что при введении μ_t и λ_t одни неизвестные (турбулентное напряжение и турбулентный тепловой поток) заменяются другими (μ_t и λ_t — неизвестные величины).

Следует отметить коренное отличие μ_t и λ_t от μ и λ . Последние величины определяют физические свойства жидкости, в то время как μ_t и λ_t зависят от характера ее движения (распределения скорости в пространстве, интенсивности пульсаций) и других факторов, в частности, μ_t и λ_t являются функциями точки в потоке жидкости.

Наряду с μ_t и λ_t в расчетах используются кинематическая турбулентная вязкость $\nu_t = \mu_t / \rho$ и турбулентная температуропроводность $a_t = \lambda_t / (\rho c_p)$, а также турбулентное число Прандтля $Pr_t = \nu_t / a_t$. Так как механизм турбулентного переноса импульса аналогичен механизму переноса теплоты, значение Pr_t близко к единице. В первом приближении $Pr_t = 1$. Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что более точно

$Pr_t = 0,88$, причем при числах Pr , близких к единице, эту величину можно принять постоянной для всего пограничного слоя.

При $Pr \gg 1$ в области вязкого подслоя Pr_t уменьшается, а при $Pr \ll 1$ — увеличивается по мере приближения к поверхности тела (при $y \rightarrow 0$).

Так как турбулентную вязкость теоретически рассчитать невозможно, для ее нахождения приходится привлекать результаты опытов и разрабатывать различные модели турбулентности (гипотезы), которые оказываются справедливыми лишь для определенных классов течений. Так, например, согласно гипотезе Прандтля

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|,$$

где l — длина пути смешения, аналогичная длине свободного пробега молекул.

Вблизи стенки $l = 0,4y$. По гипотезе Прандтля — Колмогорова

$$\nu_t = C l \sqrt{E},$$

где C — постоянная; l — величина (линейный размер), характеризующая масштаб турбулентности в данной точке; E — кинетическая энергия турбулентности;

$$E = \frac{1}{2} (\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2})$$

Составляя уравнение баланса турбулентной энергии (оно приводится во многих книгах, например, в [5, 36]), с использованием гипотезы Прандтля — Колмогорова, эмпирических постоянных и уравнений Рейнольдса получают замкнутое описание турбулентных течений. В настоящее время существует и много других полумпирических теорий турбулентности.

Для процесса теплоотдачи особый интерес представляет поведение турбулентной вязкости во внутренней части пограничного слоя. Важно подчеркнуть, что в вязком подслое отношение ν_t / ν не равно нулю (хотя оно много меньше единицы). Закон изменения ν_t / ν (а также a_t / a) в области вязкого подслоя оказывает существенное влияние на точность теоретического расчета теплоотдачи при больших числах Pr . Получено, что при этом $\nu_t / \nu \sim y^{-3}$, а $a_t / a \sim y^4$ (при $Pr \gg 1$). Тот факт, что именно при больших числах Pr турбулентная вязкость существенно сказывается на процессе теплоотдачи, легко доказать, составив следующее соотношение:

$$\frac{\lambda_t}{\lambda} = \frac{a_t}{a} = \frac{\nu}{a} \frac{a_t}{\nu_t} \frac{\nu_t}{\nu} = \frac{Pr}{Pr_t} \frac{\nu_t}{\nu}.$$

Как указывалось выше, значение Pr_t близко к единице. Если даже $\nu_t / \nu \ll 1$, при $Pr \rightarrow \infty$ отношение λ_t / λ не равно нулю.

При обтекании пластины $dp/dx = 0$. Тогда, опуская знаки усреднения, из (6.6)–(6.9) можно получить следующие уравнения турбулентного пограничного слоя:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (6.12)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]; \quad (6.13)$$

$$\rho c_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right]; \quad (6.14)$$

Полагая в этих уравнениях $\mu_t = 0$ и $\lambda_t = 0$, приходим к уравнениям ламинарного пограничного слоя.

Рассмотрим случай обтекания пластины сжимаемым газом, т.е. тот случай, когда число Маха $M > 0,25$. Анализ уравнений неразрывности, движения и энергии показывает, что для турбулентного пограничного слоя уравнение неразрывности имеет вид (6.12), если $\overline{\rho'v_y'} \ll \overline{\rho v_y}$, при этом же допущении уравнение (6.13) сохраняется, а уравнение энергии записывается так:

$$\begin{aligned} \rho v_x \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h_0}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \frac{Pr}{Pr_t} \right) \frac{\partial h_0}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \mu_t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

В (6.15) h_0 — энтальпия торможения (см. § 5.7). При $\mu_t = 0$ (6.15) переходит в уравнение (5.35). Следует обратить внимание на то, что при $Pr = 1$ и $Pr_t = 1$ уравнение энергии (6.15) аналогично уравнению движения (6.13).

6.4. Аналогия Рейнольдса

В 1874 г. О. Рейнольдс высказал предположение, что в турбулентном потоке процессы переноса теплоты и количества движения (импульса) аналогичны, в связи с чем при взаимодействии нагретой жидкости с холодным твердым телом относительное изменение ее «теплосодержания» (т.е. энтальпии) должно быть равно относительному изменению количества движения:

$$\frac{q_c}{\rho v_{\infty} c_p (T_{\infty} - T_c)} = \frac{\sigma_c}{\rho v_{\infty}^2}, \quad (6.16)$$

где v_{∞} , T_{∞} — параметры набегающего потока; T_c , q_c , σ_c — соответственно температура тела, плотность теплового потока и касательное напряжение на поверхности тела.

Числитель в левой части (6.16) — это то количество теплоты, которое в единицу времени в расчете на единицу площади поверхности переходит от жидкости к телу; знаменатель — максимально возможное количество теплоты, которое могло бы быть отдано телу, если бы температура жидкости сравнялась с температурой тела (располагаемое количество теплоты).

Числитель в правой части (6.16) можно трактовать как количество движения, переданное от жидкости к телу (так как сила трения равна изменению количества движения), а знаменатель — как максимально возможное количество движения, которое в единицу времени могло бы быть передано телу (располагаемое количество движения).

Полагая $\sigma_c = c_f \rho v_{\infty}^2 / 2$, $q_c = \alpha (T_{\infty} - T_c)$, число Стантона $St = \alpha / (\rho v_{\infty} c_p)$, из (6.16) получаем

$$St = c_f / 2. \quad (6.17)$$

Соотношение (6.17), связывающее число Стантона с коэффициентом трения, называется *аналогией Рейнольдса*.

Выясним условия справедливости аналогии Рейнольдса. Рассмотрим уравнение энергии (6.14). Допустим, что $c_p = \text{const}$. Тогда

$$\frac{\lambda + \lambda_t}{c_p} = \frac{\mu}{Pr} \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \frac{Pr}{Pr_t} \right).$$

Если $Pr = 1$ и $Pr_t = 1$, то

$$\frac{\lambda + \lambda_t}{c_p} = \mu + \mu_t.$$

С учетом этого (6.14) примет вид

$$\rho v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]. \quad (6.18)$$

Здесь мы приняли $T_c = \text{const}$ и $\theta = T - T_c$. Уравнения (6.18) и (6.13) аналогичны, как и граничные условия для v_x и θ :

$$v_x = 0, \theta = 0 \quad \text{при } y = 0, v_x = v_{\infty};$$

$$\theta - \theta_{\infty} = T_{\infty} - T_c \quad \text{при } y = \infty.$$

Поэтому

$$\frac{T - T_c}{T_{\infty} - T_c} = \frac{v_x}{v_{\infty}}. \quad (6.19)$$

Последнее равенство говорит о подобии профилей температуры и скорости. Дифференцируя (6.19) с учетом законов Фурье и Ньютона, после простых преобразований получаем (6.17).

Таким образом, мы доказали, что аналогия Рейнольдса справедлива для обтекания тела потоком жидкости без градиента давления (обтекание пластины) при условии, что $Pr = 1$, $Pr_t = 1$, $c_p = \text{const}$ и $T_c = \text{const}$.

Рассматривая случай сжимаемого газа, на основании того, что при указанных выше условиях уравнение энергии (6.15) аналогично уравнению движения (6.13), получаем, что аналогия Рейнольдса справедлива и в этом случае. Следует только иметь в виду, что, как и для ламинарного пограничного слоя (см. § 5.7), в этом случае коэффициент теплоотдачи относится к разности $T_c - T_{a,c}$, где $T_{a,c}$ — адиабатная температура стенок.

Формулу (6.16) можно записать в другом виде. Так как $c_f = 0,0592/Re_x^{0,2}$, то

$$St = 0,0296 Re_x^{-0,2},$$

или

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} \quad (Pr = 1).$$

Установим, как изменяется отношение q/σ в турбулентном пограничном слое, если справедлива аналогия Рейнольдса. Дифференцируя (6.19), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_\infty - T_c}{v_\infty} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (6.20)$$

Далее учтем выражения для плотности теплового потока и напряжения трения:

$$q = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\sigma = (\mu + \mu_t) \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Имея в виду последние формулы, из (6.20) получаем

$$\frac{q}{\sigma} = \frac{q_c}{\sigma_c} = \text{const}.$$

Интересно отметить, что проведенный в этом параграфе теоретический анализ теплообмена и трения не требует знания λ_t и μ_t . Единственным условием, связанным с турбулентным переносом как теплоты, так и количества движения, является $Pr_t = 1$. Если это условие выполняется (что приближенно соответствует данным опыта), то в случае обтекания изотермической пластины при $Pr = 1$ аналогия Рейнольдса не вызывает сомнений.

6.5. Теплообмен в турбулентном пограничном слое при обтекании пластины

Как указывалось в § 6.4, аналогия Рейнольдса справедлива, если для жидкости число $Pr = 1$. Для расчета теплоотдачи в других условиях Л. Прандтль (1910 г.) предложил рассматривать турбулентный пограничный слой состоящим из двух зон: турбулентного ядра и вязкого ламинарного подслоя. Позже (1916 г.) эту идею высказал Дж. Тейлор.

Выше (см. § 6.2) мы говорили о том, что турбулентный пограничный слой можно разбить на три области: вязкий подслой, «буферная» зона и турбулентное ядро. Однако такая схема была предложена Т. Карманом лишь в 1939 г.

Рассмотрим теорию Прандтля. В этой теории предполагается, что в вязком подслое толщиной δ_b (рис. 6.9) течение ламинарное. Ввиду малости δ_b здесь $q = q_c$ и $\sigma = \sigma_c$, причем

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\sigma = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

При $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ температура жидкости T и ее скорость v_x в вязком подслое изменяются по линейному закону, и

$$\frac{q_c}{\sigma_c} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{T_c - T_b}{v_b}, \quad (6.21)$$

где T_b и v_b — температура и скорость на границе раздела между вязким подслоем и турбулентным ядром.

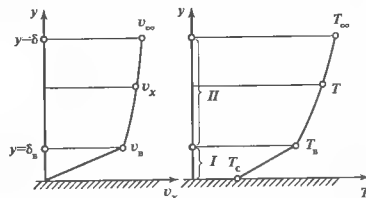


Рис. 6.9. Схемы изменения скорости и температуры в турбулентном пограничном слое согласно модели Прандтля

I — вязкий подслой; II — турбулентное ядро

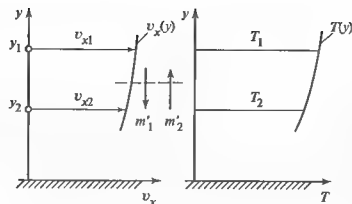


Рис. 6.10. К выводу формулы (6.22)

За пределами вязкого подслоя интенсивность процессов переноса теплоты и количества движения определяется турбулентным перемешиванием объемов жидкости и не зависит от λ и μ . Рассмотрим турбулентное ядро пограничного слоя с точки зрения аналогии Рейнольдса.

Пусть в точке $y = y_1$ (рис. 6.10) усредненные значения скорости и температуры равны v_{x1} и T_1 , в точке $y = y_2$ они составляют v_{x2} и T_2 . Допустим, что m'_1 — масса жидкости, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, которая вследствие турбулентного перемешивания переносится с одного уровня ($y = y_1$) на другой ($y = y_2$), а масса m'_2 переносится в противоположном направлении. Очевидно, что $m'_1 = m'_2 = m'$. Согласно теореме об изменении количества движения, турбулентное напряжение трения (напряжение Рейнольдса) $\sigma_\tau = m'(v_{x2} - v_{x1})$. Одновременно с переносом количества движения осуществляется перенос теплоты. При этом плотность турбулентного теплового потока $q_\tau = m'c_p(T_1 - T_2)$. Исключая m' из выражений для q_τ и σ_τ , получаем

$$\frac{q_\tau}{\sigma_\tau} = c_p \frac{T_1 - T_2}{v_{x2} - v_{x1}}. \quad (6.22)$$

Согласно аналогии Рейнольдса, $q_\tau/\sigma_\tau = q_c/\sigma_c = \text{const}$. Тогда вместо (6.22) можно записать

$$\frac{q_c}{\sigma_c} = c_p \frac{T_\infty - T_w}{v_\infty - v_w}. \quad (6.23)$$

Из (6.21) и (6.23) найдем

$$T_c - T_\infty = \frac{\mu}{\lambda} \frac{q_c}{\sigma_c} v_w = \frac{1}{c_p} \text{Pr} \frac{q_c}{\sigma_c} v_w. \quad (6.24)$$

$$T_w - T_\infty = \frac{1}{c_p} \frac{q_c}{\sigma_c} (v_\infty - v_w). \quad (6.25)$$

Исбавляясь от T_w путем сложения (6.24) и (6.25), получаем

$$T_c - T_\infty = \frac{v_\infty}{c_p} \frac{q_c}{\sigma_c} \left[1 + \frac{v_w}{v_\infty} (\text{Pr} - 1) \right]. \quad (6.26)$$

Имея в виду, что $\alpha = q_c/(T_c - T_\infty)$, из (6.26) получаем формулу Прандтля—Тейлора:

$$\alpha = \frac{\sigma_c c_p}{v_\infty} \frac{1}{1 + \frac{v_w}{v_\infty} (\text{Pr} - 1)}. \quad (6.27)$$

При $\text{Pr} = 1$ формула (6.27) превращается в формулу Рейнольдса (см. § 6.4). В (6.27) отношение v_w/v_∞ является пока неизвестной величиной. Располагая универсальным профилем скорости (см. § 6.2), ее можно найти стыковкой линейного профиля скорости в вязком подслое с логарифмическим профилем в турбулентном ядре (рис. 6.11). В вязком подслое $v_x/v_* = \eta$. Из рис. 6.11 видно, что на границе вязкого подслоя $\eta_b = 11,7$.

Но $v_* / v_\infty = \sqrt{c_f/2}$. Таким образом,

$$\frac{v_w}{v_\infty} = 11,7 \sqrt{c_f/2}.$$

Формулу (6.27) нетрудно привести к безразмерному виду. Для этого следует учесть, что $\sigma_c = 2c_f/(\rho v_\infty^2)$, и ввести $\text{Nu}_x = \alpha x/\lambda$ и $\text{Re}_x = v_\infty x/\nu$. В результате получается формула

$$\text{Nu}_x = \frac{c_f}{2} \frac{\text{Re}_x \text{Pr}}{1 + 11,7 \sqrt{c_f/2} (\text{Pr} - 1)}. \quad (6.28)$$

Коэффициент трения c_f зависит от числа Re_x . При $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$

$$c_f = 0,0592 / \text{Re}_x^{0,2}.$$

В широком интервале изменения Re_x

$$c_f = (0,87 \ln \text{Re}_x - 0,65)^{-2,3}.$$

Сравнение результатов, полученных по (6.28), с опытными данными показало, что

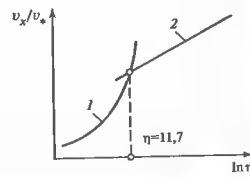


Рис. 6.11. Схема определения безразмерной толщины вязкого подслоя в модели Прандтля
1 — профиль скорости в вязком подслое; 2 — логарифмический профиль скорости в турбулентном ядре

формула (6.28) качественно правильно учитывает влияние числа Pr на число Nu_x , однако ее нельзя использовать в практических расчетах теплоотдачи. Так, например, из (6.28) следует, что при $Pr \rightarrow \infty$ $Nu_x \sim Pr$, в то время как по опытным данным $Nu_x \sim Pr^{1/4}$. Расхождение объясняется тем, что в теории Прандтля постулируется существование резкой границы между областями ламинарного и турбулентного течений в пограничном слое, а в действительности такой границы нет, т.е. турбулентные пульсации наблюдаются и в вязком подслое. Они резко уменьшаются по мере приближения к стенке и равны нулю на ее поверхности. Ввиду малости турбулентных пульсаций в вязком подслое, они практически не сказываются на профиле скорости в непосредственной близости к стенке, однако существенно отражаются на профиле температуры при $Pr > 1$. Последнее легко понять, если учесть, что на профиль температуры оказывает влияние турбулентная теплопроводность, а

$$\frac{\lambda_T}{\lambda} = Pr \frac{\mu_T}{\mu}. \quad (6.29)$$

Хотя в вязком подслое $\mu_T/\mu \ll 1$, отношение λ_T/λ не является малой величиной, если $Pr > 1$.

Используя модель Прандтля, оценим вклад вязкого подслоя в общее термическое сопротивление переносу теплоты в турбулентном пограничном слое. Обозначим: $R_{в.п} = (T_c - T_b)/q_c$ — термическое сопротивление вязкого подслоя, а $R_\Sigma = (T_c - T_\infty)/q_c$ — полное термическое сопротивление. Из (6.24) и (6.26) получаем

$$\frac{R_{в.п}}{R_\Sigma} = \frac{Pr \frac{v_b}{v_\infty}}{1 + \frac{v_b}{v_\infty} (Pr - 1)}. \quad (6.30)$$

Из (6.30) следует, что отношение $R_{в.п}/R_\Sigma$ увеличивается с ростом числа Pr . В пределе $R_{в.п}/R_\Sigma \rightarrow 1$, когда $Pr \rightarrow \infty$. В последнем случае термическое сопротивление практически полностью сосредоточено в вязком подслое. При этом температура жидкости практически постоянно в турбулентном ядре и равна T_∞ , а в вязком подслое резко изменяется от T_∞ до T_c . При $Pr - 1$ $R_{в.п}/R_\Sigma - v_b/v_\infty = 11,7 \sqrt{c_f/2}$. Если принять $Re_x = 10^6$, то можно получить $R_{в.п}/R_\Sigma = 0,5$, т.е. в случае $Pr = 1$ 50 % общего термического сопротивления приходится на вязкий подслей. Уменьшая толщину вязкого подслоя тем или иным искусственным способом (например, сделав поверхность теплообмена шероховатой), можно существенно увеличить коэффициент теплоотдачи.

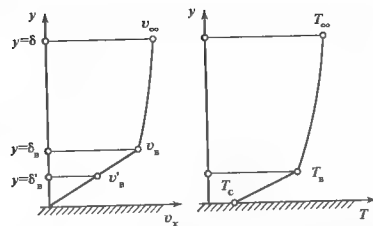


Рис. 6.12. К оценке влияния λ_T на термическое сопротивление вязкого подслоя

Более точную оценку термического сопротивления вязкого подслоя при $Pr \gtrsim 1$ можно получить, если учесть турбулентный перенос теплоты следующим образом.

Как указывалось выше, в вязком подслое $\mu_T/\mu \ll 1$, и соответственно отношение турбулентной кинематической вязкости к молекулярной кинематической вязкости $\nu_t/\nu \ll 1$. Здесь скорость жидкости с ростом координаты y линейно возрастает от нуля до v_b .

Аналогично толщине вязкого подслоя δ_b введем толщину подслоя молекулярной теплопроводности δ'_b , внутри которого $\lambda_T/\lambda \ll 1$, и соответственно отношение турбулентной теплопроводности к молекулярной теплопроводности $a_t/a \ll 1$. В этом подслое температура по нормали к пластине линейно изменяется от T_c до T_b (рис. 6.12).

При $y = \delta_b$ v_t и v — величины одного порядка, а при $y = \delta'_b$ a_t и a — также представляют собой величины одного порядка. Принимая турбулентное число Прандтля $Pr_t = 1$ и учитывая закон затухания турбулентных пульсаций в вязком подслое, положим

$$v_t \sim y^3; a_t \sim y^3.$$

Тогда при $y = \delta_b$ $v_t \sim \delta_b^3$, а при $y = \delta'_b$ $a_t \sim \delta_b'^3$. Из сказанного следует, что $\delta_b^3 \sim \nu$ и $\delta_b'^3 \sim a$. Тогда

$$\left(\frac{\delta'_b}{\delta_b} \right) \sim \frac{a}{\nu}$$

Из последнего соотношения для оценки отношения δ'_b/δ_b получаем формулу:

$$\frac{\delta'_b}{\delta_b} = \text{Pr}^{-1/3}. \quad (6.31)$$

Так как в пределах $0 \leq y \leq \delta_b$ скорость v_x изменяется по линейному закону, то

$$\frac{v'_b}{v_b} = \frac{\delta'_b}{\delta_b} = \text{Pr}^{-1/3}.$$

Далее следует учесть, что

$$\frac{v'_b}{v_{\infty}} = \frac{v_b}{v_{\infty}} \frac{v'_b}{v_b} = 11,7 \sqrt{\frac{c_f}{2}} \text{Pr}^{-1/3}.$$

Тогда, используя для R_{Σ} выражение, полученное в [26], будем иметь

$$\frac{R_{b,\Pi}}{R_{\Sigma}} = \frac{11,7 \sqrt{\frac{c_f}{2}} \text{Pr}^{2/3}}{1 + 11,7 \sqrt{\frac{c_f}{2}} (\text{Pr}^{2/3} - 1)}. \quad (6.32)$$

Число Нуссельта можно рассчитать также по трехзонной модели пограничного слоя (см. § 6.2). Этот расчет был выполнен Карманом (1939 г.). В этом случае плотность теплового потока q и напряжения трения σ в произвольной точке пограничного слоя записываются как

$$q = -(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\sigma = (\mu + \mu_T) \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Тогда, полагая $q/\sigma = q_c/\sigma_c$, можно получить уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_c}{\sigma_c} \frac{\text{Pr}}{c_p} \frac{1 + \mu_T/\mu}{1 + \lambda_T/\lambda} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (6.33)$$

В вязком подслое, по Карману, $\mu_T/\mu = 0$ и $\lambda_T/\lambda = 0$, а в «буферной» зоне ($5 \leq \eta \leq 30$) $\sigma = \sigma_c$ и

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\sigma_c}{\mu} \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^{-1} - 1.$$

Приняв в качестве профиля скорости в «буферном» слое зависимость

$$\frac{v_x}{v_a} = 5 \left(1 + \ln \frac{\eta}{5} \right),$$

можно получить

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\eta}{5} - 1.$$

В результате интегрирования (6.33) после преобразований приходим к формуле Кармана:

$$\text{Nu}_x = \frac{\frac{c_f}{2} \text{Re}_x \text{Pr}}{1 + \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left[5(\text{Pr} - 1) + 5 \ln \frac{5\text{Pr} + 1}{6} \right]}. \quad (6.34)$$

В частном случае $\text{Pr} = 1$ из (6.34) получаем формулу Рейнольдса. Формула (6.34) лучше соответствует опытным данным, чем формула Прандтля—Тейлора. Она все же недостаточно точна из-за того, что при ее выводе не учитывался турбулентный перенос теплоты в вязком подслое, а в турбулентном ядре слоя не учитывались процессы молекулярного переноса, которые существенны при $\text{Pr} \ll 1$.

Теоретические расчеты теплообмена в турбулентном пограничном слое при обтекании пластины проводились многими авторами. Было получено, что для практических расчетов числа Нуссельта при $\text{Pr} > 0.6$ можно использовать формулу

$$\text{Nu}_x = 0,0296 \text{Re}_x^{0,8} \epsilon_x^{0,4} \epsilon_T. \quad (6.35)$$

При определении чисел подобия физические свойства выбираются по температуре T_{∞} . Для жидкости: $\epsilon_T = (\mu_c/\mu_{\infty})^{-0,11}$ — при нагревании, $\epsilon_T = (\mu_c/\mu_{\infty})^{-0,25}$ — при охлаждении; для газов: $\epsilon_T = (T_c/T_{\infty})^{-0,36}$ — при охлаждении и $\epsilon_T = (T_c/T_{\infty})^{-0,5}$ — при нагревании. В приближенных расчетах α для жидкости можно принять $\epsilon_T = (\text{Pr}_{\infty}/\text{Pr}_c)^{0,25}$. Индексы «с» и « ∞ » указывают на то, что данное свойство жидкости или газа относится к температуре соответственно стенки и набегающего потока.

6.6. Метод Кутателадзе—Леонтьева

С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьев разработали приближенный метод решения сложных задач теории пограничного слоя. Пренумерство этого метода состоит в том, что с его помощью можно относительно просто проанализировать влияние на теплоотдачу и трение таких факторов, как граничные условия на стенке, высокая неизотермичность пограничного слоя, сжимаемость газа (число Маха), градиент давления, химические реакции в потоке газа, вдувание или отсос газа через пористую стенку и др. Рассмотрим основные положения метода Кутателадзе—Леонтьева. Подробно он излагается в [19, 46].

Запишем выражения для толщин вытеснения δ_* , потери импульса δ_{**} и энthalпы δ_{t*} (см. § 5.8):

$$\delta_* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho v_x}{\rho_{\infty} v_{\infty}} \right) dy; \quad (6.36)$$

$$\delta_{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho v_x}{\rho_{\infty} v_{\infty}} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}} \right) dy; \quad (6.37)$$

$$\delta_{t*} = \int_0^{\infty} \frac{\rho v_x}{\rho_{\infty} v_{\infty}} \left(1 - \frac{T_{ct} - T^*}{T_{ct} - T_{\infty}^*} \right) dy. \quad (6.38)$$

В выражении (6.38) величины T^* и T_{∞}^* находятся из уравнений:

$$c_p T^* = c_p T + \frac{v_x^2}{2};$$

$$c_p T_{\infty}^* = c_p T + \frac{v_{\infty}^2}{2}.$$

Характерные числа Рейнольдса для динамического и теплового пограничных слоев можно записать, приняв в качестве линейного размера δ_* и δ_{t*} :

$$Re^* = \frac{\rho_{\infty} v_{\infty} \delta_*}{\mu_{\infty}}; \quad Re_{t*} = \frac{\rho_{\infty} v_{\infty} \delta_{t*}}{\mu_{\infty}}.$$

Теперь рассмотрим случай плоского пограничного слоя. Жидкость, омывающую поверхность тела, будем считать несжимаемой. Интегральные соотношения импульсов и энергии (см. § 5.8) можно преобразовать к виду:

$$\frac{dRe^*}{dX} + f Re_L (1 + H) = Re_L \left(\frac{c_f}{2} + \frac{\rho_{ct} v_{ct}}{\rho_{\infty} v_{\infty}} \right); \quad (6.39)$$

$$\frac{dRe_{t*}^*}{dX} + \frac{Re_{t*}^*}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} = Re_L \left(St + \frac{\rho_{ct} v_{ct}}{\rho_{\infty} v_{\infty}} \right), \quad (6.40)$$

где $X = x/L$ (L — характерный размер обтекаемой поверхности); Re_L — число Рейнольдса, определяемое по характерному размеру L ; $\Delta T = T_{ct} - T^*$; ρ_{ct} и v_{ct} — плотность газа и поперечная составляющая скорости газа (при вдувании или отсосе газа через проницаемую поверхность); число Стантона

$$St = \frac{q_{ct}}{\rho_{\infty} c_{p\infty} v_{\infty} \Delta T};$$

c_f — коэффициент трения; f — формпараметр, характеризующий кривизну обтекаемого тела;

$$f = \frac{\delta_{**}}{v_{\infty}} \frac{dv_{\infty}}{dx};$$

$H = \delta_*/\delta_{**}$ — формпараметр пограничного слоя.

Соотношения (6.40), могут быть записаны для случаев химически реагирующего газа и процесса массообмена в пограничном слое [19, 46]. Для непроницаемой поверхности в (6.39) и (6.40) следует принять $v_{ct} = 0$.

Интегральные соотношения вида (6.39) и (6.40) справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев. Для их решения необходимо знание зависимостей коэффициента трения c_f и числа Стантона St от определяющих факторов (Re^* , Re_{t*}^* , f , T_{ct}/T_{∞} , dp/dx , M_{∞} и др.). Указанные зависимости называются *законами трения и теплообмена*. Оказывается, что законы трения и теплообмена консервативны к изменению граничных условий. Другими словами, можно получить законы трения и теплообмена некоторого стандартного (эталонного) процесса, а затем распространить их на более сложные случаи. В качестве стандартного процесса можно выбрать обтекание изотермической пластины несжимаемой жидкостью. Пусть c_{f_0} — коэффициент трения, а St_0 — число Стантона,

полученные для стандартного процесса при одних и тех же числах Re^* и Re_{t*}^* . Авторы рассматриваемого метода ввели *относительный закон трения* при $Re^* = idem$: $\psi = c_f/c_{f_0}$ и *относительный закон теплообмена* при $Re_{t*}^* = idem$: $\psi_s = St/St_0$. С учетом этого они преобразовали (6.39) и (6.40) к виду

$$\frac{dRe^*}{dX} + f Re_L (1 + H) = Re_L \frac{c_{f_0}}{2} (\psi + b); \quad (6.40a)$$

$$\frac{dRe_{t*}^*}{dX} + \frac{Re_{t*}^*}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} = Re_L St_0 (\psi_s + b_t), \quad (6.40b)$$

где $b = 2\rho_{ct} v_{ct}/(\rho_{\infty} v_{\infty} c_{f_0})$ — параметр проницаемости, отнесенный к c_{f_0} ; $b_t = \rho_{ct} v_{ct}/(\rho_{\infty} v_{\infty} St_0)$ — тепловой параметр проницаемости, отнесенный к St_0 .

Рассмотрим случай обтекания несжимаемой жидкостью непроницаемой поверхности в ламинарном пограничном слое. Для обтекания пластины ($\Delta T = \text{const}$, $v_\infty = \text{const}$) интегральное уравнение энергии запишется в виде

$$\frac{d\text{Re}_t^{**}}{d\text{Re}_x} = \text{St}_0, \quad (6.41)$$

где (см. § 5.5)

$$\text{St}_0 = 0,332 / (\sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{2/3}). \quad (6.42)$$

Подставляя (6.42) в (6.41) и интегрируя, получаем закон теплообмена для ламинарного пограничного слоя:

$$\text{St}_0 = \frac{0,22}{\text{Re}_t^{**} \text{Pr}^{4/3}}. \quad (6.43)$$

В случае произвольного распределения скорости на внешней границе пограничного слоя и произвольного изменения температуры стенки (или ΔT) локальные значения коэффициента теплоотдачи можно найти следующим образом. Во-первых, можно принять, что продольный градиент давления слабо влияет на относительный закон теплообмена и $\psi_s \approx 1$. Во-вторых, можно записать интегральное уравнение энергии

$$\frac{d\text{Re}_t^{**}}{dX} + \frac{\text{Re}_t^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} = \text{St}_0 \text{Re}_L,$$

в котором St_0 определяется по (6.43).

Для нахождения Re_t^{**} имеем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\text{Re}_t^{**}}{dX} + \text{Re}_t^{**} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} \right) = \frac{0,22 \text{Re}_L}{\text{Re}_t^{**} \text{Pr}^{4/3}}.$$

Решением этого уравнения (с учетом того, что при $X = 0$ $\text{Re}_t^{**} = 0$) является следующее соотношение:

$$\text{Re}_t^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{0,44}{\text{Pr}^{4/3}} \text{Re}_0 \int_0^X \tilde{v}_\infty \Delta T^2 dX \right)^{1/2}, \quad (6.44)$$

где $\text{Re}_0 = \rho_\infty v_{0\infty} L / \mu_\infty$ — число Рейнольдса, подсчитанное по скорости набегающего потока $v_{0\infty}$; $\tilde{v}_\infty = v_\infty / v_{0\infty}$ — относительная скорость на внешней границе пограничного слоя; значения ΔT и $\tilde{v}_\infty$ должны быть заданы функциями продольной координаты X .

Вычислив Re_t^{**} по (6.44) и подставив результат в (6.43), получим значения локальных чисел St . Таким образом, можно найти распределение α вдоль обтекаемой поверхности вплоть до точки отрыва пограничного слоя.

Для турбулентного пограничного слоя законы трения и теплообмена не могут быть получены аналитически. Их определяют либо экспериментально, либо с помощью полумпирических теорий турбулентности. Как известно, теории турбулентности всегда содержат некоторые постоянные, которые находятся на основании опытных данных. С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьев доказали существование *предельных относительных законов* трения и теплообмена ($\text{Re}^{**} \rightarrow \infty$, $\text{Re}_t^{**} \rightarrow \infty$), которые не зависят от эмпирических констант турбулентности. Физически это объясняется тем, что с увеличением числа Re толщина вязкого подслоя стремится к нулю быстрее, чем толщина области турбулентного ядра потока. Предельные зависимости Кутателадзе—Леонтьева, учитывающие влияние сжимаемости газа и неизотермичности на относительный закон теплообмена в турбулентном пограничном слое, имеют вид

$$\psi_s = \left(\frac{\text{St}}{\text{St}_0} \right)_{\text{Re}_t^{**}} = \bar{\psi} \psi_M, \quad (6.45)$$

где

$$\bar{\psi} = \left(\frac{2}{\sqrt{\psi} + 1} \right)^2;$$

$$\psi_M = \left(\frac{\arctg M_\infty \sqrt{r(k-1)/2}}{M_\infty \sqrt{r(k-1)/2}} \right)^2;$$

здесь $\psi = T_{\text{ст}} / T_{\text{ст}}^{\text{н}}$.

В последней формуле $r = 0,9$ — коэффициент восстановления, а $k = c_p / c_v$. Уравнение (6.45) получено для области $\text{Re} \rightarrow \infty$, однако оно удовлетворительно согласуется с опытными данными и при конечных значениях числа Re .

6.7. Задачи с решениями

Задача 1. Пластина длиной $l = 1,5$ м продольно обтекается потоком воздуха ($v_\infty = 50$ м/с, $t_\infty = 8^\circ\text{C}$, $p_\infty = 0,202$ МПа). Из-за наличия перед ней турбулизирующей решетчат течения в пограничном слое турбулентное. Температура пластины $t_c = 12^\circ\text{C}$. Найдите средний коэффициент теплоотдачи, а также толщины пограничного слоя и вязкого подслоя на задней кромке пластины.

Решение. Средняя температура пограничного слоя $\bar{t} = 0,5(8 + 12) = 10^\circ\text{C}$. При этой температуре и $p = 0,101$ МПа для воздуха $\nu = 14,16 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 2,51 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К), $\text{Pr} = 0,705$. При $p = 0,202$ МПа $\nu = 0,5 \cdot 14,16 \cdot 10^{-6} = 7,08 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{50 \cdot 1,2}{7,08 \cdot 10^{-6}} = 8,47 \cdot 10^6.$$

Местное число Нуссельта можно определить по формуле $\text{Nu}_x =$

$$= 0,0296 \text{Re}_x^{0,8} \text{Pr}^{0,4}. \text{ Обозначим } C = 0,0296 \lambda \left(\frac{\nu_\infty}{\nu} \right)^{0,8} \text{Pr}^{0,4}.$$

Тогда $\alpha = Cx^{-0,2}$. Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha \, dx = \frac{C}{0,8} l^{-0,2},$$

а среднее число Нуссельта $\bar{\text{Nu}} = 0,037 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,4}$.

Найдем среднее значение $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \frac{0,0251}{1,2} 0,037 (8,47 \cdot 10^6)^{0,8} \cdot 0,705^{0,4} = 234,7 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Определим местный коэффициент трения при $x = l$:

$$c_f = \frac{0,0596}{(8,47 \cdot 10^6)^{0,2}} = 2,45 \cdot 10^{-3}$$

Динамическая скорость

$$\nu_* = 50 \sqrt{\frac{2,45 \cdot 10^{-3}}{2}} = 1,75 \text{ м/с}.$$

Толщина вязкого подслоя

$$\delta_b = 5 \frac{7,08 \cdot 10^{-6}}{1,75} = 20,2 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 20,2 \text{ мкм}.$$

Толщина пограничного слоя

$$\delta = \frac{0,37x}{\text{Re}_x^{0,2}} = \frac{0,37 \cdot 1,2}{(8,47 \cdot 10^6)^{0,2}} = 1,83 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 18,3 \text{ мм}.$$

Ответ. $\bar{\alpha} = 234,7 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$; $\delta = 18,3 \text{ мм}$; $\delta_b = 20,2 \text{ мкм}$.

Задача 2. Нагретая пластина длиной $l = 2$ м продольно омывается потоком воды. Скорость воды $\nu_\infty = 0,5$ м/с и ее температура $T_\infty = 180^\circ\text{C}$. Постройте графики распределения теплоотдачи от поверхности пластины к воде для двух случаев: а) малая степень турбулентности потока воды ($\epsilon = 0,08\%$); б) большая степень турбулентности ($\epsilon = 0,3\%$). Найдите также $\bar{\alpha}$ — средний коэффициент теплоотдачи. Считайте, что разность температур пластины и воды мала, в расчете теплоотдачи изменением физических свойств воды с изменением температуры можно пренебречь.

Решение. При $t_\infty = 180^\circ\text{C}$ для воды $\lambda = 0,663 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\nu = 0,158 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\text{Pr} = 1,0$. На основании опытных данных, приведенных в [53], можно принять $\text{Re}_{x,\text{кр}1} = 2,8 \cdot 10^6$, $\text{Re}_{x,\text{кр}2} = 4,0 \cdot 10^6$, если $\epsilon = 0,08\%$ и $\text{Re}_{x,\text{кр}1} = 0,3 \cdot 10^6$, $\text{Re}_{x,\text{кр}2} = 1,3 \cdot 10^6$, если $\epsilon = 0,3\%$.

Рассчитаем критические точки для первого случая:

$$x_{\text{кр}1} = 2,8 \cdot 10^6 \frac{0,158 \cdot 10^{-6}}{0,5} = 0,885 \text{ м};$$

$$x_{\text{кр}2} = 4,0 \cdot 10^6 \frac{0,158 \cdot 10^{-6}}{0,5} = 1,264 \text{ м}.$$

Для второго случая аналогично получим:

$$x_{\text{кр}1} = 0,0948 \text{ м}; \quad x_{\text{кр}2} = 0,411 \text{ м}.$$

В области ламинарного пограничного слоя ($0 \leq x \leq x_{\text{кр}1}$) $\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$, а в области турбулентного ($x_{\text{кр}2} \leq x \leq l$) $\text{Nu}_x = 0,0296 \text{Re}_x^{0,8} \text{Pr}^{0,4}$, где $\text{Nu}_x = \alpha x / \lambda$; $\text{Re}_x = \nu_\infty x / \nu$.

Подставляя в указанные формулы известные значения ν_∞ , λ , ν и Pr , получаем для ламинарного пограничного слоя $\alpha_l = 391,5x^{-0,5}$, а для турбулентного $\alpha_t = 3110x^{-0,2}$. В переходной области пограничного слоя $\alpha = \alpha_l(1 - \gamma) + \alpha_t\gamma$, где γ — коэффициент перемежаемости ($\gamma = 0$ в точке $x = x_{\text{кр}1}$ и $\gamma = 1$ в точке $x = x_{\text{кр}2}$). При $x_{\text{кр}1} \leq x \leq x_{\text{кр}2}$ $\gamma = (x - x_{\text{кр}1}) / (x_{\text{кр}2} - x_{\text{кр}1})$, а коэффициент теплоотдачи $\alpha = \alpha_l(1 - \gamma) + \alpha_t\gamma$. Графики $\alpha = \alpha(x)$ приведены на рис. 6.13.

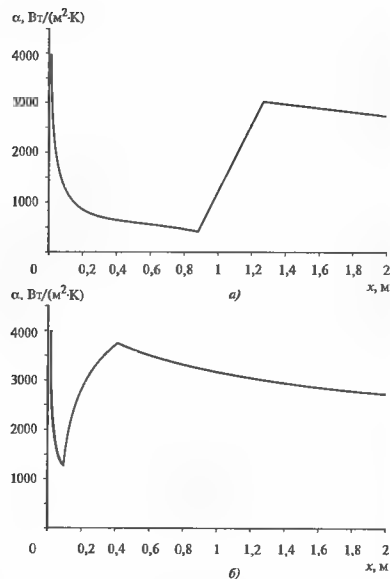


Рис. 6.13. Изменение α по длине пластины при малой (а) и большой (б) степенях турбулентности потока

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \left(\int_0^{x_{кр1}} \alpha dx + \int_{x_{кр1}}^{x_{кр2}} \alpha dx + \int_{x_{кр2}}^l \alpha dx \right).$$

Вычислив интегралы, получаем в первом случае $\bar{\alpha} = 1728 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ и во втором случае $\bar{\alpha} = 2944 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Ответ. При малой степени турбулентности $\bar{\alpha} = 1728 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, а при большой $\bar{\alpha} = 2944 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Глава седьмая СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ

7.1. Общие сведения о свободной конвекции

Вынужденное движение происходит под действием сил, приложенных к жидкости вне рассматриваемой системы. Например, движение жидкости по трубам происходит за счет перепада давления, создаваемого насосом. Свободное движение обусловлено неоднородным распределением массовых сил, приложенных к частицам жидкости внутри системы. К массовым силам относятся сила тяжести, центробежная сила инерции и некоторые другие. Наиболее распространенным случаем свободного движения является *термогравитационная конвекция* в неравномерно нагретой жидкости, когда легкие частицы всплывают вверх, а тяжелые опускаются вниз. Горизонтальные слои жидкости будут находиться в состоянии устойчивого равновесия, если тяжелый слой расположен внизу, а легкий — сверху. Например, конвекция отсутствует в том случае, если нижний слой воды находится при температуре 4°C , а верхний — при 0°C , а также тогда, когда вода нагревается сверху. Вода вверх может закипеть, а внизу она останется холодной. При нагревании воды снизу холодные и, следовательно, более тяжелые слои будут наверху, а легкие (более нагретые) — внизу. Под действием силы тяжести холодные слои опускаются вниз и вытесняют нагретые вверх, в результате чего происходит перемешивание и нагревание воды во всем объеме. Работу по перемешиванию частиц жидкости совершает сила тяжести.

Скорость свободного движения зависит от разности температур нагретых и холодных частиц жидкости. Ее можно оценить исходя из закона сохранения механической энергии. Обозначим плотность жидкости вдали от нагретой вертикальной стенки через ρ_{∞} , а плотность вблизи стенки через ρ . Высота стенки составляет h . Идеализируя задачу, будем считать, что в процессе перемещения жидкости вдоль стенки отсутствуют силы трения, ее плотность ρ постоянна, а скорость равна нулю внизу и v_0 вверх. Тогда баланс механической энергии для единичного объема жидкости можно записать в виде

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + \rho gh = \rho_{\infty} gh.$$

Отсюда следует, что характерная скорость свободной конвекции

$$v_0 = \sqrt{2gh \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho}}.$$

Разность плотностей выразим с помощью коэффициента объемного расширения β :

$$\rho - \rho_{\infty} = -\rho\beta(T - T_{\infty}),$$

где T и T_{∞} — температуры, соответствующие плотностям ρ и ρ_{∞} . Таким образом,

$$v_0 = \sqrt{2g\beta(T - T_{\infty})h}. \quad (7.1)$$

Видно, что скорость v_0 увеличивается с ростом h и разности температур $\Delta T = T - T_{\infty}$.

Для воздуха при $t = 20^\circ\text{C}$, $\Delta T = 20\text{ K}$ и $h = 0,5\text{ м}$ имеем $v_0 = 0,25\text{ м/с}$. Действительная скорость (ее максимальное значение в пограничном слое около вертикальной стенки) будет меньше (приблизительно $0,06\text{ м/с}$), что объясняется неучетом сил трения при оценке v_0 , более сложным, чем в рассмотренном случае, характером движения воздуха внутри слоя.

Рассмотрим свободную конвекцию воздуха вдоль нагретой вертикальной трубы (рис. 7.1). Как и при вынужденном обтекании, около трубы имеется пограничный слой. Вначале толщина слоя и скорость воздуха малы, течение ламинарное. Коэффициент теплоотдачи α в этой области по мере продвижения вверх уменьшается. Далее, при определенной толщине слоя ламинарное течение теряет устойчивость, струйки воздуха испытывают поперечные колебания и течение становится волновым (локонообразным). В верхней части трубы упорядоченное движение нарушается, воздух интенсивно перемешивается, образующиеся вихри систематически отрываются от поверхности трубы, т.е. здесь имеет место турбулентный режим движения воздуха. Таким образом, как и при вынужденном обтекании пластины, в случае свободной конвекции около вертикальной трубы (или вертикальной плоской стенки) наблюдается ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения в пограничном слое. В соответствии с этим находится и характер изменения α по высоте стенки (рис. 7.1). В области турбулентного пограничного слоя значение α практически постоянно, так как оно в значительной степени зависит от толщины вязкого подслоя, которая (в отличие от вынужденного обтекания пластины) не возрастает, а остается постоянной. В первую очередь это объясняется тем, что по мере продвижения к верхнему краю стенки скорость свободного движения воздуха увеличивается, в то время как при вынужденном обтекании пластины

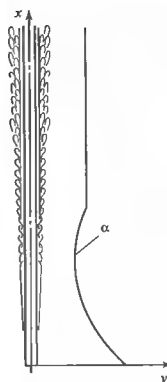


Рис. 7.1. Свободная конвекция и изменение α вдоль оси нагретой вертикальной трубы

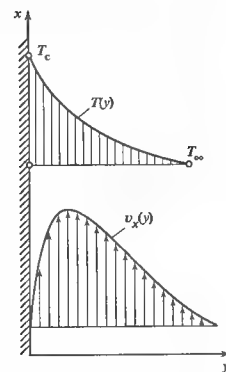


Рис. 7.2. Изменение температуры и скорости жидкости в пограничном слое при свободной конвекции

скорость постоянна. Согласно теоретическим оценкам, толщина вязкого подслоя

$$\delta_b = 3,9x(\text{Gr}_x \text{Pr})^{1/3},$$

откуда следует, что δ_b не зависит от продольной координаты x .

Характер изменения температуры и скорости v_x типичный для пограничного слоя при свободной конвекции жидкости около тела, находящегося в большом объеме жидкости, показан на рис. 7.2. Скорость на стенке равна нулю, затем она быстро увеличивается, достигает максимума, после чего постепенно уменьшается до нуля на большом расстоянии от стенки. Область изменения температуры жидкости от температуры стенки T_c до температуры вдали от стенки T_{∞} называется тепловым пограничным слоем. Динамический пограничный слой — это область движущейся жидкости. При свободной конвекции тепловой и динамический пограничные слои взаимозависимы и их следует рассматривать совместно. Увеличение ΔT приводит к увеличению скорости свободного движения и уменьшению толщины динамического пограничного слоя. В свою очередь, увеличение скорости является причиной уменьшения теплового пограничного слоя и увеличения коэффициента теплоотдачи. В турбулентном пограничном

слое увеличение скорости приводит к уменьшению толщины вязкого подслоя. Рассмотрим процесс теплообмена при свободной конвекции с точки зрения теории пограничного слоя. Для ламинарного пограничного слоя (см. гл. 5) справедлива зависимость

$$Nu_x = f(Pr) \sqrt{Re_x}. \quad (7.2)$$

Здесь x — продольная координата; $Nu_x = \alpha x / \lambda$; $Re_x = v_\infty x / \nu$. При свободной конвекции скорость v_∞ следует заменить на $v_0 = \sqrt{g\beta\Delta T x}$ [множитель 2 в (7.1) опускаем как несущественный]. При этом

$$Re_x = \frac{v_0 x}{\nu} = \frac{\sqrt{g\beta\Delta T x^3}}{\nu} = \left(\frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu^2} \right)^{1/2} = Gr_x^{1/2}.$$

Здесь Gr_x — местное число Грасгофа. Заменяя в (7.2) Re_x на $Gr_x^{1/2}$, получаем $Nu_x \sim Gr_x^{1/4}$. Эта зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа типична для всех ламинарных пограничных слоев при свободной конвекции. При $\Delta T = \text{const}$ $\alpha \sim x^{-1/4}$. Если задано граничное условие $q_c = \text{const}$ (электрический обогрев стенки), то, полагая $\Delta T = q_c / \alpha$, из зависимости $Nu_x \sim Gr_x^{1/4}$ получаем $\alpha \sim x^{-1/5}$.

Следует отметить различную форму записи числа Gr_x при разных граничных условиях. При $T_c = \text{const}$ ($\Delta T = \text{const}$)

$$Gr_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu^2},$$

а при $q_c = \text{const}$ (характерный температурный напор равен $q_c x / \lambda$)

$$Gr_{q,x} = \frac{g\beta q_c x^4}{\nu^2 \lambda}.$$

В общем случае (не только для вертикальной стенки) для описания средней теплоотдачи при свободной конвекции жидкости используются следующие безразмерные комплексы (числа подобия):

$$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda} \text{ — число Нуссельта;}$$

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T l_0^3}{\nu^2} \text{ — число Грасгофа;}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \text{ — число Прандтля;}$$

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta\Delta T l_0^3}{\nu\alpha} \text{ — число Рейля.}$$

Здесь l_0 — характерный размер тела, около которого происходит свободная конвекция. Для вертикальной плоской стенки или вертикальной трубы $l_0 = h$, а для горизонтальной трубы $l_0 = d$, где d — внешний диаметр трубы.

Среднее число Нуссельта иногда обозначают $\bar{Nu}$.

Из анализа уравнений конвективного теплообмена (см. § 4.7) следует, что при «ползущем» свободном движении ($Pr \gg 1$), когда инерционными силами можно пренебречь,

$$Nu = f(Ra)$$

В общем случае

$$Nu = f_1(Gr, Pr).$$

Вместо последней зависимости обычно принимают

$$Nu = f_2(Ra, Pr).$$

Расчетные формулы будут даны ниже (см. § 7.2, 7.3)

7.2. Теплоотдача при свободной конвекции жидкости около вертикальной пластины или вертикальной трубы

В § 7.1 мы рассмотрели общие закономерности теплообмена при свободной конвекции, вытекающие из теории пограничного слоя. В случае вынужденного обтекания пластины теория пограничного слоя справедлива при $Re_x \rightarrow \infty$, а в случае свободной конвекции — при $Gr_x \rightarrow \infty$ (или $Ra_x \rightarrow \infty$). При малых значениях Gr_x (или Ra_x) необходимо решать полную систему уравнений конвективного теплообмена. Для получения решения используют численные методы, а трудоемкий процесс вычислений выполняют компьютеры. Результаты расчета сравнивают с экспериментальными данными, и при этом уточняют решение. Таким образом получают формулы, пригодные для практического использования. Эти формулы приводятся ниже. Ссылки на оригинальные работы можно найти в [34, 36, 53].

При свободной конвекции поле температуры зависит от поля скорости и наоборот. Поэтому для нахождения теплоотдачи уравнения конвективного теплообмена рассматриваются совместно.

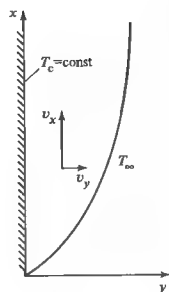


Рис. 7.3. К постановке задачи о теплообмене в пограничном слое на вертикальной пластине (свободная конвекция)

Рассмотрим кратко теорию пограничного слоя при свободной конвекции жидкости вдоль вертикальной плоской стенки (рис. 7.3). Запишем уравнения пограничного слоя:

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}; \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= g\beta\theta + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2a)$$

Приведенные уравнения записаны для стационарного процесса теплообмена. В них $\theta = T - T_\infty$. Предположим, что температура вертикальной пластины $T_c = \text{const}$. Тогда граничные условия для полуограниченной пластины ($0 \leq x \leq \infty$) имеют вид:

$$\begin{aligned} v_x|_{y=0} &= v_y|_{y=0} = 0; \quad \theta|_{y=0} = \theta_c = \Delta T; \\ v_x|_{y \rightarrow \infty} &= 0; \quad \theta|_{y \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$

Польгаузен преобразовал уравнения пограничного слоя к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \Theta &= 0; \\ \Theta'' + 3\text{Pr}\varphi\Theta' &= 0. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} = \frac{\theta}{\Delta T};$$

$$\varphi = \frac{\psi}{4C\nu x^{3/4}},$$

где ψ — функция тока; $\Delta T = T_c - T_\infty$;

$$C = \sqrt[4]{\frac{g\beta\Delta T}{4\nu^2}}.$$

Безразмерные величины Θ и φ являются функциями переменной

$$\eta = C \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

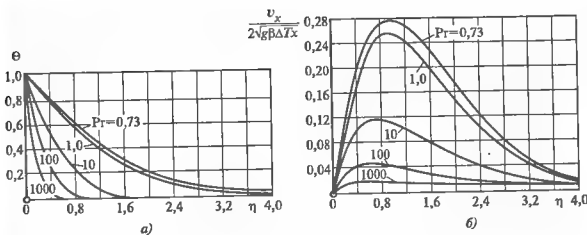


Рис. 7.4. Влияние числа Pr на безразмерные профили температуры (а) и скорости (б)

Граничные условия для функций $\varphi(\eta)$ и $\Theta(\eta)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi|_{\eta=0} &= 0; \quad \varphi'|_{\eta=0} = 0; \quad \Theta|_{\eta=0} = 1; \\ \varphi'|_{\eta \rightarrow \infty} &= 0; \quad \Theta|_{\eta \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$

Результаты численного решения задачи представлены на рис. 7.4. Из этого решения следует, что толщины δ и δ_t являются функциями Pr. При $\text{Pr} = 1$ $\delta = \delta_t$ толщина пограничного слоя может быть найдена из условия $\eta|_{y=\delta} = 5$. Легко видеть, что $\delta \sim x^{1/4}$. Из результатов расчета числа Нуссельта следует, что

$$\text{Nu}_x \sim f(\text{Pr}) \text{Ra}_x^{1/4}, \quad (7.3)$$

$$\text{где } f(\text{Pr}) = 0,6 \left(\frac{\text{Pr}}{1 + 2\text{Pr}^{1/2} + 2\text{Pr}} \right)^{1/4}.$$

Расчетные рекомендации. Зависимость (7.3) можно рекомендовать для расчета местного α в диапазоне $10^5 < \text{Gr}_x < 10^8$ при $T_c = \text{const}$.

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha \, dx.$$

Путем интегрирования (7.3) получим

$$\bar{\text{Nu}} = \frac{4}{3} \text{Nu}|_{x=l}.$$

где $\text{Nu}|_{x=l}$ — местное число Нуссельта при $x = l$.

Все значения физических свойств при расчетах выбираются из таблиц по температуре $T_{\text{cp}} = 0,5(T_c + T_\infty)$.

Если на пластине задано граничное условие в виде $q_c = \text{const}$, то, как показывают расчеты, коэффициент теплоотдачи оказывается выше на 10—15 %, чем при $T_c = \text{const}$. При заданном значении q_c температура T_c неизвестна. В этом случае вместо ΔT надо взять комплекс $q_c x / \lambda$, имеющий размерность температуры. Тогда

$$Ra_x = \frac{g \beta q_c x^4}{\lambda \nu^2} Pr.$$

При $q_c = \text{const}$ теоретически получена зависимость

$$Nu_x = 0,615 \left(\frac{Pr}{0,8 + Pr} \right)^{1/5} Ra_x^{1/5}. \quad (7.4)$$

При этом среднее число Нуссельта

$$\overline{Nu} = 1,22 Nu|_{x=l}, \quad (7.5)$$

где $\overline{Nu} = \frac{q_c l}{(\overline{T}_c - T_\infty) \lambda}$.

Следует отметить, что по (7.5) можно найти среднюю температуру пластины $\overline{T}_c$. Определяющая температура в (7.4) и (7.5) такая же, как и для $T_c = \text{const}$. Эти формулы справедливы при $Ra_x < 5 \cdot 10^{10}$ и $0,1 \leq Pr \leq 100$.

Для турбулентного пограничного слоя коэффициент теплоотдачи, во-первых, практически не зависит от граничных условий и, во-вторых, не зависит от x :

$$Nu_x = C Ra_x^{1/3},$$

где, согласно опытным данным, $C = 0,115 \dots 0,15$.

Для практических расчетов наибольший интерес представляет средний коэффициент теплоотдачи. В том случае, когда на пластине существует ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения в пограничном слое, средний коэффициент теплоотдачи определяется следующим образом: при $T_c = \text{const}$

$$\overline{Nu}^{1/2} = 0,825 + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}};$$

при $q_c = \text{const}$

$$\overline{Nu}^{2/3} = 0,825 \overline{Nu}^{1/6} + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0,437}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}}.$$

Указанные выше формулы для ламинарного пограничного слоя могут служить основой для нахождения коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции около вертикальных цилиндров при достаточно малом отношении толщины пограничного слоя к радиусу цилиндра.

Формулы, полученные в результате решения уравнений пограничного слоя (7.2а), ограничены условиями справедливости теории. Во-первых, толщина пограничного слоя должна быть мала, а число Релея велико ($Ra_x > 10^5$). Во-вторых, течение в пограничном слое должно быть ламинарным ($Ra_x < Ra_{x,кр}$). Теоретический расчет свободной конвекции в широком интервале изменения чисел Ra_x можно осуществить путем численного решения полных, а не упрощенных (7.2а), уравнений движения и энергии (см. гл. 4).

Как указывалось выше, значения физических свойств жидкости, входящих в расчетные формулы, выбирают по определяющей температуре $T_{опр} = 0,5(T_c + T_\infty)$. Этот метод учета переменности физических свойств является приближенным. Он справедлив, если температура в пограничном слое меняется мало, а сами свойства в области этой температуры изменяются незначительно. При давлениях, близких к критическому (в области термодинамической критической точки), свойства жидкости изменяются сильно и немонотонно. Тогда метод определяющей температуры теряет силу. При этом уравнения пограничного слоя, записанные в приближении Буссинеска (в уравнении движения учитывается лишь зависимость плотности от температуры в лагранжевом, определяющем массовую силу), необходимо обобщить на случай реальной зависимости свойств от температуры. Вследствие сложной зависимости физических свойств от температуры и давления теоретический расчет теплоотдачи проводится для конкретных жидкостей при фиксированных значениях давления, T_c (или q_c) и T_∞ . Путем численного интегрирования системы уравнений пограничного слоя, записанных для переменных свойств жидкости, для H_2O , CO_2 , N_2 и He получена формула Попова—Янкова:

$$Nu_{x0} = Nu_{x0} \left(\frac{c_p}{c_{pc}} \right)^{0,45} \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_c} \right)^n \quad (7.6)$$

В (7.6) Nu_{x0} — число Нуссельта, вычисляемое с помощью уравнения для постоянных свойств жидкости:

$$Nu_{x0} = \frac{3}{4} Ra_x^{1/4} \left(\frac{2Pr}{5 + 10Pr^{1/2} + 10Pr} \right)^{1/4}. \quad (7.7)$$

где

$$Ra_x = \frac{g \beta_0 x^3}{\nu_c a_c}; \quad \overline{Pr} = \frac{\mu_c c_p}{\lambda_c};$$

$$\overline{\rho} = \frac{1}{\rho_c} \frac{\rho_\infty - \rho_c}{T_\infty - T_c}; \quad \overline{c_p} = \frac{h_c - h_\infty}{T_c - T_\infty}.$$

Здесь $\theta_c = T_c - T_\infty$ ($T_c = \text{const}$); индекс «с» указывает на то, что значение данного свойства выбирается по температуре T_c , а индекс « ∞ » — по температуре T_∞ .

В (7.6) показатель степени $n = 0,32$ при $\bar{c}_p / c_{pc} \leq 1$ и $n = 0,1$ при $\bar{c}_p / c_{pc} > 1$. Формула Попова—Яныкова описывает результаты расчета в области значений $10^5 < Ra_x < 10^{10}$; $0,59 \leq Pr \leq 28$; $0,08 \leq \bar{c}_p / c_{pc} \leq 4,0$ и $0,2 \leq \lambda_c / \lambda_\infty \leq 2$.

В случае $q_c = \text{const}$ в правую часть (7.7) следует ввести поправочный коэффициент 1,15.

7.3. Свободная конвекция около горизонтальной пластины или горизонтальной трубы. Конвекция в ограниченном пространстве

Рассмотрим особенности свободного движения около горизонтальной пластины, горизонтальной трубы и в ограниченном пространстве, а также приведем расчетные формулы для теплоотдачи.

Горизонтальная пластина. Пластина (или плита) может быть обращена нагретой поверхностью вверх или вниз. Характеристики свободного движения в этих двух случаях отличаются друг от друга. Если пластина обращена нагретой поверхностью вверх, то на ней в начале обтекания образуется ламинарный пограничный слой. На некотором расстоянии от кромки течение становится неустойчивым, появляются нерегулярные вихри и турбулентность, и в центральной части пластины происходит отрыв пограничного слоя с образованием струй нагретой жидкости (рис. 7.5). Для пластин больших размеров ламинарное течение наблюдается только около кромок, на остальной части поверхности течение турбулентное.

Если нагретая поверхность пластины обращена вниз, то под ней возникает ползущее течение жидкости, направленное от центра к краям пластины. Течение такого же типа будет и тогда, когда более холодная, чем жидкость, поверхность пластины обращена вверх (при условии конечных размеров пластины).

При свободном движении вблизи вертикальной пластины на частицы жидкости действует термogravitационная сила, проекция которой на ось

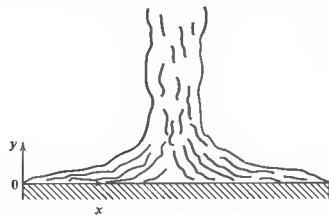


Рис. 7.5. Течение жидкости вблизи нагретой горизонтальной пластины

Ox равна $\rho g \beta (T - T_\infty)$, а $\partial p_1 / \partial y = 0$ ($p_1 - p - p_c$, где p_c — гидростатическое давление в неподвижной жидкости с плотностью ρ_∞). Для горизонтальной пластины (рис. 7.5) проекция термogravitационной силы на ось Ox равна нулю, а движение происходит из-за наличия градиента давления $\partial p_1 / \partial x$. Докажем, что такой градиент в этом случае существует. Из уравнения движения в проекции на ось Oy в приближении пограничного слоя следует

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \pm \rho g \beta (T - T_\infty).$$

Знаки «плюс» и «минус» относятся к случаям $T_c > T_\infty$ и $T_c < T_\infty$ соответственно.

Пронтегрируем последнее уравнение по y в пределах от 0 до ∞ :

$$p_1(x, y) = \mp \int_0^\infty \rho g \beta (T - T_\infty) dy. \quad (7.7a)$$

При интегрировании мы учли, что $p_1|_{y=\infty} = 0$. Теперь продифференцируем (7.7a) по x . Получим

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \mp \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \rho g \beta (T - T_\infty) dy. \quad (7.7b)$$

Интеграл является функцией x , причем с увеличением x его абсолютное значение возрастает. Из (7.7b) видно, что градиент давления возникает вследствие изменения вдоль пластины термogravitационной силы. Для нагретой пластины $\partial p_1 / \partial x < 0$ и течение имеет направление от кромки к середине пластины. Для холодной пластины $\partial p_1 / \partial x > 0$, т.е. происходит течение от середины к краям пластины.

Приведем формулы для расчета среднего коэффициента теплоотдачи горизонтальной пластины с нагретой поверхностью, обращенной вверх, в случае $T_c = \text{const}$:

при $Ra \leq 10^5$

$$\overline{Nu} = \frac{0,766 Ra^{1/5}}{\left[1 + \left(\frac{0,322}{Pr} \right)^{11/20} \right]^{4/11}}; \quad (7.8)$$

при $Ra > 10^5$

$$\overline{Nu} = \frac{0,15 Ra^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0,322}{Pr} \right)^{11/20} \right]^{20/33}}. \quad (7.9)$$

В (7.8) и (7.9) определяющий размер l , входящий в формулы для чисел $\overline{Nu}$ и Ra , находится по площади пластины F и ее периметру P :

$$l = F/P,$$

а определяющая температура $T_{\text{ср}} = 0,5(T_c + T_{\infty})$.

Для воздуха ($Pr \approx 0,7$) формулы (7.8) и (7.9) упрощаются:

при $Ra \leq 10^5$

$$\overline{Nu} = 1,10 Ra^{1/5}; \quad (7.9a)$$

при $Ra > 10^5$

$$\overline{Nu} = 0,203 Ra^{1/3}. \quad (7.9b)$$

Горизонтальная труба. Наблюдения показывают (рис. 7.6), что около нагретой горизонтальной трубы образуется пограничный слой, толщина которого незначительно растет с увеличением угла ϕ . Течение в пограничном слое ламинарное, но в кормовой части трубы пограничный слой отрывается от поверхности и образуется восходящая струя нагретой жидкости. Толщина пограничного слоя зависит от числа Релея:

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu^2} Pr,$$

где $\Delta T = T_c - T_{\infty}$.

При малых числах Ra толщина пограничного слоя соизмерима с радиусом трубы, с увеличением числа Ra она уменьшается. Ввиду большой толщины пограничного слоя и образования струйного течения теория

пограничного слоя здесь не всегда справедлива. Достоверные данные для теплоотдачи можно получить экспериментально или путем численного решения полной системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Результаты расчета показывают, что число Нуссельта монотонно убывает с ростом ϕ .

Для свободной конвекции около горизонтальной трубы число Нуссельта

$$Nu = \alpha d/\lambda,$$

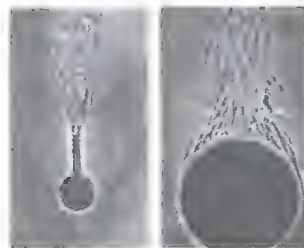


Рис. 7.6. Свободная конвекция около нагретых горизонтальных труб

где α — местный (соответствующий данному углу ϕ) коэффициент теплоотдачи.

В результате численного решения и эксперимента получают таблицу значений местных Nu и средних $\overline{Nu}$ чисел Нуссельта при разных числах Ra и Pr . Оказывается, что из-за влияния кривизны поверхности цилиндра обобщение этих данных с помощью простого уравнения, справедливого в широком диапазоне чисел Ra и Pr затруднительно. Чтобы получить универсальное уравнение, был предложен следующий способ определения $\overline{Nu}$. Во-первых, в основу расчета закладывается формула, полученная при вычислении в приближении пограничного слоя, т.е. при толщине пограничного слоя $\delta \ll d$:

$$\overline{Nu}' = \frac{\bar{\alpha}' d}{\lambda} = 0,518 Ra^{1/4} \left[1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{3/5} \right]^{-5/12}, \quad (7.10)$$

Во-вторых, рассматривается цилиндрический слой жидкости толщиной δ на поверхности цилиндра и считается, что через этот слой перенос теплоты происходит путем теплопроводности. Тогда

$$q_c = \frac{2\lambda(T_c - T_{\infty})}{d \ln \frac{d+2\delta}{d}}. \quad (7.11)$$

В-третьих, считается, что

$$\delta/\lambda = 1/\bar{\alpha}'. \quad (7.12)$$

Так как средний коэффициент теплоотдачи при $T_c = \text{const}$

$$\bar{\alpha} = \frac{q_c}{T_c - T_{\infty}}, \quad (7.13)$$

то с учетом (7.10)—(7.13) легко получить формулу

$$\overline{Nu} = \frac{2}{\ln(1 + 2/\overline{Nu}')} \quad (7.14)$$

Формула (7.14) для всех чисел $Pr \geq 0,1$ с погрешностью не более 6,5 % подтверждается опытными данными.

Для воздуха ($Pr = 0,7$) формула (7.14) имеет вид

$$\overline{Nu} = \frac{2}{\ln\left(1 + \frac{2}{0,399 Ra^{1/4}}\right)}. \quad (7.15)$$

Значения физических свойств в (7.14) и (7.15) выбираются по $T_{\text{ср}} = 0,5(T_c + T_{\infty})$.

Для расчета $\bar{\alpha}$ при свободной конвекции воздуха около горизонтальных электрически обогреваемых проводов ($q_c = \text{const}$) рекомендуется пользоваться следующими данными:

Ra	10^{-4}	10^3	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2
Nu	0,463	0,525	0,596	0,800	1,07	1,51	2,11

Конвекция в ограниченном пространстве. Самым простым случаем здесь является конвекция жидкости в зазоре между двумя горизонтальными безграничными пластинами. Если температура нижней пластины меньше, чем верхней, жидкость в зазоре находится в устойчивом равновесии и перенос теплоты осуществляется «чистой» теплопроводностью, причем

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\delta / \lambda}, \quad (7.16)$$

где T_{c1} и T_{c2} — температуры пластин; δ — толщина зазора; λ — теплопроводность жидкости.

Однако, если температура нижней пластины больше, чем температура верхней, равновесие будет неустойчивым и при определенном числе Рейля

$$Ra = \frac{g\beta(T_{c1} - T_{c2})\delta^3}{\nu^2} Pr$$

жидкость приходит в движение. При этом образуются ячейки (рис. 7.7), которые называются ячейками Бенара (по имени ученого, впервые наблюдавшего это явление). С увеличением Ra ячейчатая структура нарушается.

В зависимости от конфигурации зазоров или щелей картина конвекции в них может быть различной (рис. 7.8).

Приближенно расчет плотности теплового потока через узкий зазор, плоскую или кольцевую прослойку можно проводить, используя эквивалентную теплопроводность:

$$\lambda_{\text{экв}} = 0,18\lambda Ra^{1/4}. \quad (7.17)$$

Формула (7.17) справедлива при $Ra > 10^3$. Если $Ra < 10^3$, $\lambda_{\text{экв}} = \lambda$. Подсчитанное по (7.17) значение $\lambda_{\text{экв}}$ подставляется в (7.16) для определения q .

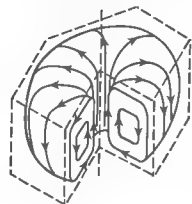


Рис. 7.7. Ячейки Бенара при свободной конвекции в горизонтальном слое жидкости

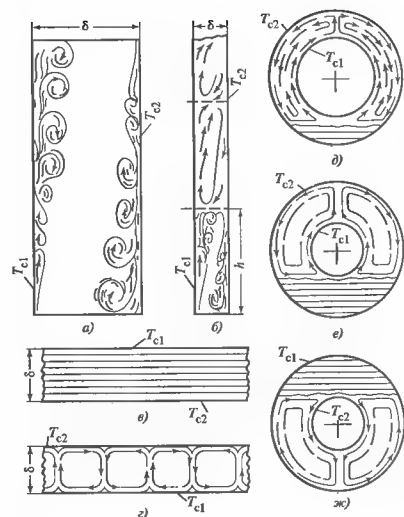


Рис. 7.8. Различные случаи свободной конвекции в щелях и зазорах
а — z — плоские зазоры; д — жс — кольцевые зазоры

7.4. Задачи с решениями

Задача 1. Рассчитайте тепловые потери за счет свободной конвекции воздуха около боковой поверхности теплообменника — подогревателя питательной воды, установленного на тепловой электрической станции. Высота подогревателя равна 10 м, диаметр — 3,5 м, а температура поверхности составляет 55 °С. Температура воздуха 25 °С.

Решение. Средняя температура воздуха в пограничном слое равна $0,5(55 + 25) = 40$ °С. При этой температуре для воздуха $\nu = 16,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 2,75 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $Pr = 0,7$, $\beta = 1/(273 + 40) = 3,19 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$.

Вычисляем число Рейля:

$$Ra = \frac{9,8 \cdot 3,19 \cdot 10^{-3} (55 - 25) \cdot 10^3}{(16,9 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0,7 = 2,3 \cdot 10^{12}.$$

Среднее число Нуссельта

$$\overline{Nu}^{1/2} = 0,825 + \frac{0,387(2,3 \cdot 10^{12})^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{0,7}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} = 36,4,$$

откуда

$$\overline{Nu} = 36,4^2 = 1325.$$

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = 1325 \frac{2,75 \cdot 10^{-2}}{10} = 3,6 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Тепловой поток, отводимый воздухом от боковой поверхности подогревателя,

$$Q = 3,6\pi \cdot 3,5 \cdot 10(55 - 25) = 11\,870 \text{ Вт}.$$

Ответ. Тепловые потери составляют 11,87 кВт.

Задача 2. По медной шине прямоугольного поперечного сечения $a \times b = 100 \times 3$ мм (a — вертикальный, b — горизонтальный размеры) пропускается электрический ток силой 955 А. Температура воздуха, окружающего шину, $t_{\text{ж}} = 20$ °С. Удельное электрическое сопротивление меди составляет

$2,3 \cdot 10^{-8}$ Ом · м. Найдите среднюю температуру поверхности шины $\bar{t}_c$.

Решение. Плотность теплового потока на поверхности шины

$$q = \frac{955^2 \cdot 2,3 \cdot 10^{-8}}{2(0,1 + 0,003) \cdot 0,1 \cdot 0,003} = 348 \text{ Вт/м}^2.$$

Примем в первом приближении температуру поверхности шины равной 60 °С. Тогда средняя температура пограничного слоя воздуха будет равна 40 °С, а его физические свойства будут такими же, как в задаче 1. Последовательно находим:

$$Ra = \frac{9,8 \cdot 3,19 \cdot 10^{-3} \cdot 348 \cdot (0,1)^4 \cdot 0,7}{(16,9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 2,75 \cdot 10^{-2}} = 1,0 \cdot 10^8;$$

$$\overline{Nu} = 1,22 \cdot 0,615 \cdot 0,467(1,0 \cdot 10^8)^{1/5} = 17,5;$$

$$\bar{\alpha} = 17,5 \frac{2,75 \cdot 10^{-2}}{0,1} = 4,81 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Выделяющаяся в шине теплота отводится путем свободной конвекции воздуха и излучением:

$$\bar{q} = \bar{\alpha}(\bar{T}_c - T_{\text{ж}}) + \epsilon \sigma_0(\bar{T}_c^4 - T_{\text{ж}}^4).$$

Для окисленной поверхности меди степень черноты $\epsilon = 0,56$. Подставляя в последнее уравнение известные величины и решая полученное при этом уравнение с неизвестной величиной $\bar{T}_c$, находим $\bar{T}_c = 60$ °С.

Ответ. Температура шины равна 60 °С.

Задача 3. Найдите потери теплоты в единицу времени в расчете на единицу длины изолированного горизонтального паропровода с наружным диаметром $d_{\text{из}} = 300$ мм и температурой поверхности $t_c = 50$ °С. Температура окружающего трубу воздуха $t_{\text{ж}} = 30$ °С. Рассчитайте также температуру пара в трубе, если известно, что труба изолирована шлаковой ватой, коэффициент теплоотдачи от пара к стенке $\alpha_1 = 3000$ Вт/(м² · К), диаметр трубы и толщина стенки $d_2 \times \delta = 70 \times 6$ мм.

Решение. При средней температуре воздуха, равной $0,5(50 + 30) = 40$ °С, $\nu = 1,6 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\lambda = 2,68 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К), $Pr = 0,7$, а $\beta = 1/(273 + 40) = 3,2 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹.

Вычисляем число Релея:

$$Ra = \frac{9,8 \cdot 3,2 \cdot 10^{-3}(50 - 30) \cdot 0,3^3}{(1,6 \cdot 10^{-5})^2} \cdot 0,7 = 4,63 \cdot 10^7.$$

Определяем число Нуссельта:

$$\overline{Nu}' = 0,518(4,63 \cdot 10^7)^{1/4} \left[1 + \left(\frac{0,559}{0,7}\right)^{3/5}\right]^{-5/12} = 32,8$$

По формуле (7.14) находим $\overline{Nu} = 33,8$.

Коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = 33,8 \frac{0,0268}{0,3} = 3,02 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Тепловые потери за счет свободной конвекции воздуха

$$q_{\text{конв}} = \bar{\alpha}(t_c - t_{\text{ж}})\pi d_{\text{из}} = 3,02(50 - 30)\pi \cdot 0,3 = 56,9 \text{ Вт/м}.$$

Найдем тепловые потери за счет теплообмена излучением между паропроводом и ограждающей поверхностью, принимая степень черноты паропровода $\epsilon = 0,8$, а температуру ограждающей поверхности $T_{\text{отр}} = 303$ К:

$$q_{\text{изл}} = \epsilon \sigma_0(T_c^4 - T_{\text{отр}}^4)\pi d_{\text{из}} = 0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}(323^4 - 303^4)\pi \cdot 0,3 = 104,7 \text{ Вт/м}.$$

Суммарные потери $q_l = 56,9 + 104,7 = 161,6$ Вт/м.

Задаем среднюю температурой изоляции 200 °С и для шлаковой ваты находим

$$\lambda_{\text{из}} = 0,06 + 0,000145 \cdot 200 = 0,089 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

Для стали $\lambda = 40 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Тогда температура пара

$$t_n = t_c + \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_1 d_1} \right) =$$

$$= 50 + \frac{161,6}{\pi} \left(\frac{1}{2 \cdot 0,089} \ln \frac{300}{70} + \frac{1}{2 \cdot 40} \ln \frac{70}{58} + \frac{1}{3000 \cdot 0,058} \right) = 329 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

При этом температура внешней поверхности стенки трубы равна $324 \text{ } ^\circ\text{C}$, средняя температура изоляции составляет $188 \text{ } ^\circ\text{C}$, а $\lambda_{из} = 0,087 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Повторный расчет дает $t_n = 331 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Ответ. Конвективные потери теплоты $q_{конв} = 56,9 \text{ Вт/м}$, а температура пара $t_n = 331 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Задача 4. В учебной лаборатории имеется установка для изучения теплоотдачи при свободной конвекции воды около горизонтальной электрически обогреваемой трубы. Диаметр трубы $d = 20 \text{ мм}$, ее длина $l = 300 \text{ мм}$, а температура воды $t_{ж} = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$. При какой мощности электронагревателя средняя температура наружной поверхности трубы будет равна $35 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Решение. Средняя температура пограничного слоя составляет $0,5(25 + 35) = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$. При этой температуре для воды $\lambda = 0,618 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\nu = 0,805 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\text{Pr} = 5,42$; $\beta = 3,21 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$.

Число Рейля

$$\text{Ra} = \frac{9,8 \cdot 3,21 \cdot 10^{-4} (35 - 25) \cdot 0,02^3 \cdot 5,42}{(0,805 \cdot 10^{-6})^2} = 2,10 \cdot 10^6.$$

Находим

$$\text{Nu}' = 0,518 (2,1 \cdot 10^6)^{1/4} \left[1 + \left(\frac{0,559}{5,42} \right)^{3/5} \right]^{-5/12} = 17,9.$$

Определяем число Нуссельта:

$$\text{Nu} = \frac{2}{\ln \left(1 + \frac{2}{\text{Nu}'} \right)} = \frac{2}{\ln \left(1 + \frac{2}{17,9} \right)} = 18,9.$$

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \text{Nu} \frac{\lambda}{d} = 18,9 \frac{0,618}{0,02} = 584 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Мощность электронагревателя

$$Q = \bar{\alpha} \pi d l (\bar{t}_c - t_{ж}) = 584 \pi \cdot 0,02 \cdot 0,3 (35 - 25) = 110 \text{ Вт}.$$

Ответ. Мощность равна 110 Вт .

ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛОБМЕН В ТРУБАХ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

8.1. Режимы течения. Начальный гидродинамический участок

Течение в трубе может быть ламинарным или турбулентным. Для определения режима течения необходимо найти число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\bar{v} d}{\nu},$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость жидкости; d — внутренний диаметр трубы; ν — кинематическая вязкость.

Скорость $\bar{v}$ можно выразить через массовый расход жидкости G , кг/с:

$$G = \rho \bar{v} S,$$

где S — площадь поперечного сечения трубы, а плотность жидкости $\rho = \text{const}$.

Выразив скорость жидкости через расход G , для круглой трубы получим формулу

$$\text{Re} = \frac{4G}{\pi d \mu}.$$

Для стационарного потока расход жидкости, протекающей через любое сечение трубы, один и тот же: $G = \text{const}$.

При критическом значении числа Рейнольдса ($\text{Re}_{кр} = 2300$) ламинарное (параллельно-струйчатое) течение переходит в турбулентное.

Переход к турбулентному режиму начинается с возникновения пульсаций скорости (рис. 8.1, а) и образования нестационарных областей течения в виде «турбулентных пробок». При этом на начальном участке трубы имеет место перемежающийся режим течения (ламинарный режим сменяется турбулентным). Коэффициент перемежаемости γ , характеризующий долю времени, приходящуюся на турбулентный режим течения, с увеличением продольной координаты возрастает (8.1, б).

Путем численного решения нестационарных уравнений Навье—Стокса доказано, что на выходном участке очень длинной трубы течение жидкости турбулентное при значениях числа Re , незначительно превышающих

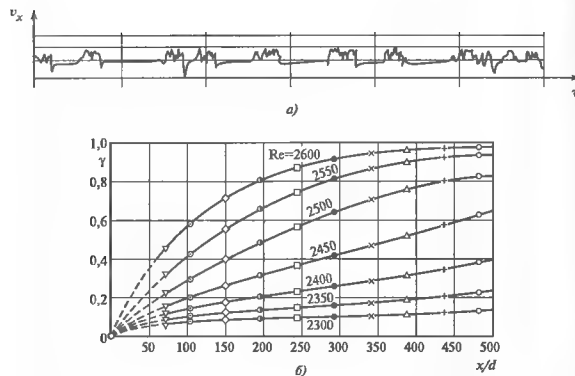


Рис. 8.1. Пульсации скорости (а) и зависимость коэффициента перемешиваемости от продольной координаты (б) при числах Re , близких к $Re_{кр}$

$Re_{кр}$. Однако на практике длины труб таковы, что развитое турбулентное течение в круглой трубе имеет место при $Re > 4000$.

При установившемся ламинарном течении жидкости с постоянными свойствами ($\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) вдали от входа в трубу ускорения равны нулю, в связи с чем профиль скорости не зависит от числа Рейнольдса и для круглой трубы он описывается законом Пуайзеля:

$$v_x = 2\bar{v} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right],$$

где v_x — продольная компонента скорости; r — текущий радиус; r_0 — радиус трубы.

В турбулентном потоке ускорения существуют всегда, поэтому профиль скорости вдали от входа в трубу, хотя и не очень сильно, но зависит от числа Re . Он описывается законом

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^{1/n},$$

где v_0 — скорость на оси трубы; n — функция числа Re : при $Re = 4 \cdot 10^3$ $n = 6$; при $Re = 2,3 \cdot 10^4$ $n = 6,6$; при $Re = 1,1 \cdot 10^5$ $n = 7$; при $Re = 3 \cdot 10^6$ $n = 10$.

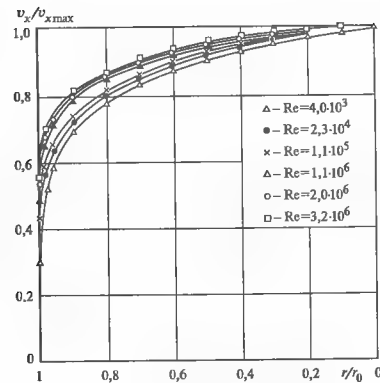


Рис. 8.2. Профиль скорости при развитом турбулентном течении в трубе

Следующее соотношение связывает между собой v_0 и $\bar{v}$:

$$v_0 = \bar{v} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

При турбулентном течении в ядре потока скорость изменяется незначительно; резкое падение ее до нуля наблюдается в узкой пристенной области трубы (рис. 8.2). При больших числах Re для пристенной области справедлив «закон стенки» (см. § 6.2). За исключением случая, когда $Pr \ll 1$ (жидкие металлы), интенсивность процесса теплопереноса на границе раздела между потоком жидкости и стенкой трубы существенно зависит от толщины вязкого подслоя, которую можно оценить по формуле

$$\delta_{в.п} = \frac{65d}{Re^{0,9}}.$$

Характерной особенностью течения в трубах является наличие участка гидродинамической стабилизации (начального гидродинамического участка). На этом участке происходит перестройка профиля скорости (рис. 8.3, а), а пограничный слой (рис. 8.3, б) нарастает до размера, равного радиусу трубы.

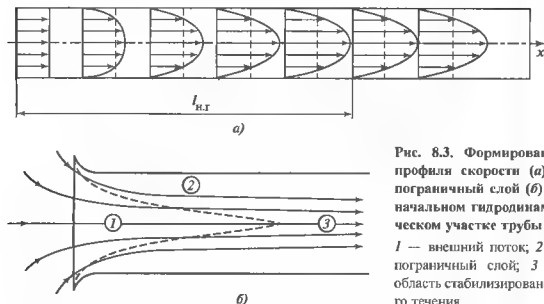


Рис. 8.3. Формирование профиля скорости (а) и пограничный слой (б) на начальном гидродинамическом участке трубы
1 — внешний поток; 2 — пограничный слой; 3 — область стабилизированного течения

Сделаем грубую оценку длины начального гидродинамического участка $l_{н.г.}$ для ламинарного течения в трубе. Полагая $\delta = r_0$, $x = l_{н.г.}$, $v_\infty = \bar{v}$, из формулы $\delta/x = 5/\sqrt{\text{Re}_x}$ (см. § 5.3) получаем

$$\frac{r_0}{l_{н.г.}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{\bar{v} d}{\nu} \frac{l_{н.г.}}{d}}}$$

Отсюда следует, что $l_{н.г.}/d = 0,01\text{Re}$. Точное решение приводит к формуле $l_{н.г.}/d = 0,065\text{Re}$.

Видно, что длина $l_{н.г.}$ зависит от Re. При $\text{Re} = 2000$ $l_{н.г.} = 130d$. Если $d = 0,05$ м, то $l_{н.г.} = 6,5$ м. Для турбулентного режима $l_{н.г.}$ значительно меньше. Используя формулу $\delta/x = 0,37/\text{Re}_x^{0,2}$ (см. § 6.1) для грубой оценки $l_{н.г.}$, получаем

$$\frac{r_0}{l_{н.г.}} = \frac{0,37}{\left(\frac{\bar{v} d}{\nu} \frac{l_{н.г.}}{d}\right)^{0,2}}$$

Отсюда следует, что $l_{н.г.}/d = 1,45\text{Re}^{1/4}$. При $\text{Re} = 10^5$ $l_{н.г.} = 26d$.

Если вход в трубу с уступом, то с самого начала пограничный слой турбулентный. При плавном входе (через сопло) на стенке сначала образуется ламинарный пограничный слой, который затем переходит в турбулентный. Когда толщина турбулентного пограничного слоя станет равной радиусу трубы, наступает область развитого турбулентного течения. Установлено, что при $x/d > 60$ и $\text{Re} > 4 \cdot 10^3$ условия входа в трубу не сказываются на профиле скорости.

Для определения режима течения в трубах некруглого поперечного сечения в формулу для расчета числа Re вместо диаметра d можно подставить эквивалентный диаметр

$$d_{\text{экв}} = \frac{4S}{P},$$

где P — периметр сечения.

8.2. Гидравлическое сопротивление при течении в трубе

При установившемся течении жидкости с постоянными свойствами (область потока $x > l_{н.г.}$) профиль скорости не изменяется по длине трубы. Следовательно, напряжение трения на стенке $\sigma_c = \text{const}$.

Выделим в трубе контрольный цилиндр, ось которого совпадает с осью трубы, длина равна Δx , а радиус — r . Разность давлений, действующих на основания, равна Δp . Баланс сил имеет вид:

$$\Delta p \pi r^2 = \sigma_c 2\pi r \Delta x, \quad (8.1)$$

где σ_c — касательное напряжение на поверхности цилиндра радиусом r .

Если $r = r_0$ (текущий радиус равен радиусу трубы), то $\sigma_c = \sigma_w$. Так как $\sigma_c = \text{const}$, то $\Delta p/\Delta x = \text{const}$: давление с ростом x уменьшается по линейному закону. Если Δp — перепад давления на участке трубы длиной l , то

$$\Delta p = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{v}^2}{2}, \quad (8.2)$$

где ξ — коэффициент трения, зависящий от числа Re (рис. 8.4).

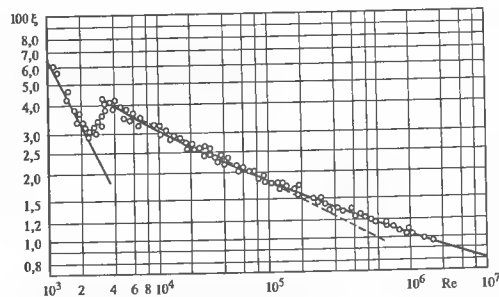


Рис. 8.4. Зависимость $\xi = f(\text{Re})$ для стабилизированного течения в трубе

Для ламинарного режима течения

$$\xi = 64/\text{Re},$$

а для турбулентного режима течения в диапазоне $4 \cdot 10^3 < \text{Re} < 10^6$

$$\xi = \left[0,79 \ln \left(\frac{\text{Re}}{8} \right) \right]^{-2}.$$

При $4 \cdot 10^3 < \text{Re} < 10^5$ справедлива формула Блазиуса:

$$\xi = \frac{0,316}{\text{Re}^{1/4}}.$$

Указанные формулы справедливы для гидравлически гладких труб, у которых выступы шероховатости стенки не выходят за пределы вязкого подслоя.

Значение $\Delta p/\Delta x$ не зависит от текущего радиуса r , поэтому из (8.1) можно сделать вывод о том, что касательное напряжение σ линейно изменяется от нуля на оси трубы до σ_c на стенке:

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = \frac{r}{r_0}.$$

При изучении турбулентных потоков часто используется динамическая скорость:

$$v_* = \sqrt{\sigma_c/\rho}.$$

Используя (8.2), находим

$$v_* = \bar{v} \sqrt{\xi/8}.$$

8.3. Первый закон термодинамики для течения в трубе

Рассмотрим общий случай течения жидкости в произвольном канале, поперечное сечение которого изменяется вдоль оси Ox . Представим себе неподвижный контрольный объем V , ограниченный твердыми стенками канала площадью F (F — площадь поверхности теплообмена) и двумя сечениями с площадями S_1 и S_2 (рис. 8.5).

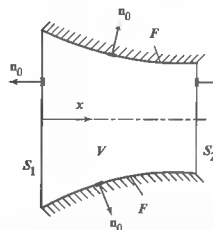


Рис. 8.5. К выводу уравнения (8.3)

Запишем уравнение Фурье—Остроградского:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial \tau} + \text{div} \rho h v = -\text{div} q.$$

Проинтегрируем это уравнение по объему V :

$$\int_V \frac{\partial \rho h}{\partial \tau} dV + \int_V \text{div} \rho h v dV = - \int_V \text{div} q dV$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса, преобразуем интегралы:

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} \rho h v dV &= \int_{S_1} \rho v_n h dS + \int_{S_2} \rho v_n h dS + \int_F \rho v_n h dS = - \int_{S_1} \rho v'_n h dS + \int_{S_2} \rho v_n h dS; \\ - \int_V \text{div} q dV &= - \int_{S_1} q_n dS - \int_{S_2} q_n dS - \int_F q_n dF = -Q_{S_1} + Q_{S_2} + Q. \end{aligned}$$

Здесь v_n, q_n — проекции вектора скорости v и вектора q на направление внешней нормали к поверхности объема V , а v'_n — проекция вектора v на направление внутренней (к S_1) нормали. В преобразованиях учтено, что поверхность площадью F непроницаема для жидкости (здесь $v_n = 0$).

Среднемассовые энтальпии потока в сечениях с площадями S_1 и S_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= \frac{\int_{S_1} \rho v'_n h dS}{G}; \\ \bar{h}_2 &= \frac{\int_{S_2} \rho v_n h dS}{G}, \end{aligned}$$

где G — массовый расход жидкости.

С учетом этих преобразований получаем

$$Q + Q_{S_2} - Q_{S_1} = G(\bar{h}_2 - \bar{h}_1). \quad (8.3)$$

Тепловой поток Q_{S_2} определяет количество теплоты, вносимое в объем V через сечение площадью S_2 вследствие теплопроводности жидкости, а Q_{S_1} — количество теплоты, отводимое через сечение площадью S_1 таким же способом. Обычно разность значений Q_{S_2} и Q_{S_1} мала по сравнению с Q . Далее v_n и v'_n заменим на v_x — проекцию вектора v на ось Ox (рис. 8.5).

Для часто встречающихся стационарных процессов теплообмена уравнение первого закона термодинамики имеет вид

$$Q = G(\bar{h}_2 - \bar{h}_1), \quad (8.4)$$

где Q — тепловой поток от стенки канала к жидкости; $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ — среднемассовые энтальпии жидкости в сечениях с площадями S_1 и S_2 соответственно, причем для произвольного сечения площадью S

$$\bar{h} = \frac{\int_S \rho v_x h dS}{G}.$$

Среднемассовой энтальпии $\bar{h}$ соответствует среднемассовая температура $\bar{T}$.

При $c_p = \text{const}$

$$\bar{T} = \frac{\int \rho v_x T \, dS}{\int \rho v_x \, dS}.$$

Из (8.4) получаем, что

$$Q - Gc_p(\bar{T}_2 - \bar{T}_1). \quad (8.5)$$

В теплотехнических расчетах среднемассовую температуру часто обозначают $T_{ж}$. Тогда

$$Q = Gc_p(T_{ж2} - T_{ж1}). \quad (8.5a)$$

В общем случае при записи первого закона термодинамики необходимо учитывать изменение кинетической и потенциальной энергий потока. С учетом этого для стационарных процессов теплообмена имеем

$$Q = G \left[\left(h + \frac{v^2}{2} \right)_{ср2} - \left(h + \frac{v^2}{2} \right)_{ср1} \right] + Gg(z_2 - z_1).$$

Здесь $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$; z_1 и z_2 — координаты сечений с площадями S_1 и S_2 относительно горизонтальной плоскости отсчета, а

$$\left(h + \frac{v^2}{2} \right)_{ср} = \frac{\int \rho v_x \left(h + \frac{v^2}{2} \right) dS}{\int \rho v_x \, dS}.$$

Индекс «ср» указывает на то, что данная величина усреднена по массе жидкости, протекающей через сечение трубы площадью S .

8.4. Местный и средний коэффициенты теплоотдачи. Начальный термический участок

По определению местный коэффициент теплоотдачи (коэффициент теплоотдачи для данного сечения трубы) имеет вид

$$\alpha = \frac{q_c}{\Delta T} = \frac{q_c}{T_c - T_{ж}},$$

где q_c — местная плотность теплового потока, представляющая собой проекцию вектора $\mathbf{q}$ на направление нормали к внутренней поверхности трубы (она направлена в сторону жидкости); T_c и $T_{ж}$ соответственно темпера-

тура стенки и среднемассовая температура жидкости в данном сечении трубы; ΔT — местный температурный напор ($\Delta T = T_c - T_{ж}$).

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}_c}{\Delta \bar{T}}.$$

Здесь $\bar{q}_c$ и $\Delta \bar{T}$ — среднеинтегральные значения плотности теплового потока и температурного напора:

$$\bar{q}_c = \frac{1}{l} \int_0^l q_c \, dx;$$

$$\Delta \bar{T} = \frac{1}{l} \int_0^l \Delta T \, dx,$$

где l — длина трубы.

Ось $0x$ направлена вдоль трубы; координата $x = 0$ соответствует началу обогрева или охлаждения жидкости.

Рассмотрим случай, когда на входе температура жидкости больше температуры стенки трубы T_c . Пусть $T_c = \text{const}$. По мере продвижения по трубе сначала охлаждается только та часть жидкости, которая находится ближе к холодной стенке, а в центральной области ее температура равна температуре во входном сечении (рис. 8.6). На входном участке трубы образуется тепловой пограничный слой, толщина которого возрастает, и при определенном значении координаты x ($x = l_{н.т.}$) она становится равной радиусу трубы ($\delta_t = r_0$). Участок в трубе, на котором тепловой пограничный слой возрастает до значения, равного радиусу трубы, называется начальным термическим участком. За пределами начального термического участка жидкость охлаждается во всей области потока.

Из-за роста δ_t коэффициент теплоотдачи на участке $0 \leq x \leq l_{н.т.}$ уменьшается. Теоретические расчеты показывают, что при $T_c = \text{const}$ для жидкости с постоянными свойствами в области $x > l_{н.т.}$ $\alpha = \text{const}$. Здесь q_c и тем-

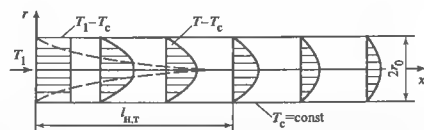


Рис. 8.6. Формирование профиля температуры при нагревании жидкости в трубе

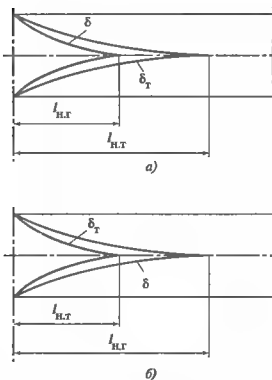


Рис. 8.7. Соотношение между $l_{н,г}$ и $l_{н,т}$ при $Pr > 1$ (а) и $Pr < 1$ (б) в случае ламинарного течения в трубе

пературный напор с ростом x уменьшаются по одному и тому же закону, что и объясняет постоянство коэффициента теплоотдачи.

Из теории пограничного слоя следует, что отношение δ_t/δ зависит от числа Pr . Если $Pr < 1$, $\delta_t > \delta$, а если $Pr > 1$, $\delta_t < \delta$. Имея это в виду, легко понять, что в первом случае $l_{н,г} < l_{н,т}$, а во втором $l_{н,г} > l_{н,т}$ (рис. 8.7).

8.5. Расчет температур стенок трубы, жидкости и теплового потока

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на внутренней поверхности трубы задано распределение плотности теплового потока $q_c(x)$. Известна также зависимость $\alpha(x)$. Требуется найти температуру стенки и среднemasсовую температуру жидкости в произвольном сечении трубы.

Для элементарного участка трубы длиной dx запишем:

$$q_c P dx = G d\bar{h}.$$

При $x = 0$ $T_{ж} = T_{ж1}$ и $\bar{h} = \bar{h}_1$. Интегрированием получаем

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_1 + \frac{P}{G} \int_0^x q_c dx.$$

Из этого уравнения определяем $\bar{h}$ в данном сечении x . Зная зависимость $h(T, p)$ для данного теплоносителя (можно воспользоваться таблицами), по найденному значению $\bar{h}$ определяем $T_{ж}$ и далее T_c :

$$T_c = T_{ж} + q_c / \alpha.$$

Если можно принять $c_p = \text{const}$, то

$$T_{ж}(x) = T_{ж1} + \frac{P}{Gc_p} \int_0^x q_c dx.$$

В частном случае $q_c = \text{const}$ среднemasсовая температура жидкости изменяется по линейному закону:

$$T_{ж}(x) = T_{ж1} + \frac{q_c P}{Gc_p} x.$$

При $x > l_{н,г}$ $\alpha = \text{const}$ (если свойства жидкости не зависят от температуры) и в случае $q_c = \text{const}$ температурный напор $\Delta T = \text{const}$, откуда следует, что здесь температура стенки также изменяется по линейному закону (рис. 8.8).

Пусть теперь задано распределение температуры стенки по длине трубы $T_c(x)$. Тогда для элемента трубы длиной dx будем иметь

$$G d\bar{h} = \alpha P (T_c - T_{ж}) dx. \quad (8.6)$$

При сложной зависимости $h(T, p)$ (например, в околокритической области параметров состояния) и влиянии T_c и $T_{ж}$ на α решение этого дифференциального уравнения можно получить численным методом. Простое решение имеет место в случае $T_c = \text{const}$, $c_p = \text{const}$. Тогда $d\bar{h} = c_p dT_{ж}$ и из (8.6) интегрированием получаем

$$\frac{T_c - T_{ж}(x)}{T_c - T_{ж1}} = e^{-\frac{P}{Gc_p} \int_0^x \alpha dx}$$

Полагая в первом приближении $\alpha = \text{const}$, получаем экспоненциальный закон изменения температурного напора ΔT по длине трубы (рис. 8.9):

$$\Delta T = \Delta T_{вх} e^{-\frac{\alpha P}{Gc_p} x}.$$

где $\Delta T_{вх} = T_c - T_{ж1}$.

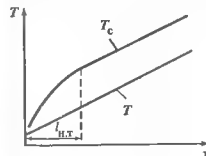


Рис. 8.8. Изменение температур стенки и жидкости по длине равномерно обогреваемой трубы

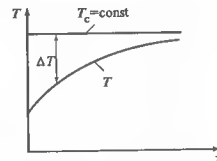


Рис. 8.9. Изменение температур жидкости по длине трубы при $T_c = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$

В случае постоянной температуры стенки нетрудно вывести формулу для теплового потока, передаваемого от трубы к жидкости на участке длиной l :

$$Q = \bar{\alpha}' F \frac{T_{ж1} - T_{ж2}}{\ln \frac{T_c - T_{ж2}}{T_c - T_{ж1}}},$$

где $F = Pl$; $T_{ж2}$ — температура жидкости в сечении $x = l$;

$$\bar{\alpha}' = \frac{1}{l} \int_0^x \alpha \, dx.$$

Глава девятая

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

9.1. Основные особенности процесса теплообмена в трубах при ламинарном течении теплоносителей

В промышленных и энергетических установках обычно наблюдаются турбулентные режимы течения теплоносителей. Объясняется это тем, что существуют некоторые оптимальные значения скорости жидкости, которые обеспечивают достаточную компактность теплообменного аппарата и допустимое значение гидравлического сопротивления. Эти значения скорости соответствуют большим числам Рейнольдса. Так, например, для воды оптимальными считаются скорости, лежащие в пределах 0,1—5 м/с. Задаваясь значениями $v = 1$ м/с, $\nu = 0,2 \cdot 10^{-6}$ м²/с, получаем, что при диаметре трубы $d = 20$ мм $Re = 10^5 > Re_{кр}$.

Сказанное вовсе не означает, что изучение теплоотдачи в условиях ламинарного режима течения не имеет практического значения. При течении вязких жидкостей (технических масел) и в других случаях числа Re часто не превышают $Re_{кр}$. Следует отметить, что для жидкометаллических теплоносителей коэффициенты теплоотдачи достигают высоких значений и при ламинарном течении. При этом гидравлическое сопротивление может быть очень мало.

Как указывалось выше (см. § 8.1), при $Re < Re_{кр}$ длина начального гидродинамического участка $l_{н.г.}$ при определенных условиях может быть большой и превышать длину (высоту) теплообменного аппарата. Для теплоносителя с числом $Pt \approx 1$ $l_{н.г.} = l_{н.г.}$. Для жидких металлов $Pt \ll 1$, для технических масел $Pt \gg 1$. В первом случае $l_{н.г.} \ll l_{н.т.}$, во втором $l_{н.г.} \gg l_{н.т.}$. Эти оценки показывают, что на практике процесс теплообмена в трубах может происходить в условиях постоянного нарастания теплового и динамического пограничных слоев, т.е. в отсутствии гидродинамической и тепловой стабилизаций. При этом коэффициент теплоотдачи изменяется на всем протяжении трубы, а его среднее значение даже для длинной трубы (в отличие от турбулентного режима течения) существенно зависит от l/d . При расчете гидравлического сопротивления необходимо также учитывать зависимость коэффициента сопротивления трения от продольной (осевой) координаты трубы.

При ламинарном течении значение α зависит от граничных условий на стенке трубы. Так, например, в случае $T_c = \text{const}$ α меньше, чем в случае $q_c = \text{const}$. Объясняется это своеобразием формирования температурного поля при различных граничных условиях и влиянием «предыстории» потока на теплоотдачу в данном сечении трубы. Если течение турбулентное, то «предыстория», за исключением случая $Pr \ll 1$, практически не сказывается на значении α , тогда оно определяется только локальными условиями.

Физические свойства жидкости зависят от температуры, вследствие чего профиль скорости в трубе в условиях теплообмена может сильно отличаться от профиля скорости в случае изотермического течения. Так как гидродинамика потока влияет на распределение температуры, изменение профиля скорости сказывается на теплоотдаче. При ламинарном режиме (малые скорости течения) зависимость плотности жидкости от температуры является причиной появления в трубе интенсивных токов свободной конвекции, существенно изменяющих картину течения.

При этом теплоотдача зависит от направления теплового потока (от стенки к жидкости или наоборот), от расположения трубы в пространстве (вертикальное или горизонтальное), а при вертикальном расположении еще и от того, куда движется жидкость (вверх или вниз). Если термogravitационные силы в потоке жидкости соизмеримы с инерционными силами, то переход к турбулентному режиму произойдет при значении числа Re , отличающемся от его значения в изотермических условиях.

Отмеченные особенности необходимо учитывать в тепловых расчетах ламинарных режимов. Из сказанного должно быть ясно, что единой (универсальной) формулы для определения α быть не может. Однако для некоторых частных случаев с помощью расчетно-теоретических и экспериментальных исследований получены надежные соотношения для числа Нуссельта, которые можно закладывать в расчет теплообменных устройств, если условия их работы близки к условиям, при которых справедливы указанные соотношения. Теория теплообмена при ламинарном течении в трубах обстоятельно изложена в [32, 35]. С некоторыми результатами этой теории мы познакомимся в следующих параграфах.

Наиболее просто теоретически решаются задачи теплообмена в трубах при постоянных свойствах жидкости. В этом случае распределение скорости в ламинарном потоке не зависит от температурного поля, и это распределение можно найти, решая уравнения гидродинамики. Результаты решения гидродинамической задачи используются при нахождении температурного поля и теплоотдачи с помощью уравнения энергии.

Задача расчета теплообмена упрощается, если принять, что профиль скорости не изменяется по длине трубы. В этом случае справедлив параболический закон Пуазейля (см. § 8.1). Иногда для упрощения решения полагают, что скорость не зависит как от радиуса трубы, так и от ее длины (модель стержневого течения).

Изучение теплоотдачи при течении жидкости с постоянными свойствами имеет смысл потому, что, во-первых, при этом проще выявить основные закономерности теплообмена и, во-вторых, этот случай является предельным случаем пренебрежимо малого влияния переменности свойств. Внося соответствующие поправки в полученные результаты можно получить расчетные формулы, удобные для практического применения.

9.2. Теплообмен в плоском канале при однородном профиле скорости

Под плоским каналом мы будем понимать пространство между двумя параллельными пластинами. Ширину канала (расстояние между пластинами) обозначим h . Длина канала $l \gg h$. Ось Ox направим вдоль течения, а ось Oy — перпендикулярно к стенкам канала. Начало координат поместим во входное сечение канала. Обозначим $\delta = h/2$. Тогда значения $y = \delta$ и $y = -\delta$ будут соответствовать стенкам канала. Плоский канал является предельным случаем прямоугольного и кольцевого каналов.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда свойства жидкости постоянны, а $v_y = v_z = 0$, $v_x = v_0 = \text{const}$. Последнее условие ($v_x = \text{const}$), хотя и является грубым допущением, приближенно выполняется для начального участка канала. Поскольку для чисел $Pr \ll 1$, $l_{HT} \ll l_{HT}$, результаты решения нашей задачи можно использовать для оценки α при течении жидкого металла на входном участке трубы.

Допустим, что температура стенок одинакова и равна T_c , причем $T_c = \text{const}$. Температура жидкости на входе в канал ($x = 0$) равна T_1 . Если $T_c < T_1$, жидкость в канале охлаждается и в пределе ($x \rightarrow \infty$) ее температура равна T_c .

Обозначим $\theta = T - T_c$ и запишем уравнение энергии для стационарного процесса теплообмена в приближении теории пограничного слоя:

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}.$$

Теплопроводностью жидкости в направлении оси Ox пренебрегаем. Сформулированная задача позволяет записать граничные условия в следующем виде:

$$\theta = \theta_1 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq y \leq \delta;$$

$$\theta = 0 \quad \text{при } y = \delta, \quad 0 < x \leq \infty;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

В первом граничном условии $\theta_1 = T_1 - T_c$. При подстановке $x = v_0 \tau$ наша задача сводится к задаче о нестационарной теплопроводности пластины при $Bi \rightarrow \infty$ (см. гл. 3).

Введем обозначения: $Y = y/\delta$; $X = 4x/(Pe h)$; $Pe = v_0 h/a$. Так, уравнение энергии с заменой x на $v_0 \tau$ превращается в уравнение теплопроводности, а граничные условия нашей задачи соответствуют случаю охлаждения пластины при $Bi \rightarrow \infty$. Мы можем сразу записать решение в виде:

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\epsilon_n \sin \epsilon_n} \cos(\epsilon_n Y) \exp(-\epsilon_n^2 X),$$

где $\epsilon_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Среднемассовая температура жидкости

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \theta dy = \int_0^1 \theta dY = \theta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\epsilon_n} \exp(-\epsilon_n^2 X).$$

Местный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{q_c}{T_c - \bar{T}} = -\frac{\lambda}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = -\frac{2\lambda}{h} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=1}.$$

Вычислим производную:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=1} = -2\theta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\epsilon_n^2 X).$$

Окончательно получаем местное число Нуссельта в виде

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = \frac{2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\epsilon_n^2 X)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_n} \exp(-\epsilon_n^2 X)}. \quad (9.1)$$

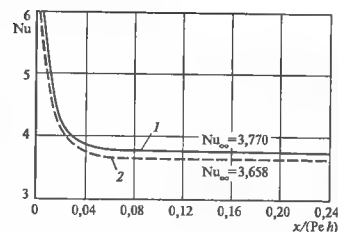
Ряды, стоящие в числителе и знаменателе (9.1), быстро сходятся. При определенном значении $X = X'$ их суммы равны первым слагаемым, а при $X > X' Nu = Nu_{\infty} = \text{const}$, причем

$$Nu_{\infty} = 2\epsilon_0^2 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 4,935.$$

Примем за длину начального термического участка $l_{нт}$ то значение координаты x , при котором $Nu = 1,01 Nu_{\infty}$. Тогда из (9.1) получим

$$l_{нт}/h = 0,0584 Pe.$$

Рис. 9.1. Зависимость числа Нуссельта от приведенной координаты при ламинарном течении в плоском канале (1) и круглой трубе (2)



Решение аналогичной задачи, но с постоянным по длине параболическим профилем скорости приводит к следующим результатам:

$$Nu_{\infty} = 3,77;$$

$$l_{нт}/h = 0,055 Pe.$$

График зависимости числа Nu от приведенной координаты $x/(Pe h)$ для параболического профиля скорости показан на рис. 9.1. Такого же типа зависимость имеет место и для однородного профиля скорости ($v_x = \text{const}$).

На рисунке данные для плоского канала сопоставлены с результатами расчета числа Nu при течении жидкости в круглой трубе (см. § 9.3), причем в последнем случае h соответствует d .

Постоянство α при $x > l_{нт}$ объясняется тем, что в этой области теплообмена как плотность теплового потока, так и температурный напор с ростом x уменьшаются по одному и тому же экспоненциальному закону. Характерной особенностью здесь является то, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T - T_c}{T_0 - T_c} \right) = 0,$$

где T_0 — температура жидкости на оси трубы, а так как перенос теплоты осуществляется только теплопроводностью, то α не зависит от скорости жидкости.

9.3. Теплообмен при ламинарном течении в круглой трубе.

Задача Гретца—Нуссельта

Допустим, что в круглую трубу диаметром $d = 2r_0$ поступает жидкость с развитым параболическим профилем скорости. Это значит, что участку теплообмена (участку охлаждения или нагревания жидкости) предшествует участок гидродинамической стабилизации. Как и в § 9.2, будем считать свойства жидкости постоянными, $T_c = \text{const}$. Требуется рассчитать поле

температуры в трубе и число Нуссельта. Постановленная задача называется задачей Гретца—Нуссельта. Для ее решения записывается уравнение энергии, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} = (1 - R^2) \frac{\partial \Theta}{\partial X}. \quad (9.2)$$

В (9.2) введены следующие безразмерные величины: $\Theta = (T - T_c)/(T_1 - T_c)$, где T_1 — температура жидкости на входе в участок теплообмена; $R = r/r_0$; $X = 2x/(Pe d)$.

Граничные условия будут иметь вид:

$$\Theta = 1 \quad \text{при } X = 0 \quad \text{и} \quad 0 \leq R \leq 1;$$

$$\Theta = 0 \quad \text{при } X \geq 0 \quad \text{и} \quad R = 1;$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0 \quad \text{при } X \geq 0 \quad \text{и} \quad R = 0.$$

Задача решается методом разделения переменных. Решение получается в виде суммы ряда, составленного из частных решений (аналогично задаче, рассмотренной в § 9.2). Распределение температуры жидкости по радиусу и длине трубы показано на рис. 9.2. При малых значениях приведенной длины температура вблизи оси изменяется слабо, а вблизи стенки — значительно. Распределение температуры в ядре потока на входном участке трубы однородно. Температура в этой области приблизительно равна температуре жидкости на входе. Толщина области прогретой жидкости (толщина пограничного слоя) с ростом координаты x ($0 < x < l_{н.т.}$) увеличивается до тех пор, пока не станет равной радиусу трубы. Далее ($x > l_{н.т.}$) процесс теплообмена охватывает все сечение трубы.

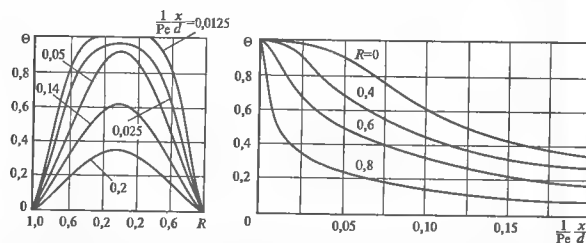


Рис. 9.2. Распределение температуры жидкости по радиусу и длине трубы в задаче Гретца—Нуссельта

Таблица 9.1. Значения ϵ_n и B_n в формуле (9.3)

n	ϵ_n	B_n
0	2,7044	0,74877
1	6,6790	0,54383
2	10,673	0,46286
3	14,671	0,41542
4	18,670	0,38292
5	22,670	0,35869
6	26,669	0,33962
7	30,668	0,32406
8	34,668	0,31101
9	38,668	0,29984

Найдя температуру $T = T(x, r)$, можно рассчитать число Нуссельта. В результате получается зависимость вида

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-4\epsilon_n^2 X')}{2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\epsilon_n} \exp(-2\epsilon_n^2 X')}, \quad (9.3)$$

где $X' = x/(Pe d)$ — безразмерная координата (приведенная длина); ϵ_n и B_n — коэффициенты, зависящие от n (табл. 9.1).

При $n = 0$ $\epsilon_0 = 2,7044$. При $X \geq 0,055$ выражение (9.3) упрощается, так как существенными становятся только первые члены рядов ($n = 0$) в числителе и знаменателе. При этом

$$Nu = Nu_{\infty} = \epsilon_0^2 / 2 = 2,7044^2 / 2 = 3,658 \approx 3,66.$$

При $X \leq 0,03$

$$Nu \approx 1,03 \left(\frac{1}{Pe d} \right)^{-1/3}. \quad (9.4)$$

Из (9.4) видно, что на начальном термическом участке местный коэффициент теплоотдачи пропорционален $x^{-1/3}$. Для среднего коэффициента теплоотдачи из рассмотренной теории получим формулу

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} = 1,55 \left(\frac{1}{Pe d} \right)^{-1/3}, \quad (9.5)$$

справедливую при $X \leq 0,05$. Вдали от входа (при $X \geq 1,375$) $\overline{Nu} = Nu_{\infty} = 3,66$.

Число Нуссельта на гидродинамическом начальном участке трубы (динамический и тепловой пограничные слои развиваются одновременно) выше, чем при стабилизированном течении. Это объясняется тем, что в этом случае скорость потока около стенки выше и, кроме того, существует конвективный перенос теплоты в радиальном направлении (здесь радиальная компонента скорости не равна нулю). Среднее число $\overline{Nu}$ при $T_c = \text{const}$ приближенно описывается уравнением

$$\frac{\overline{Nu}}{Nu_0} = 0,60 \left(\frac{1}{Re} \frac{l}{d} \right)^{-1/7} \left(1 + 2,5 \frac{1}{Re} \frac{l}{d} \right).$$

Здесь $\overline{Nu}_0$ — среднее число Нуссельта в задаче Гретца—Нуссельта.

9.4. Теплообмен в круглой трубе при постоянной плотности теплового потока на стенке

Примем те же условия, что и в § 9.3, но допустим, что на внутренней поверхности трубы $q_c = \text{const}$. В этом случае среднемассовая температура жидкости линейно изменяется по длине трубы:

$$\bar{\Theta} = \frac{(\bar{T} - T_1)\lambda}{q_c d} = \frac{4}{Pe} \frac{x}{d}, \quad (9.6)$$

где $\bar{\Theta}$ — безразмерная среднемассовая температура; $Pe = \bar{v} d / \alpha$.

Запишем уравнение энергии и граничные условия:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} = (1 - R^2) \frac{\partial \Theta}{\partial X};$$

$$\Theta = 0 \quad \text{при } X = 0, 0 \leq R \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0 \quad \text{при } X > 0, R = 0;$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = \frac{1}{2} \quad \text{при } X \geq 0, R = 1.$$

Здесь $X = \frac{2}{Pe} \frac{x}{d}$. В нашем случае

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dx}$$

На участке стабилизированного теплообмена температура во всех точках потока линейно изменяется вдоль оси трубы:

$$\Theta = AX + f(R), \quad (9.7)$$

где A — постоянная; $f(R)$ — неизвестная функция.

Подставив (9.7) в уравнение энергии, с учетом граничного условия найдем $A = 2$, а

$$f(R) = R^2/2 - R^4/8 + C.$$

Среднемассовую температуру можно рассчитать по формуле

$$\bar{\Theta} = 4 \int_0^1 \Theta (1 - R^2) R dR.$$

Сопоставив последнюю формулу с (9.6), получим $C = -7/48$. После этого находим распределение температуры по длине и радиусу трубы:

$$\Theta = \frac{(T - T_1)\lambda}{q_c d} = \frac{4}{Pe} \frac{x}{d} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{8} R^4 - \frac{7}{48}.$$

Безразмерная температура стенки

$$\Theta_c = \Theta_{R=1} = \frac{4}{Pe} \frac{x}{d} + \frac{11}{48}.$$

Число Нуссельта на участке стабилизированного теплообмена

$$Nu_\infty = \frac{q_c d}{(T_c - \bar{T})\lambda} = \frac{1}{\Theta_c - \bar{\Theta}} = \frac{48}{11} = 4,36.$$

Заметим, что число Nu_∞ значительно проще вычисляется с помощью интеграла Лайона (см § 10.2). Опустив выкладки, запишем окончательное выражение для числа Nu , справедливое для всего участка теплообмена:

$$Nu^{-1} = \frac{11}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n \exp\left(-2\epsilon_n^2 \frac{1}{Pe} \frac{x}{d}\right). \quad (9.7a)$$

Здесь ϵ_n^2 , A_n и ψ_n — постоянные, зависящие от n (табл. 9.2).

Таблица 9.2. Значения ϵ_n^2 , ψ_n и A_n в формуле (9.7a)

n	ϵ_n^2	ψ_n	A_n
1	25,680	-0,49252	+0,20174
2	83,862	+0,39551	-0,087555
3	174,17	-0,34587	+0,052797
4	296,54	+0,31405	-0,036640
5	450,95	-0,29125	+0,027518
6	637,39	+0,27381	-0,021742
7	855,85	-0,25985	+0,017799

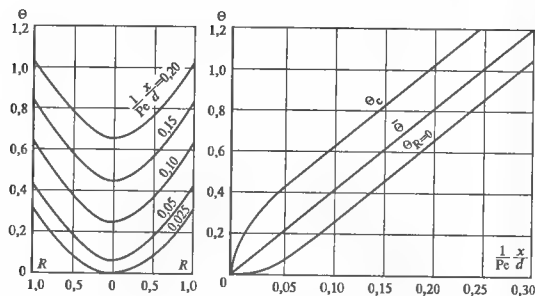


Рис. 9.3. Изменение температуры жидкости по радиусу и длине трубы в случае $q_c = \text{const}$

Характер изменения температуры по радиусу и длине трубы показан на рис. 9.3.

На начальном термическом участке $0 \leq x \leq l_{н.т}$ ($l_{н.т} = 0,07dPe$) местное значение α падает с ростом x . Наиболее резкое изменение α происходит при $X \leq 0,001$. Здесь результаты теоретического расчета приближенно описываются уравнением

$$Nu = 1,31 \left(\frac{1}{Pe} \frac{x}{d} \right)^{-1/3} \quad (9.8)$$

Зная формулу (9.8) для числа Nu на начальном термическом участке, можно рассчитать $T_c(x)$ следующим образом:

$$\frac{1}{Nu} = \frac{(T_c - \bar{T})\lambda}{q_c d} = 0,76 \left(\frac{1}{Pe} \frac{x}{d} \right)^{1/3}$$

Разность $T_c - \bar{T}$ равна нулю в сечении $x = 0$ и далее увеличивается пропорционально $x^{1/3}$. Среднемассовая температура, как мы уже отмечали, при $q_c = \text{const}$ изменяется линейно по длине трубы, причем

$$\frac{(\bar{T} - T_1)\lambda}{q_c d} = 4 \frac{1}{Pe} \frac{x}{d}.$$

При любых значениях X местная теплоотдача в случае $q_c = \text{const}$ описывается формулой

$$Nu = 4,36 + 1,31Xe^{-13X}.$$

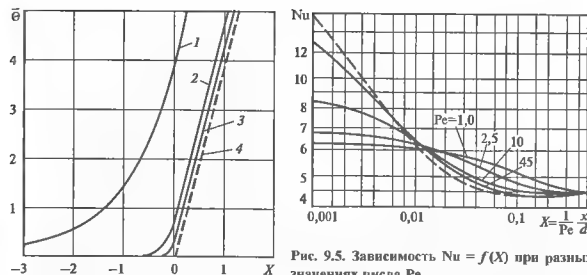


Рис. 9.4. Влияние числа Пекле на характер изменения безразмерной среднемассовой температуры по длине трубы

1 — $Pe = 1$; 2 — $Pe = 2,5$; 3 — $Pe = 10$; 4 — $\bar{\theta} = 4X$

Рассмотренная теория справедлива только при относительно больших значениях числа Пекле. В случае $Pr \ll 1$ числа Pe могут быть малыми и на процесс теплообмена оказывает влияние перенос теплоты вдоль оси трубы за счет теплопроводности жидкости. Оказывается, что в этом случае жидкость нагревается еще до поступления в обогреваемый участок (т.е. в пределах участка гидродинамической стабилизации), и это явление проявляется тем больше, чем меньше число Pe (рис. 9.4). Зависимость числа Nu от безразмерной координаты $X = x/(Ped)$ показана на рис. 9.5.

9.5. Вязкостный режим. Режим смешанной конвекции

Вязкостный режим. Этот режим характеризуется тем, что на распределение скорости и температуры в потоке жидкости оказывает влияние зависимость вязкости от температуры. Влияние же свободной конвекции пренебрежимо мало.

Вязкостный режим имеет место при малых значениях числа Рейнольдса:

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu^2} Pr.$$

Установлено, что указанный режим ограничен условиями: $Re < Re_{кр}$ и $Ra \leq 3 \cdot 10^5$. Обычно эти условия соответствуют вязким жидкостям (маслам) при их течении в трубах малого диаметра. Для вязких жидкостей

* Рис. 9.4 и 9.5 взяты из статьи: Петухов Е.С., Цветков Ф.Ф. Расчет теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах в области малых чисел Пекле // ИФЖ. 1961. Т. IV. № 3.

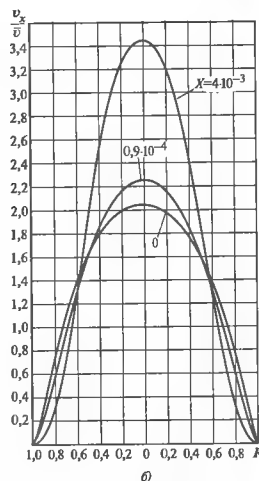
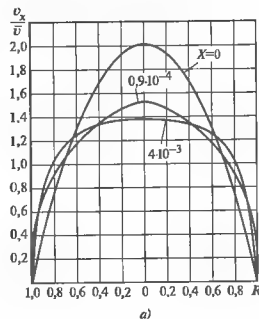


Рис. 9.6. Деформации профилей скорости при нагревании (а) и охлаждении (б) жидкости (вязкостный режим)

$\text{Pr} \gg 1$; при этом длина $l_{\text{н.т}}$ велика и обычно больше длины трубы теплообменного аппарата. При нагревании жидкости ее температура у стенки больше, чем в ядре. Так как вязкость жидкости с увеличением T падает, то у стенки она меньше, чем в ядре. За счет этого происходит увеличение скорости у стенки, приводящее к деформации параболического профиля скорости, существующего при постоянных свойствах жидкости (рис. 9.6, а). При охлаждении наблюдается обратная картина (рис. 9.6, б). Профили скорости зависят от приведенной координаты X , что объясняется изменением температурного поля от одного сечения трубы к другому. Кривые на рис. 9.6 получены Б.С. Петуховым в результате теоретического расчета.

Теоретически и экспериментально установлено, что теплоотдачу при вязкостном режиме можно описать зависимостью вида

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_0} = \left(\frac{\mu_c}{\mu_j} \right)^{-n} \quad (9.9)$$

В (9.9) Nu_0 — число Нуссельта при постоянных свойствах жидкости [см. (9.4)]; μ_c и μ_j — вязкости при T_c и среднemasсовой температуре $\bar{T}$ (ее обозначают также $T_{\text{ж}}$). Показатель степени $n = 0,14$ при $T_c = \text{const}$. Значения физических свойств, входящих в формулы для Nu и Re (число Re входит в формулу для Nu_0), выбираются по $T_{\text{отр}} = 0,5(T_c + \bar{T})$. Формула (9.9) справедлива при $X \leq 0,01$ и $0,07 \leq \mu_c/\mu_j \leq 1500$ и применима для $\bar{\text{Nu}}/\bar{\text{Nu}}_0$, где $\bar{\text{Nu}}_0$ рассчитывается по (9.5). Значения физических свойств выбираются по $T_{\text{отр}} = T_c \pm 0,5\Delta T_{\text{лог}}$ (знак «+» используется при охлаждении, знак «-» — при нагревании жидкости), здесь $\Delta T_{\text{лог}}$ — среднелогарифмическая разность температур стенки и жидкости.

Режим смешанной конвекции. При числах $\text{Ra} \geq 3 \cdot 10^5$ на течение жидкости в трубе оказывает влияние неоднородное распределение плотности в потоке жидкости. В этом случае на вынужденное ламинарное течение накладывается свободная конвекция, которая приводит к деформации профиля скорости и возникновению вторичных течений в трубе. Результирующее течение зависит от расположения трубы в пространстве (горизонтальное, вертикальное, наклонное) и от направления теплового потока (от стенки к жидкости или наоборот).

Основные особенности смешанной конвекции можно объяснить, рассматривая течение жидкости около вертикальной пластины. Пусть вынужденное течение направлено снизу вверх, а температура пластины $T_c > T_{\infty}$ (рис. 9.7, а). В этом случае плотность жидкости около пластины меньше, чем вдали от нее. На частицы жидкости действуют термogravitационные силы, направленные вверх. Поскольку при этом ускорение направлено в ту же сторону, то скорость жидкости в пограничном слое возрастает. То же самое будет и в том случае, если вынужденное движение направлено сверху вниз, а $T_c < T_{\infty}$.

При движении снизу вверх и условии $T_c < T_{\infty}$ (охлаждение жидкости) действие термogravitационных сил приводит

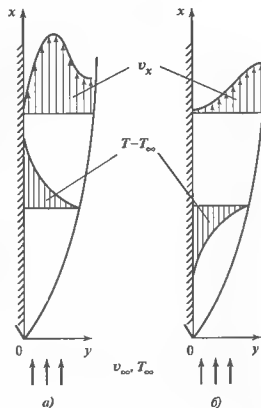


Рис. 9.7. Смешанная конвекция при совпадении (а) и противоположном (б) направлении свободной и вынужденной конвекций

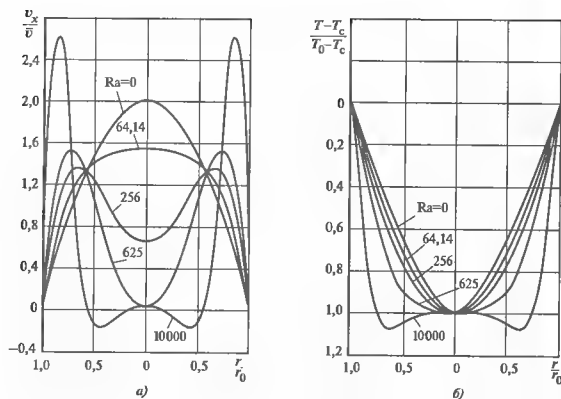


Рис. 9.8. Профили скорости (а) и температуры (б) при смешанной конвекции

к тому, что жидкость в пограничном слое тормозится (рис. 9.7, б). При определенных условиях градиент скорости при $y = 0$ может стать равным нулю и произойдет отрыв пограничного слоя с образованием вихрей. Тогда течение станет турбулентным.

Очевидно, что в первом рассмотренном случае теплоотдача будет больше, чем в отсутствии влияния свободной конвекции, а во втором — меньше.

Отмеченные явления наблюдаются и при течениях в вертикально расположенных трубах. Разница состоит в том, что в замкнутом объеме согласно закону сохранения импульса при вынужденном движении снизу вверх и $T_0 > T_{ж}$ в ядре потока будет наблюдаться уменьшение результирующей скорости.

Из рис. 9.8 можно получить представление о влиянии свободной конвекции (оно характеризуется числом Ra) на профили скорости и температуры при подъемном движении в обогреваемой трубе.

На развитие смешанной конвекции в обогреваемых трубах оказывают влияние граничные условия на стенке. При $T_c = \text{const}$ с ростом продольной координаты $T_{ж}$ растет, а $\Delta T = T_c - T_{ж}$ уменьшается, вместе с тем уменьшается и число Gr . Поэтому вдали от входа влияние свободной конвекции меньше, чем на начальном участке. При $q_c = \text{const}$ ΔT увеличивается, достигая максимального значения за пределами начального термического

участка. В этом случае влияние термогравитационных сил будет наибольшим в области стабилизированного теплообмена.

Влияние свободной конвекции в горизонтальных трубах проявляется в том, что из-за возникновения вторичных течений происходит образование двух вихрей (спиралевидных шнуров), симметричных относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось канала. При подводе теплоты через стенку жидкость поднимается вдоль боковой поверхности трубы и опускается в ядре потока. В случае охлаждения жидкости в трубе (отвод теплоты через стенку) направление вторичных течений противоположное. Теоретически и экспериментально установлено, что поток со вторичными течениями в виде отмеченных шнуров в горизонтальной трубе более устойчив к возмущениям и переход к турбулентности происходит при $Re > 2300$. В обогреваемой горизонтальной трубе при $q_c = \text{const}$ на основании опытных данных получено:

$$Re_{кр} = 2300 + 1740 \ln(1 + 10^{-5} Ra). \quad (9.10)$$

Формула (9.10) справедлива при $Ra \leq 10^8$ и $0,6 \leq Pr \leq 10$. Из (9.10) видно, что $Re_{кр}$ зависит от Ra . При $Ra = 10^8$ $Re_{кр} = 14\,300$. При том же граничном условии ($q_c = \text{const}$), как показывают теоретические расчеты, свободная конвекция начинает оказывать влияние на теплоотдачу при числе Gr , большем его предельного значения:

$$Gr_{пр} = \frac{1,1 \cdot 10^3}{Pr Nu_n [1 - \exp(-100X)]^3},$$

где Nu_n соответствует постоянным свойствам жидкости; при $Pr = 10$ и $Nu_n = 4,36$ $Gr_{пр} = 25$ (при этом число $Ra = 250$).

При существенном влиянии свободной конвекции в горизонтальной трубе происходит деформация как профиля скорости, так и профиля температуры. Все это приводит к тому, что в обогреваемой трубе коэффициент теплоотдачи изменяется по периметру сечения, причем α на нижней образующей может быть значительно больше, чем на верхней. При отводе теплоты через стенку (жидкость охлаждается) картина обратная. Средний по периметру коэффициент теплоотдачи при больших значениях приведенной длины (при $X \geq 1$) можно рассчитать по формуле Петухова—Полякова:

$$\overline{Nu} = 4,36 \left[1 + \frac{Ra}{1,8 \cdot 10^4} \right]^{0,045}.$$

Последняя формула справедлива при $50 < Re < Re_{кр}$, $Ra < 4 \cdot 10^7$ и $0,6 \leq Pr \leq 10$. Из этой формулы следует, что при $Ra = 4 \cdot 10^7$ значение $\overline{Nu}$ отличается от $Nu_{\infty} = 4,36$ на 15 %. Как видно, средняя теплоотдача за счет

влияния свободной конвекции изменяется незначительно, однако оказывается, что на нижней образующей в случае нагревания жидкости при $Ra = 4 \cdot 10^7$ местный коэффициент теплоотдачи приблизительно в 4 раза больше, чем на верхней. Последнее приводит к тому, что температура стенки на верхней образующей обогреваемой трубы значительно больше, чем на нижней.

Результаты теоретических решений и экспериментальные данные для местной теплоотдачи в обогреваемых трубах при подъемном течении жидкости показывают, что

$$\frac{Nu}{Nu_d} = \left(1 + \frac{Gr}{ReB}\right)^{0,27}, \quad (9.11)$$

где $B = 5,4X^{-1} + 312X^{1/4}$ при $X \leq 0,07$; $B = 240$ при $X > 0,07$.

Формула (9.11) справедлива при $250 < Re < 2 \cdot 10^3$, $Gr/Re < 2,6 \cdot 10^4$, $0,6 < Pr < 10$ и наличии предвключенного изотермического участка (на входе в участок обогрева жидкость имеет параболический профиль скорости). При условии, что $Gr/Re = 2,6 \cdot 10^4$ и $B = 240$ из этой формулы следует, что $Nu/Nu_d = 3,5$.

9.6. Задачи с решениями

Задача 1. Рассчитайте средний коэффициент теплоотдачи при течении трансформаторного масла по трубке диаметром $d = 8$ мм и длиной $l = 1,2$ м. Температура стенки $\bar{t}_c = 60^\circ\text{C}$, а $\bar{t}_ж = 40^\circ\text{C}$. Скорость течения масла $v = 0,6$ м/с.

Решение. При средней температуре $t = 0,5 (\bar{t}_ж + \bar{t}_c) = 50^\circ\text{C}$ для трансформаторного масла $\nu = 7,58 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda = 0,108$ Вт/(м·К); $\alpha = 6,80 \cdot 10^{-8}$ м²/с; $Pr = 111$; $\beta = 7,05 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹. При $\bar{t}_c = 60^\circ\text{C}$ $\mu_c = 49,5 \cdot 10^{-4}$ Па·с, при $\bar{t}_ж = 40^\circ\text{C}$ $\mu_ж = 89,4 \cdot 10^{-4}$ Па·с.

Для определения режима течения масла находим число Рейнольдса:

$$Re = \frac{0,6 \cdot 0,008}{7,58 \cdot 10^{-6}} = 633.$$

Режим течения масла в трубке ламинарный. Для того, чтобы установить, оказывает ли влияние на теплоотдачу свободная конвекция, вычисляем число Релея:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta t d^3}{\nu^2} Pr = \frac{9,81 \cdot 7,05 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 0,008^3}{(7,58 \cdot 10^{-6})^2} 111 = 1,2 \cdot 10^5.$$

Так как $Ra < 3 \cdot 10^5$, то влияние свободной конвекции мало и режим течения масла вязкостный. Вычисляем комплекс:

$$\frac{1}{Pe} \frac{l}{d} = \frac{1}{633 \cdot 111} \frac{1,2}{0,008} = 2,13 \cdot 10^{-3}.$$

Находим среднее число Нуссельта и $\bar{\alpha}$:

$$\overline{Nu} = 1,55 \left(\frac{1}{Pe} \frac{l}{d} \right)^{-1/3} \left(\frac{\mu_c}{\mu_ж} \right)^{-0,14} = 1,55 (2,13 \cdot 10^{-3})^{-1/3} \left(\frac{49,5}{89,4} \right)^{-0,14} = 13,08;$$

$$\bar{\alpha} = 13,08 \frac{0,108}{0,008} = 176 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. Коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha} = 176$ Вт/(м²·К).

Задача 2. В трубке диаметром $d = 14$ мм движется вода. Ее средняя температура $t_{ж} = 50^\circ\text{C}$, а число $Re = 1500$. Вычислите отношение $l_{н.т}/d$ и значение α за пределами $l_{н.т}$. Физические свойства воды считайте постоянными, $t_c = \text{const}$.

Решение. При $t_c = \text{const}$

$$l_{н.т}/d \approx 0,05 Re Pr = 0,05 \cdot 1500 \cdot 3,55 = 266.$$

Число $Pr = 3,55$ и $\lambda = 0,648$ Вт/(м·К) при $t_{ж} = 50^\circ\text{C}$. В области $x > l_{н.т}$ число $Nu = 3,66$. Следовательно,

$$\alpha = 3,66 \frac{0,648}{0,014} = 170 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. $l_{н.т}/d = 266$; $\alpha = 170$ Вт/(м²·К).

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ

10.1. Аналогия Рейнольдса

Докажем, что аналогия Рейнольдса приближенно справедлива при турбулентном течении в трубе. Рассмотрим область течения $x > l_{н.т.}$ и $x > l_{н.т.}$. Выше было доказано (см. § 8.2), что здесь напряжение трения линейно изменяется по радиусу трубы:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{r}{r_0}. \quad (10.1)$$

Запишем уравнение энергии в виде

$$\rho c_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q). \quad (10.2)$$

При больших числах Re в турбулентном ядре потока v_x слабо зависит от r , приближенно $v_x \approx \text{const}$. Будем считать, что на стенке $q_c = \text{const}$. Тогда производная $\partial T / \partial x = d\bar{T} / dx$ постоянна, а при $\rho c_p = \text{const}$ будет постоянна (не зависит от r) и левая часть (10.2).

Отсюда следует, что плотность теплового потока q линейно зависит от r , т.е.

$$\frac{q}{q_c} = \frac{r}{r_0}. \quad (10.3)$$

Сопоставляя (10.3) с (10.1), получаем $q/\sigma = \text{const}$. Это условие при $Pr = 1$ и $Pr_1 = 1$ обеспечивает подобие полей скорости и температуры, т.е.

$$\frac{T - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{v_x}{v_0}. \quad (10.4)$$

где T_c — температура стеики; T_0 и v_0 — температура и скорость жидкости на оси трубы.

Пусть $\bar{v}$ — средняя скорость, а $\bar{T}$ — среднemasовая температура жидкости в данном сечении. В (10.4) T_0 и v_0 заменим на $\bar{T}$ и $\bar{v}$.

Тогда получим

$$\frac{T - T_c}{\bar{T} - T_c} = \frac{v_x}{\bar{v}}. \quad (10.5)$$

Равенство (10.5) продифференцируем по y ($y = r_0 - r$). Учтем, что в искомом случае $\mu_p = \lambda$, а

$$q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{и} \quad \sigma_c = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

В результате получим

$$\alpha = \frac{c_p \sigma_c}{\bar{v}}, \quad (10.6)$$

где коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{q_c}{\bar{T} - T_c}.$$

Напряжение σ_c выразим через коэффициент трения ξ :

$$\sigma_c = \frac{\xi}{8} \rho v^2,$$

а также введем число Стантона

$$St = \frac{\alpha}{\rho v c_p}$$

Преобразуя (10.6), окончательно приходим к формуле, называемой *аналогией Рейнольдса*:

$$St = \xi / 8. \quad (10.7)$$

Несмотря на ряд допущений, сделанных при выводе формулы, (10.7) удовлетворительно согласуется с опытными данными. Полагая $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$,

$Re = \frac{\bar{v} d}{\nu}$, $St = \frac{Nu}{Re Pr}$, $Pr = 1$, из (10.7) получаем

$$Nu = \frac{\xi}{8} Re. \quad (10.8)$$

При больших числах Re приближенно $\xi \sim Re^{-0.2}$, тогда $Nu \sim Re^{0.8}$. Если число $Pr \neq 1$, теплоотдачу находят путем численного интегрирования уравнения энергии, а результаты расчета аппроксимируют зависимостью типа

$$Nu = \frac{\xi}{8} Re f(Re, Pr),$$

причем $f(Re, Pr)$ существенно зависит от Pr и слабо — от Re .

10.2. Интеграл Лайона

Для удобства численного интегрирования и расчета чисел Нуссельта уравнение энергии (10.2) целесообразно преобразовать к интегральному виду. Отметим, что уравнение (10.2) записано в приближении пограничного слоя, т.е. молекулярный и турбулентный переносы теплоты вдоль оси трубы не учитываются. Кроме того, не учитывается теплота трения. Эти допущения во многих практически важных случаях оказываются справедливыми.

При $q_c = \text{const}$ вдали от входа в трубу

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dx} = \frac{2q_c}{\rho c_p v r_0}. \quad (10.9)$$

Введем безразмерный радиус $R = r/r_0$. Производную $\partial T/\partial x$ в (10.2) заменим выражением (10.9). После этого получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2 \frac{v_x}{v} R = \frac{d}{dR} \left(R \frac{q}{q_c} \right).$$

В точке $R = 0$ в силу симметрии температурного поля $q = 0$. Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\frac{q}{q_c} = \frac{2}{R} \int_0^R \frac{v_x}{v} R dR.$$

Но плотность теплового потока

$$q = (\lambda + \lambda_\tau) \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda \left(1 + \frac{\lambda_\tau}{\lambda} \right) \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{q_c d}{\lambda} \frac{\int_0^R \frac{v_x}{v} R dR}{\left(1 + \frac{\lambda_\tau}{\lambda} \right) R},$$

откуда интегрированием в пределах от R до 1 получим

$$T_c - T = \frac{q_c d}{\lambda} \int_0^1 \frac{\int_0^R \frac{v_x}{v} R dR}{R \left(1 + \frac{\lambda_\tau}{\lambda} \right)} dR. \quad (10.9a)$$

Для среднemasовой температуры имеем

$$T_c - \bar{T} = 2 \int_0^1 (T_c - T) \frac{v_x}{v} R dR. \quad (10.9b)$$

Далее (10.9a) следует подставить в (10.9b) и преобразованное уравнение проинтегрировать по частям. В результате нетрудно получить выражение для числа Нуссельта:

$$\frac{1}{Nu} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R \frac{v_x}{v} R dR \right)^2}{R \left(1 + \frac{Pr_\tau}{Pr_\tau} \right)} dR. \quad (10.10)$$

Соотношение (10.10) называется *интегралом Лайона*. Для ламинарного режима течения $v_\tau = 0$, а $v_x/v = 2(1 - R^2)$. Тогда

$$\frac{1}{Nu} = 2 \int_0^1 \frac{\left[\int_0^R 2(1 - R^2) dR \right]^2}{R} dR = 2 \int_0^1 \left(R^3 - R^5 + \frac{R^7}{4} \right) dR = \frac{11}{48}.$$

Следовательно, для ламинарного течения в трубе в случае постоянных свойств жидкости и $q_c = \text{const}$ предельное число Нуссельта ($x > l_{н.т.}$)

$$Nu = 48/11 = 4,36.$$

Ранее (см. § 9.4) это значение Nu было получено другим способом.

Выражение типа (10.10) может быть получено и для течения в кольцевом канале (в пространстве между двумя коаксиальными трубами). Наряду с интегралом Лайона для нахождения чисел Нуссельта используют метод непосредственного интегрирования уравнения энергии, а при переменных свойствах жидкости и для условий течения на начальном гидродинамическом участке — полную систему уравнений конвективного теплообмена. Для замыкания системы применяют различные модели турбулентности (составляют уравнение баланса турбулентной энергии, вводят гипотезы для v_τ и др.). Иногда привлекают методы теории пограничного слоя.

10.3. Теплообмен при турбулентном течении в круглой трубе

Для нахождения числа Nu по (10.10) необходимо располагать данными по профилю скорости, турбулентной вязкости и числу Pr_τ . Так как при умеренных и больших числах Pr пристенная область потока оказывает наибольшее влияние на общее термическое сопротивление переносу теплоты,

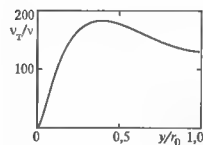
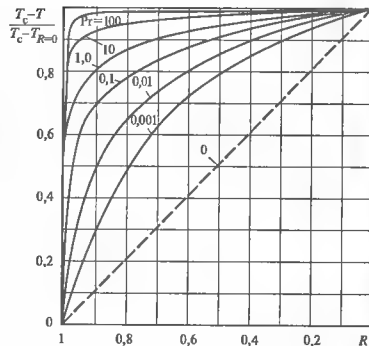


Рис. 10.1. Характер изменения турбулентной вязкости по радиусу трубы при $Re = 10^5$

Рис. 10.2. Распределение температуры по радиусу трубы при $Re = 10^6$ и различных значениях числа Pr



точное знание указанных характеристик в этой области имеет первостепенное значение.

Как показывают опытные данные, турбулентная вязкость сложным образом изменяется по сечению трубы (рис. 10.1), а профиль скорости вблизи ее поверхности подчиняется «закону стенки» (см. § 6.2). По методу, изложенному в § 10.2, можно не только рассчитать числа Nu , но и получить графики распределения температуры жидкости и плотности теплового потока по радиусу трубы. Эти графики, полученные Б.С. Петуховым, приведены на рис. 10.2 и 10.3. Из рис. 10.2 видно, что число Pr существенно влияет на профиль температуры в трубе. При очень малых значениях Pr ($Pr < 0,01$) профиль температуры напоминает параболу, а при больших Pr ($Pr > 100$) температура жидкости приблизительно постоянна во всех точках сечения трубы за исключением области вязкого подслоя. Рис. 10.3 показывает, что зависимость плотности теплового потока q от текущего радиуса близка к линейной.

В условиях стабилизированного теплообмена при турбулентном течении жидкости с постоянными свойствами число Nu зависит только от Re и Pr . С увеличением Re уменьшается толщина вязкого подслоя, а с увеличением Pr — толщина слоя молекулярной теплопроводности. Термическое сопротивление последнего слоя велико при умеренных и больших значениях Pr . В результате получаем, что с увеличением Re и Pr число Nu возрастает (рис. 10.4). Термическое сопротивление пристенной области потока относительно мало при $Pr \ll 1$ (жидкие металлы). В этом случае число Nu зависит от числа Re .

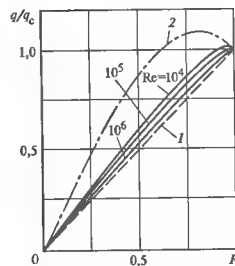


Рис. 10.3. Изменение плотности теплового потока по радиусу трубы 1 — линейная зависимость; 2 — зависимость для ламинарного течения

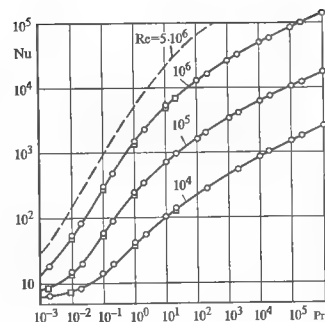


Рис. 10.4. Зависимость числа Nu от числа Pr при различных значениях Re

Значения интеграла в (10.10) находят численным методом с помощью компьютера. В частном случае $Pr \rightarrow \infty$ формулу для определения Nu можно получить аналитически.

Переходя от переменной R к переменной $\eta = \nu_0 y/\nu$ и полагая в (10.10) $R = 1$, а

$$\int_0^1 \frac{\nu}{\nu_0} dR = \frac{1}{2},$$

получаем

$$\frac{1}{Nu} = \frac{1}{2\eta_0} \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{1 + \beta Pr \eta^4}. \quad (10.11)$$

В (10.11) учтено, что при больших числах Pr ($Pr > 200$) в вязком подслое $\lambda_t \sim y^4$. Эта зависимость, предложенная С.С. Кутателадзе, подтверждается опытными данными. В (10.11) β — постоянная величина, а $\eta_0 = \nu_0 r_0/\nu$.

Введем новую переменную $z = Pr^{1/4} \beta^{1/4} \eta$. Тогда формула (10.11) примет вид

$$\frac{1}{Nu} = \frac{1}{2\eta_0 \beta^{1/4} Pr^{1/4}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{1 + z^4}, \quad (10.12)$$

где $z_0 = Pr^{1/4} \beta^{1/4} \eta_0$; при $Pr \rightarrow \infty$ $z_0 \rightarrow \infty$; интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{1 + z^4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{2}.$$

Учтем, что

$$\eta_0 = \frac{v \cdot r_0}{v} = \frac{1}{2\sqrt{8}} \sqrt{\xi} \operatorname{Re},$$

а (согласно опытным данным) $2\beta^{1/4}/(\pi\sqrt{2}) \approx 0,099$.

В результате из (10.12) получаем формулу Кутателадзе, пригодную для определения коэффициента теплоотдачи при турбулентном течении теплоносителей с числами $\operatorname{Pr} > 200$:

$$\operatorname{Nu} = 0,035 \sqrt{\xi} \operatorname{Re} \operatorname{Pr}^{1/4}. \quad (10.13)$$

При обобщении данных теоретического расчета и эксперимента для газов и жидкостей для $0,5 < \operatorname{Pr} < 200$ и $4 \cdot 10^3 < \operatorname{Re} < 10 \cdot 10^6$ получена формула Петухова:

$$\operatorname{Nu} = \frac{\xi}{8} \operatorname{Re} \operatorname{Pr} \frac{1}{1 + \frac{900}{\operatorname{Re}} + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} (\operatorname{Pr}^{2/3} - 1)}, \quad (10.14)$$

где Nu — число Нуссельта при стабилизированных течении и теплообмене, а также постоянных свойствах жидкости или газа; коэффициент трения

$$\xi = \left(0,79 \ln \frac{\operatorname{Re}}{8} \right)^{-2}.$$

Поведение коэффициента теплоотдачи на начальном участке зависит от условий на входе в трубу. На практике чаще всего встречается вход в трубу со скачкообразным изменением поперечного сечения (вход с уступом). Тогда за острой кромкой образуется небольшая область вихревого течения (рис. 10.5), а затем имеет место турбулентный пограничный слой, который довольно быстро нарастает, так что уже при $x/d > 20$ (x — координата, отсчитываемая от входа в трубу) наступает стабилизация теплооб-

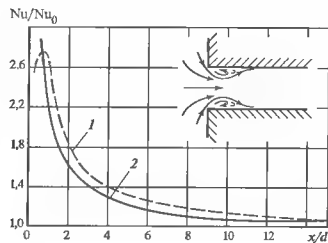


Рис. 10.5. Изменение теплоотдачи на начальном участке трубы
1 — опытные данные; 2 — данные, полученные по (10.15)

мена ($\alpha = \text{const}$). Теплоотдача на входном участке трубы выше, чем вдали от входа, а число Nu приблизительно описывается формулой

$$\frac{\operatorname{Nu}}{\operatorname{Nu}_0} = 1 + 1,2 \frac{d}{x}, \quad (10.15)$$

где Nu_0 — число Нуссельта вычисляемое по (10.14).

Для длинных труб ($l/d \geq 50$) влияние входного участка сказывается мало и среднее значение $\bar{\operatorname{Nu}} = \operatorname{Nu}_0$.

Для учета зависимости физических свойств теплоносителя от температуры (10.14) необходимо ввести поправку ϵ_T и тогда

$$\operatorname{Nu} = \operatorname{Nu}_0 \epsilon_T,$$

где для капельной жидкости

$$\epsilon_T = \left(\frac{\mu_c}{\mu_j} \right)^{-n},$$

причем в диапазоне $0,08 < \mu_c/\mu_j < 40$ $n = 0,11$ при нагревании жидкости ($T_c > T_j$), и $n = 0,25$ при ее охлаждении.

Число Nu_0 рассчитывают по (10.14), выбирая значения физических свойств жидкости по определяющей температуре, равной среднemasовой температуре $T_{ж}$. Значения μ_c и μ_j в формуле поправочного коэффициента ϵ_T соответствуют температурам T_c и T_j .

Для газов

$$\epsilon_T = \left(\frac{T_c}{T_j} \right)^{-n},$$

причем в диапазоне $0,4 < T_c/T_j < 4$ $n = 0,36$ при охлаждении газа и $n = 0,5$ при его нагревании. Расчет по формуле Петухова дает наиболее точные значения коэффициентов теплоотдачи в широком интервале изменения Re и Pr . Для более узкого диапазона $10^4 < \operatorname{Re} < 10^5$ значения α можно получить по формуле Михеева:

$$\operatorname{Nu}_{ж} = 0,021 \operatorname{Re}_{ж}^{0,8} \operatorname{Pr}_{ж}^{0,43} \left(\frac{\operatorname{Pr}_{ж}}{\operatorname{Pr}_c} \right)^{0,25}. \quad (10.16)$$

Здесь индексы «ж» и «с» указывают на то, что значения физических свойств жидкости при определении чисел подобия следует выбирать соответственно по $T_{ж}$ или T_c . Для расчета коэффициента теплоотдачи в литературе имеются и другие формулы, например формула Диттуса—Белтера:

$$\operatorname{Nu} = 0,023 \operatorname{Re}^{0,8} \operatorname{Pr}^{0,4}. \quad (10.17)$$

При использовании (10.16), а также (10.17) следует иметь в виду, что при больших значениях Re и Pr рассчитанный коэффициент теплоотдачи может значительно (на $\sim 30\%$) отличаться от действительного α .

Так как жидкие металлы отличаются своеобразием процесса теплообмена, для них указание выше зависимости несправедливы. При $Pr \ll 1$ длина начального термического участка мала и практически вся длина трубы является областью стабилизированного теплообмена. В отличие от газов и обычных жидкостей при турбулентном течении жидких металлов оказывают влияние граничные условия на стенке. При равномерном обогреве ($q_c = \text{const}$)

$$Nu = 7 + 0,025Pe^{0,8},$$

а при постоянной температуре стенки ($T_c = \text{const}$)

$$Nu = 5 + 0,025Pe^{0,8}.$$

Наличие в металле нерастворенных оксидов, которые концентрируются вблизи стенки, приводит к значительному снижению коэффициента теплоотдачи.

В изогнутых трубах (змеевиках) наблюдаются более высокие, чем в прямых трубах, коэффициенты теплоотдачи. Это объясняется дополнительным перемешиванием жидкости вследствие закрутки потока и вторичных течений. Для приближенного расчета числа Nu в изогнутой трубе используют формулу

$$\frac{Nu}{Nu_0} = 1 + 3,5 \frac{r_0}{R}.$$

где Nu_0 — число Nu для прямой трубы; r_0 — радиус трубы; R — радиус изгиба (для круглого змеевика R — радиус змеевика).

Переход ламинарного режима в турбулентный происходит при $Re = Re_{кр} = 2 \cdot 10^4 (r_0/R)^{0,32}$.

На теплоотдачу при турбулентном течении оказывает влияние шероховатость стенки трубы. Для шероховатой трубы α больше, чем для гладкой. Однако это имеет место только тогда, когда выступы шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя. Теплоотдача в технических трубах, как правило, подчиняется закономерностям, справедливым для гладких труб.

Создание искусственной шероховатости стенки трубы является одним из методов интенсификации теплообмена. Основная идея этого метода — разрушение вязкого подслоя, который представляет собой основное термическое сопротивление переносу теплоты при $Pr > 0,5$. На теплоотдачу в шероховатой трубе влияют высота и форма выступов элементов шероховатости, а также расстояние между ними. Поскольку коэффициент трения ξ для шероховатой трубы больше, чем для гладкой, при использовании ше-

роховатости как метода интенсификации теплообмена необходимо учитывать дополнительные затраты мощности на прокачку теплоносителя.

Из опытов следует, что оптимальными являются следующие показатели: высота шероховатости $\delta_{ш} \sim 10\delta_v$ (δ_v — толщина вязкого подслоя) и расстояние между выступами $s = 16\delta_{ш}$. При этом за счет шероховатости α можно увеличить в 2 раза, при умеренном (в 3 раза) увеличении затрат мощности на прокачку теплоносителя.

10.4. Теплообмен при турбулентном течении в кольцевом канале

Кольцевые каналы (кольцевые трубы) достаточно часто встречаются в конструкциях теплообменных устройств. Примером может служить теплообменник типа «труба в трубе» (рис. 10.6). Здесь одна горячая жидкость с температурой T_1' на входе в теплообменник движется по внутренней трубе, а другая (ее температура на входе T_2') — в зазоре между трубами (кольцевом канале). Внешняя труба обычно хорошо теплоизолирована, и поэтому теплоемкой поверхностью является только поверхность внутренней трубы. Пусть d_1 — внутренний диаметр кольцевого канала, а d_2 — его внешний диаметр. Расчет теплоотдачи в кольцевом канале рассмотренного типа можно проводить по эмпирической формуле Исаченко—Галина:

$$Nu = 0,017Re^{0,8} Pr^{0,4} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^{0,18} \epsilon_T. \quad (10.18)$$

Формула (10.18) справедлива при $1,2 \leq d_2/d_1 \leq 14$ и $0,7 \leq Pr \leq 100$. Определяющей температурой является температура жидкости, а определяющим размером, входящим в формулы для нахождения чисел Nu и Re , — эквивалентный диаметр $d_s = 4S/P$ (S — площадь сечения кольца, а P — «смоченный» периметр), причем $d_s = d_2 - d_1$. Поправочный коэффициент

$$\epsilon_T = \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25},$$

где $Pr_{ж}$ и Pr_c — числа Прандтля для данной жидкости при температуре жидкости и стенки соответственно.

Теоретический анализ задачи о теплообмене в кольцевом канале (кольцевой трубе) показывает, что в общем случае необходимо рассмотреть два числа Нуссельта —

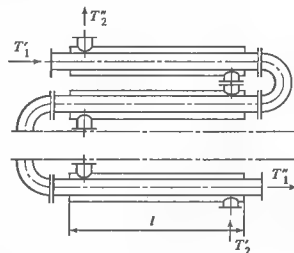


Рис. 10.6. Теплообменник типа «труба в трубе»

для внутренней и внешней стенок канала. Обозначим Nu_{12} — число Нуссельта для внутренней стенки, Nu_{21} — для внешней. Тогда

$$Nu_{12} = \frac{Nu_{10}}{1 + \frac{q_{c2}}{q_{c1}} \theta_a Nu_{10}};$$

$$Nu_{21} = \frac{Nu_{20}}{1 + \frac{q_{c2}}{q_{c1}} R_1 \theta_a Nu_{20}}.$$

где Nu_{10} — число Нуссельта на внутренней стенке канала при отсутствии теплообмена на его внешней стенке (т.е. $q_{c2} = 0$, а $q_{c1} \neq 0$); Nu_{20} — число Нуссельта на внешней стенке при $q_{c1} = 0$ и $q_{c2} \neq 0$; $R_1 = d_1/d_2$; θ_a — безразмерная адиабатическая температура внутренней стенки, когда $q_{c1} = 0$.

Значения Nu_{10} , Nu_{20} , θ_a можно рассчитать по формулам Петухова—Роizenя:

$$\frac{Nu_{10}}{Nu_0} = \left(1 - \frac{0,45}{2,4 + Pr}\right) \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{-n};$$

$$\frac{Nu_{20}}{Nu_0} = 1 - \frac{0,45}{2,4 + Pr} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,6};$$

$$\theta_a = 22 \left[0,27 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 - 1 \right] Re^{-0,87} Pr^{-1,05}.$$

Здесь Nu_0 — число Нуссельта для круглой трубы (рассчитывается по формуле Петухова с учетом того, что определяющим размером является эквивалентный диаметр d_3); $n = 0,16 Pr^{-0,15}$. Указанные формулы справедливы при $0,2 \leq d_1/d_2 \leq 1$, $0,7 \leq Pr \leq 100$, $10^4 \leq Re \leq 10^6$.

При вычислении Nu_{12} и Nu_{21} следует иметь в виду, что q_{c1} и q_{c2} — проекции вектора q на направления внешних нормалей к стенкам канала. В обоих случаях нормали направлены в сторону жидкости, протекающей по кольцевому каналу. Например, если $q_{c1} > 0$, то внутренняя стенка обогревается и от нее тепловой поток направлен к жидкости, если же $q_{c1} < 0$, то от внутренней стенки тепло отводится, т.е. эта стенка охлаждается.

Случай $R_1 = 1$ соответствует плоскому каналу. При $Re \geq 10^4$, $Pr \geq 0,5$, $R_1 \geq 0,1$ для расчета теплоотдачи можно использовать формулы Галина Есина:

$$Nu_{10} = \frac{\xi}{8} \frac{(0,96 + 0,04 R_1^{-1}) Re Pr}{C_1 + C_2 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)};$$

$$Nu_{20} = \frac{\xi}{8} \frac{Re Pr}{C_1 + C_2 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)};$$

$$\theta_a = 37,1 (0,38 R_1 - 1) Re^{-0,88} Pr^m,$$

где

$$C_1 = (1 + 3,4\xi) \left(1 + \frac{R_1}{1,15 + 5,5 R_1}\right);$$

$$C_2 = 11,7 + 1,8 Pr^{-1/3};$$

$$\xi = \frac{1}{(1,82 \lg Re - 1,64 - 0,19 R_1^{1/4})^2};$$

$$m = 0,112/Pr - 1.$$

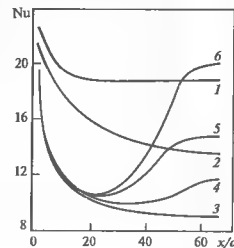
10.5. Теплообмен при смешанной (вынужденной и свободной) турбулентной конвекции

Свободная конвекция может оказывать существенное влияние на теплоотдачу не только при ламинарном (см. § 9.5), но и при турбулентном режиме движения жидкости в трубах ($Re > Re_{кр}$). Последний случай влияния конвекции подробно излагается в [36]. Рассмотрим кратко результаты, полученные авторами [36].

О влиянии свободной конвекции на местную теплоотдачу в вертикальной трубе можно судить по рис. 10.7, на котором представлены опытные данные, полученные для восходящего турбулентного движения воз-

Рис. 10.7. Изменение теплоотдачи вдоль трубы при $Pr = 0,7$; $Re = 5100$

1 — $Gr_q \rightarrow 0$; 2 — $Gr_q = 4,7 \cdot 10^6$; 3 — $Gr_q = 1,1 \cdot 10^7$; 4 — $Gr_q = 1,5 \cdot 10^7$; 5 — $Gr_q = 3,0 \cdot 10^7$; 6 — $Gr_q = 7,6 \cdot 10^7$



духа ($Pr = 0,7$) при равномерном обогреве стенки трубы. Видно, что при больших значениях числа Грасгофа зависимость числа Нуссельта от x/d резко отличается от случая, когда влияние термогравитационной силы не сказывается на коэффициенте теплоотдачи ($Gr_q \rightarrow 0$, здесь $Gr_q = g\beta q_c d^4 / (\lambda \nu^2)$). Резкий спад теплоотдачи на начальном участке трубы объясняется ламинаризацией потока. При увеличении тепловой нагрузки q_c теплоотдача адаптируется от начала обогрева и начинает интенсивно увеличиваться за счет развития свободной конвекции. Провал («яма») в зависимости $Nu = f(x/d)$ для восходящего движения жидкости в обогреваемых трубах наблюдается не только при относительно малых числах Re ($Re > Re_{кр}$), но и при больших числах Re ($Re = 10^3$), что следует из результатов опытов при сверхкритических давлениях теплоносителя. Последнее объясняется тем, что вблизи псевдокритической температуры T_m (температуры, соответствующей максимуму теплоемкости) коэффициент объемного расширения β , а следовательно, и локальная термогравитационная сила имеют очень большие значения. Например, для воды при $T = 633 \text{ K}$ $\beta = 0,0109 \text{ K}^{-1}$, а при $T_m = 647 \text{ K}$ $\beta \approx 28 \text{ K}^{-1}$. Следует отметить, что зависимость β от температуры, как и зависимость теплоемкости c_p вблизи точки, соответствующей T_m , имеет пикообразный характер. Таким образом, если $T_{ж} < T_m < T_c$ ($T_{ж}$ — среднemasсовая температура, а T_c — температура стенки) из-за локального возмущения потока жидкости термогравитационными силами, которые при восходящем потоке жидкости приводят к резкому снижению ее скорости у стенки, происходит уменьшение интенсивности теплоотдачи и увеличение T_c . Указанное выше условие на практике обычно реализуется на относительно коротких участках трубы, поэтому ухудшение теплоотдачи носит местный характер, и это сопровождается «пиком» температуры стенки. В случае нисходящего течения в обогреваемой трубе теплоотдача практически такая же, как и при отсутствии массовых сил.

В условиях течения сверху вниз в обогреваемых трубах (или снизу вверх — в охлаждаемых) ламинарный режим сохраняется лишь при небольшой степени влияния архимедовых сил, а теплоотдача при этом локально уменьшается (рис. 10.8, I). В противоположность этому, при турбулентном режиме в том же случае теплоотдача монотонно растет (рис. 10.8, II), и при очень больших числах Gr_q порождение турбулентности определяется, в основном, термогравитационными силами, а не напряжениями сдвига в усредненном течении.

В этом предельном случае режим теплоотдачи описывается формулой Полякова:

$$Nu = 0,5 Pr^{1/2} Gr_q^{1/4} (1 + Pr^{1/2})^{-1}. \quad (10.19)$$

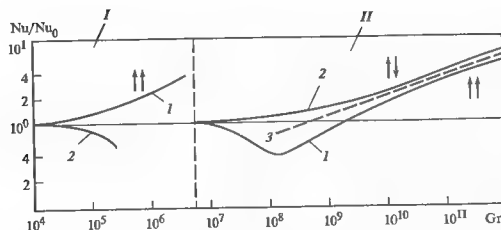


Рис. 10.8. Зависимость отношения Nu/Nu_0 (Nu_0 соответствует $Gr_q \rightarrow 0$) от числа Грасгофа для ламинарного (I) ($Re = 2 \cdot 10^3$) и турбулентного (II) ($Re = 10^4$) режимов при восходящем и нисходящем течении жидкости в вертикальных обогреваемых трубах при практически постоянных физических свойствах жидкости ($Pr = 0,7$)
1, 2 — восходящее и нисходящее течения; 3 — свободная конвекция вдоль вертикальной поверхности; стрелками показано взаимное направление вынужденного и свободного движения

Из (10.19) следует, что α не зависит от диаметра трубы, как и в случае теплообмена в турбулентном пограничном слое при свободной конвекции около вертикальной пластины (см. § 7.2).

Для практических расчетов теплоотдачи важно знать, когда следует учитывать влияние термогравитационных сил, а когда ими можно пренебречь. Детальное изучение этого вопроса А.Ф. Поляковым показало, что граница начала влияния термогравитации при турбулентном течении жидкости в трубах может быть определена с помощью предельного числа Грасгофа

$$Gr_{гпр} = 9 \cdot 10^{-5} Pr^{1,5} Re^{2,75}. \quad (10.20)$$

Для горизонтальных труб на среднюю по периметру теплоотдачу при турбулентном течении жидкости гравитационное поле практически не влияет. Это объясняется тем, что в обогреваемой трубе степень уменьшения теплоотдачи вблизи ее верхней образующей компенсируется увеличением теплоотдачи вблизи нижней образующей. Согласно А.Ф. Полякову, граница начала влияния термогравитации на вынужденное течение и теплообмен в горизонтальных трубах соответствует предельному числу Грасгофа

$$Gr_{гпр} = 3 \cdot 10^{-5} Pr^{0,5} Re^{2,75} [1 + 2,4(Pr^{2/3} - 1)Re^{-1/8}]. \quad (10.21)$$

Формулы (10.20) и (10.21) справедливы при практически постоянных свойствах жидкости. Как показывают опытные данные, даже при относительно малом влиянии термогравитации ($Gr_q/Gr_{гпр} \approx 10$) теплоотдачи на верхней и нижней образующих при $x/d > 30$ отличаются более чем на 20%. При увеличении Gr_q изменение теплоотдачи по периметру становится более существенным, и в случае, когда $Gr_q \approx 10^{10}$, коэффициенты те-

плоотдачи на верхней и нижней образующих могут отличаться в 2—3 раза. Влияние поля силы тяжести на теплоотдачу в горизонтальных трубах проявляется при сверхкритических давлениях теплоносителя, причем это влияние более значительно, чем в обычных условиях.

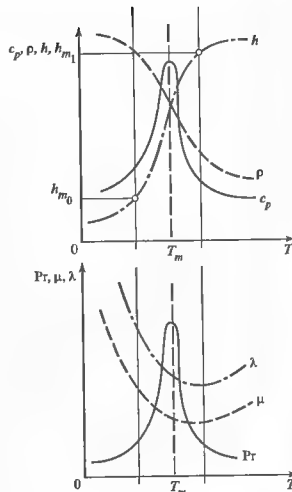
Таким образом, результаты исследования показывают, что при смешанной турбулентной конвекции наблюдается совершенно различный характер изменения теплоотдачи в вертикальных и горизонтальных трубах, однако границы начала влияния термогравитации близки, о чем можно судить по зависимостям (10.20) и (10.21).

Следует отметить, что неучет влияния термогравитации в гидравлических и тепловых расчетах труб большого диаметра для теплоотрасс может быть причиной их разрушения из-за деформации, обусловленной резким изменением температуры по периметру трубы.

10.6. Особенности теплообмена в около- и сверхкритической области параметров состояния вещества

Знание закономерностей теплообмена в около- и сверхкритической области параметров состояния вещества имеет особое значение для теплоэнергетики в связи с применением воды при сверхкритическом давлении в качестве рабочего тела на тепловых электрических станциях. Известно также, что на АЭС эффективно использовать воду при сверхкритических параметрах в первом контуре реакторов с естественной циркуляцией. Напомним, что для воды $p_{кр} = 22,12$ МПа, $T_{кр} = 547,3$ К, а в критической точке энтальпия $h_{кр} = 2150$ кДж/кг. Специфика гидродинамики и теплообмена в около- и сверхкритической области параметров состояния вещества состоит в том, что здесь своеобразно и немонотонно изменяются физические свойства теплоносителей в зависимости от температуры и давления (рис. 10.9). Теплоемкость c_p , число Прандтля Pt имеют максимум при псевдокритической температуре T_m . Как указывалось выше (см. § 10.5), при $T = T_{кр}$ коэффициент объемного расширения β также имеет максимальное значение. Изменение свойств теплоносителя по радиусу и длине обогреваемой (или охлаждаемой) трубы приводит к тому, что внутри потока из-за разности плотностей в различных точках среды развивается свободная конвекция (см. § 10.5), изменяется характер турбулентных переносов теплоты и количества движения, деформируется профиль скорости, что в конечном счете сказывается на интенсивности теплоотдачи. Кроме того, в той части потока, где температура близка к T_m , вследствие резкого изменения плотности среды происходит ускорение теплоносителя (это ускорение называется *термическим*) при его нагревании и замедление при его охлаждении. Таким образом, термогравитационная конвекция и термическое ускорение — два фактора, которые могут оказывать существенное влияние на гидродинамику и теплообмен в случае применения теплоносителей при

Рис. 10.9. Характер изменения физических свойств теплоносителей в околокритической области параметров состояния вещества при $p > p_{кр}$



около- и сверхкритических параметрах. Эти факторы необходимо учитывать в расчетах процессов теплообмена в области изменения $h_{ж}$ — средне-массовой энтальпии теплоносителя $h_{m0} < h_{ж} < h_{m1}$ (h_{m0} и h_{m1} показаны на рис. 10.9). В области жидкого состояния вещества $h_{ж} < h_{m0}$ для

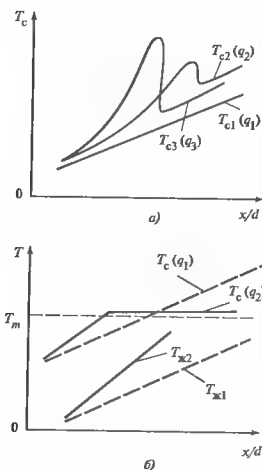
расчета теплоотдачи можно пользоваться зависимостями, справедливыми для капельной жидкости, а в области $h_{ж} > h_{m1}$ — формулами, справедливыми для газов, учитывая при этом зависимость физических свойств от температуры. Особое внимание следует уделять тем случаям, когда пределы изменения температуры среды частично или полностью захватывают область, примыкающую к псевдокритической температуре T_m , так как в этой области возможно резкое уменьшение коэффициента теплоотдачи, а при нагревании теплоносителя — повышение температуры стенки трубы.

Основными величинами, которые следует учитывать при анализе процесса теплообмена при течении теплоносителя со сверхкритическими параметрами, являются: энтальпия $h_{ж}$, тепловая нагрузка на поверхность нагрева q_c и массовая скорость $\bar{w}$, которая равна отношению расхода теплоносителя к площади сечения трубы. На основании опытов приблизительно можно считать, что для котлов использующих воду со сверхкритическими параметрами, при $h_{ж} < 850$ кДж/кг теплоотдача подчиняется зависимости

$$Nu = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,4},$$

откуда следует, что при $h_{ж} = 800$ кДж/кг, диаметре трубы $d = 30$ мм и изменении $\bar{w}$ от 1000 до 3000 кг/(м²·с) значение α меняется от 8000 до 20 000 Вт/(м²·К). При таких значениях α температура стенки лежит в допустимых пределах. Если $h_{ж} > 850$ кДж/кг, существенное влияние на те-

плотности оказывают значения величин $\bar{\rho}v$ и q_c . В том случае, когда $q_c \cdot 10^{-3} / (3,6\bar{\rho}v) \leq 0,4$ кДж/кг (q_c , Вт/м²), наблюдается повышенная интенсивность теплоотдачи, при этом температура стенки находится в допустимых пределах при $q_c = 600 \dots 700$ кВт/м² и $\bar{\rho}v = 2000 \dots 2500$ кг/(м²·с). Резкое снижение теплоотдачи имеет место при $q_c \cdot 10^{-3} / (3,6\bar{\rho}v) > 0,84$ кДж/кг. В этом случае возможно значительное увеличение температуры стенки трубы. Режимы, для которых значения $q_c \cdot 10^{-3} / (3,6\bar{\rho}v)$ лежат в пределах 0,42—0,84 кДж/кг, характеризуются тем, что здесь возможно как увеличение, так и уменьшение интенсивности теплообмена. В последних режимах температура стенки $T_c > T_m$ а среднemasовая температура жидкости $T_{ж} < T_m$. Изменение температуры стенки вдоль оси трубы для ухудшенного и улучшенного режимов теплообмена показано на рис. 10.10. Следует отметить, что, несмотря на значительное число расчетно-теоретических и экспериментальных исследований теплообмена в около- и сверхкритической области параметров состояния вещества, изучение этого сложного вопроса нельзя считать законченным. Так, например, ясно, что при сильном изменении плотности жидкости влияние термogrавитации проявляется более сильно, чем в обычных условиях. Этот эффект, естественно, связан с



расположением трубы в пространстве, однако имеются многочисленные экспериментальные данные о развитии местного ухудшения теплоотдачи в трубах малого диаметра при произвольном их расположении. В связи с этим можно рассматривать две возможные причины ухудшения теплоотдачи при сверхкритических давлениях теплоносителя: подавление турбулентности термogrавитационными силами при восходящем движении жидкости в вертикальных обогреваемых трубах; подавление турбулентности за счет «эффекта термического ускорения потока», обусловленного сильным уменьшением плотности жидкости вдоль трубы при интенсивном нагревании

Рис. 10.10. Изменение температуры стенки трубы вдоль ее оси в ухудшенном (а) и улучшенном (б) режимах теплообмена ($q_3 > q_2 > q_1$)

Последний эффект проявляется при любом расположении трубы. Он аналогичен эффекту подавления турбулентности в конфузурных каналах, когда имеет место сильное ускорение потока жидкости.

Согласно А.Ф. Полякову, область отсутствия ухудшения теплоотдачи определяется неравенством

$$\left| (\pm Gr_q + J) / (Re^{2,8} \bar{Pr}) \right| < 4 \cdot 10^{-4}. \quad (10.22)$$

где модифицированное число Грасгофа

$$Gr_q = (\rho_{ж} - \rho_c) q_c d / [\bar{\rho} (T_c - T_{ж}) \nu_{ж}^2 \lambda_{ж}];$$

здесь $\rho_{ж}$ и ρ_c — плотности при температуре жидкости и стенки; $\bar{\rho}$ выбирается по температуре $\tilde{T} = 0,5(T_{ж} + T_c)$; $\nu_{ж}$ и $\lambda_{ж}$ — кинематическая вязкость и теплопроводность жидкости (следует выбирать по температуре $T_{ж}$).

Величина J определяет влияние термического ускорения потока, причем

$$J = \frac{Re}{\bar{Pr}} \left(\frac{\rho_{ж} - \rho_c}{T_c - T_{ж}} \frac{q_c d \rho_{ж}}{\lambda_{ж} \bar{\rho}^2} \right)^2,$$

где $\bar{Pr}$ — модифицированное число Прандтля [35].

При $J \leq 2Gr_q$ ухудшение теплоотдачи имеет место при восходящем движении жидкости; оно отсутствует при нисходящем движении. В (10.22) знак «плюс» относится к восходящему движению в обогреваемых трубах, а знак «минус» — к нисходящему.

10.7. Задачи с решениями

Задача 1. Найдите коэффициент теплоотдачи от стенки трубы диаметром 32×6 мм к воде в экономайзере парового котла. Давление воды равно 30 МПа, а ее температура и скорость на входе в экономайзер составляют соответственно 270 °С и 1,5 м/с. Температура на выходе из экономайзера равна 320 °С.

Решение. Рассчитаем коэффициент теплоотдачи на входе в экономайзер. При $t = 270$ °С $\rho = 767$ кг/м³; $\nu = 0,127 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda = 0,594$ Вт/(м²·К); $Pr = 0,84$.

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{1,5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0,127 \cdot 10^{-6}} = 2,36 \cdot 10^5.$$

Коэффициент трения

$$\xi = \left(0,79 \ln \frac{2,35 \cdot 10^5}{8} \right)^{-2} = 0,0151.$$

Число Нуссельта находим по формуле Петухова (см. § 10.3):

$$Nu = \frac{0,0151 \cdot 2,36 \cdot 10^5 \cdot 0,84}{8 \left(1 + \frac{900}{2,36 \cdot 10^5} + 12,7 \cdot 0,0435 (0,84^{2/3} - 1) \right)} = 397.$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_{\text{вх}} = 397 \frac{0,594}{0,02} = 11\,790 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

При $t = 320^\circ \text{C}$ $\rho = 667 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,117 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda = 0,511 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $Pr = 1,01$. Число Рейнольдса

$$Re = \frac{1,5 \cdot 767 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{667 \cdot 0,117 \cdot 10^{-6}} = 2,95 \cdot 10^5.$$

Далее находим: $Nu = 559$ и $\alpha_{\text{вых}} = 14\,288 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Средний коэффициент теплоотдачи равен $0,5(11\,790 + 14\,288) = 13\,050 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Расчет проведен в предположении, что $\epsilon_r = 1$. Оценим температуру стенки трубы, приняв, что средняя температура продуктов сгорания равна 450°C и $\alpha = 114 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Тогда

$$q = \frac{450 - 295}{\frac{1}{114} + \frac{6 \cdot 10^{-3}}{50} + \frac{1}{13\,050}} = 17\,527,8 \text{ Вт/м}^2.$$

Температура внутренней поверхности трубы

$$t_c = 295 + \frac{17\,527,8}{13\,050} \approx 296^\circ \text{C}.$$

Следовательно, поправка $\epsilon_r = 1$.

Если свойства воды отнести к температуре $t_{\text{отр}} = 0,5(270 + 320) = 295^\circ \text{C}$,

то можно получить $\bar{\alpha} = 12\,470 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Это значение $\bar{\alpha}$ практически совпадает с тем, которое мы рассчитали выше другим способом.

Ответ. Коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha} = 13\,050 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Задача 2. По трубке диаметром $d = 10 \text{ мм}$ и длиной $l = 2 \text{ м}$ предполагается пропускать воду с такой скоростью, что ее массовый расход $G = 0,237 \text{ кг/с}$. Температура воды на входе в трубку $t_{\text{ж вх}} = 200^\circ \text{C}$, а давление $p = 8 \text{ МПа}$. Вы-

яснить, закипит ли вода в трубке, если распределение тепловой нагрузки по ее длине будет задано в виде

$$q(x) = A \cos \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right],$$

где $A = 4 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}$; x — координата, отсчитываемая от входного сечения трубы.

Решение. При $p = 8 \text{ МПа}$ $t_s = 295^\circ \text{C}$. Вода не закипит, если $t_c < t_s$. Найдем максимальную температуру стенки трубы. Запишем среднemasсовую температуру воды как функцию x :

$$t_{\text{ж}}(x) = t_{\text{ж вх}} + \frac{A}{Gc_p} \int_0^x \cos \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] dx = t_{\text{ж вх}} + B \sin \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + B,$$

где $B = Al/(\pi Gc_p)$.

Соотношение для температуры стенки как функции x будет иметь вид

$$t_c(x) = t_{\text{ж вх}} + B \sin \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{A}{\pi d \alpha(x)} \cos \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + B.$$

Для упрощения дальнейшего решения задачи примем коэффициент теплоотдачи постоянным и равным $\bar{\alpha} = 0,5(\alpha_{\text{вх}} + \alpha_{\text{вых}})$, где $\alpha_{\text{вх}}$ и $\alpha_{\text{вых}}$ — коэффициенты теплоотдачи, рассчитанные по параметрам воды во входном и выходном сечениях трубки.

Возьмем производную функции $t_c(x)$:

$$t'_c(x) = \frac{\pi}{l} B \cos \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{A}{l d \bar{\alpha}} \sin \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Полагая $t'_c(x) = 0$, с учетом выражений для A и B получаем

$$\text{tg} \left[\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\bar{\alpha} l d}{G c_p}. \quad (10.23)$$

Чтобы найти точку максимума $t_c(x)$, вычислим $\bar{\alpha}$. При $t = 200^\circ \text{C}$ для воды $\mu = 1,334 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\lambda = 0,665 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $Pr = 0,9$. Число Рейнольдса на входе в трубку

$$Re_{\text{вх}} = \frac{4 \cdot 0,237}{0,01 \cdot 1,334 \cdot 10^{-4}} = 2,26 \cdot 10^5.$$

По формуле Петухова найдем число $Nu_{\text{вх}} = 402$ и $\alpha_{\text{вх}} = 26\,700 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Принимаем, что поправка $\epsilon_r = 1$. Примем среднюю температуру воды равной 220°C . Тогда $c_p = 4,610 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$. Температура воды на выходе из трубки

$$t_{\text{ж,вых}} = 200 + \frac{4000 \cdot 2}{0,237 \cdot 4610} 2 = 247 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

При найденном значении $t_{\text{ж,вых}}$ $\mu = 1,07 \cdot 10^{-4}$ Па·с; $\lambda = 0,620$ Вт/(м·К); $\text{Pr} = 0,83$. Аналогично тому, как это было сделано при вычислении $\alpha_{\text{вх}}$, найдем $\alpha_{\text{вых}} = 29\,800$ Вт/(м²·К). Тогда $\bar{\alpha} = 0,5(26\,700 + 29\,800) = 28\,250$ Вт/(м²·К). Теперь можно найти значение комплекса величин в правой части (10.23):

$$\frac{\bar{\alpha} l d}{G c_p} = \frac{28\,250 \cdot 2 \cdot 0,01}{0,237 \cdot 4610} = 0,517.$$

Значение $\text{tg } \beta = 0,517$ при $\beta = 0,477$. Учитывая выражение для аргумента тангенса в (10.23), получаем относительную координату точки максимума $t_c(x)$: $x/l = 0,652$. В этой точке $t_c = 274$ °С, а $t_{\text{ж}} = 234,8$ °С. Так как $t_c < t_s$, то закипание воды в трубке исключено.

Заметим, что учет поправки ϵ_t практически не скажется на полученных результатах, так как

$$\epsilon_t = \left(\frac{1,17 \cdot 10^{-4}}{0,96 \cdot 10^{-4}} \right)^{0,11} = 1,02.$$

Ответ. Вода в трубке не закипит.

Задача 3. Найдите средний коэффициент теплоотдачи при движении дымовых газов по трубам воздухоподогревателя парового котла. Средняя температура дымовых газов $t_{\text{ж1}} = 265$ °С, а средняя температура воздуха $t_{\text{ж2}} = 145$ °С. Трубы стальные, их внутренний диаметр $d = 50$ мм, толщина стенки $\delta = 1,5$ мм. Коэффициент теплоотдачи от стенок труб к воздуху $\alpha_2 = 76$ Вт/(м²·К). Скорость дымовых газов составляет 14 м/с.

Решение. При $t = 265$ °С для дымовых газов (13 % CO₂, 11 % H₂O) $\nu = 41,2 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda = 0,0454$ Вт/(м·К); $\text{Pr} = 0,66$. Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{14 \cdot 0,05}{41,2 \cdot 10^{-6}} = 17\,000.$$

Для расчета числа Nu и α возьмем формулу Михеева:

$$\text{Nu} = 0,021 \cdot 17\,000^{0,8} \cdot 0,66^{0,43} = 43,5;$$

$$\alpha = 43,5 \frac{0,0454}{0,05} = 39,5 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

В расчете α не учитывалась температурная поправка ϵ_t . Оценим значение ϵ_t . Коэффициент теплопередачи

$$k = \frac{1}{\frac{1}{39,5} + \frac{0,015}{40} + \frac{1}{76}} = 26 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Плотность теплового потока от газов к воздуху $q = 26(265 - 245) = 5\,120$ Вт/м². Температура стенки

$$t_c = 265 - \frac{5\,120}{39,5} = 186 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Найдем значение поправки:

$$\epsilon_t = \left(\frac{186 + 273}{265 + 273} \right)^{-0,36} = 1,06.$$

С учетом ϵ_t искомый коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = 39,5 \cdot 1,06 = 41,2 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. Коэффициент теплоотдачи $\alpha = 41,2$ Вт/(м²·К).

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ТРУБЫ
И ПУЧКА ТРУБ11.1. Зависимость характера обтекания цилиндра от числа
Рейнольдса

Рассмотрим трубу (круглый цилиндр) диаметром d , омываемую потоком несжимаемой жидкости с кинематической вязкостью ν . Набегающий поток, движущийся со скоростью v_∞ , перпендикулярен к диаметральной плоскости цилиндра. Безразмерным параметром, определяющим поток жидкости в окрестности цилиндра и силу гидравлического сопротивления, является число Рейнольдса:

$$Re = \frac{v_\infty d}{\nu}.$$

При очень малых значениях числа Re (около единицы и меньше) в кормовой части цилиндра образуется застойная зона (рис. 11.1, а). Размеры застойной зоны увеличиваются с ростом числа Re . Благодаря сдвиговому действию внешнего потока жидкость в застойной зоне приводится во вращение. При этом в кормовой области образуются два симметричных вихря (рис. 11.1, б), размеры которых в направлении течения увеличиваются с ростом Re . Точки отрыва линий тока от поверхности цилиндра соответствуют углу $\varphi \approx 82^\circ$ при $Re \approx 150$.

При $Re \approx 150$ один из вихрей отрывается (рис. 11.1, в) и плывет вниз по течению вместе с жидкостью, а на его месте возникает новый вихрь. Вихри попеременно отходят от цилиндра, образуя процессию вихрей [дорожку Кармана (рис. 11.2, а)]. Экспериментально установлено, что частота выброса вихрей $f \approx 0,2v_\infty/d$.

Процессия чередующихся вихрей создает периодическую поперечную силу, действующую на цилиндр и стремящуюся вызвать его поперечные колебания (этим объясняется «гудение» проводов в линиях электропередачи). Дорожка с регулярным движением вихрей наблюдается вплоть до $Re \approx 10^3$.

При дальнейшем росте Re в вихревой дорожке сначала образуются турбулентные пятна (рис. 11.2, б), затем поток в дальнейшем следе становится турбулентным. При $Re \approx 10^4$ граница турбулентности достигает кормовой точки цилиндра, а при $Re \approx 10^5$ турбулентность охватывает всю кормовую

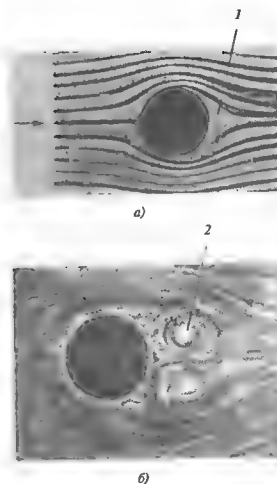


Рис. 11.1. Обтекание цилиндра при $Re < 150$
1 — застойная зона; 2 — вращающийся вихрь

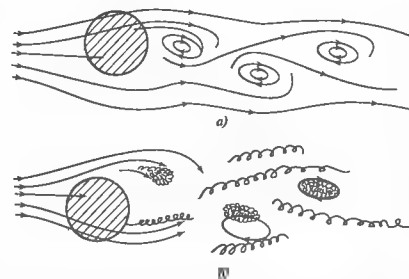


Рис. 11.2. Дорожка Кармана (а) и турбулентные пятна в дальнем следе (б)

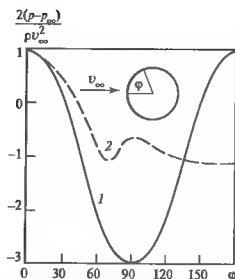


Рис. 11.3. Распределение безразмерного давления по окружности цилиндра
1 — по теории обтекания идеальной жидкостью; 2 — опытные данные для больших чисел Re

часть цилиндра ($82 < \varphi < 180^\circ$, где угол φ отсчитывается от передней критической точки). При критическом числе $Re = 2 \cdot 10^5$ турбулентный след сужается, а точка отрыва потока смещается вниз по течению, достигая угла $\varphi \approx 120^\circ$.

При $Re > 2 \cdot 10^5$ размер области турбулентности увеличивается, а точка перехода ламинарного течения в пограничный слой в турбулентное смещается в лобовую область обтекания цилиндра. Распределение давления по окружности цилиндра при больших числах Re показано на рис. 11.3.

На рис. 11.4 приведена зависимость коэффициента сопротивления цилиндра C_D от числа Re. Пусть $F_{\text{сопр}}$ — сила сопротивления цилиндра длиной l и диаметром d , а $S = dl$. Тогда по определению

$$C_D = \frac{2F_{\text{сопр}}}{\rho v_\infty^2 S}$$

Кривую на рис. 11.4 можно разбить на четыре части: первая ($Re < 40$) соответствует области безотрывного обтекания; вторая ($150 < Re < 10^3$) —

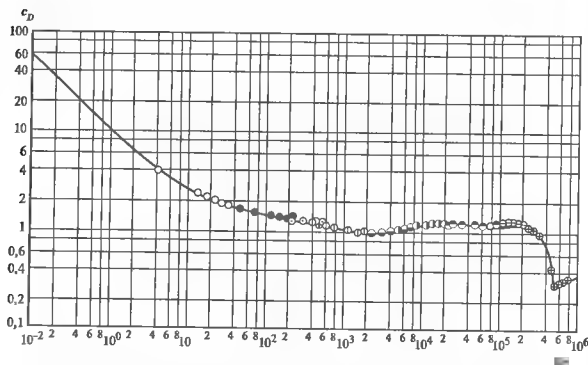


Рис. 11.4. Зависимость коэффициента сопротивления круглого цилиндра от числа Re

области вихревой дорожки Кармана; третья ($10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$) — области докритического обтекания; четвертая ($Re > 2 \cdot 10^5$) — области закритического обтекания. Как видно из рис. 11.4, при $Re = 2 \cdot 10^5$ наблюдается резкое снижение силы сопротивления цилиндра, что объясняется турбулизацией пограничного слоя.

Турбулентный пограничный слой по сравнению с ламинарным обладает большей кинетической энергией. Это приводит к тому, что точка отрыва потока смещается вниз по течению, сужается след за цилиндром, происходит улучшение обтекания и снижение сопротивления. Улучшения обтекания цилиндра можно добиться и искусственным путем, сделав его поверхность шероховатой или увеличив турбулентность набегающего потока.

11.2. Теплоотдача при обтекании цилиндра

Интенсивность процесса теплообмена между цилиндром и потоком жидкости характеризуется коэффициентом теплоотдачи

$$\alpha = \frac{q_c}{T_c - T_\infty} \quad (11.1)$$

или в безразмерном виде числом Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} \quad (11.2)$$

Местное число Нуссельта зависит от угла φ , а также чисел Re и Pr, т.е.

$$Nu = f(Re, Pr, \varphi).$$

Характер изменения коэффициента теплоотдачи (или числа Нуссельта) для данной жидкости ($Pr = \text{const}$) качественно иллюстрирует график¹, приведенный на рис. 11.5. Прежде всего, отметим, что число Nu, как и при обтекании пластины, растет с увеличением Re. Кривая 1 соответствует числам $Re < 40$, т.е. случаю, когда отрыва вихрей еще нет. Кривая 2 отвечает обтеканию с отрывом вихрей ($40 < Re < 150$). Эта область называется областью ламинарного обтекания. Здесь ламинарный пограничный слой образуется как в лобовой части цилиндра, так и в кормовой. В кормовой части пограничный слой возвратный, т.е. в нем частицы жидкости движутся в направлении, противоположном основному потоку. Поскольку скорость возвратного течения за цилиндром меньше, чем скорость набегающего потока, то толщина возвратного пограничного слоя больше толщины пограничного слоя на лобовой части цилиндра. Кривые 3 и 4 (рис. 11.5) соответствуют большим числам Re, когда происходит переход режима течения в пограничном слое от ламинарного к турбулентному.

¹ Рис. 11.5, 11.11, 11.12 заимствованы из [7].

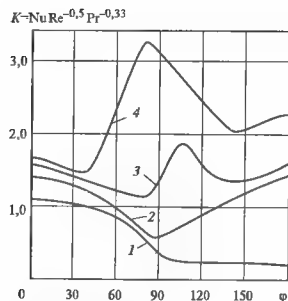


Рис. 11.5. Зависимость локального числа Нуссельта от угла φ

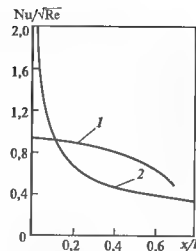


Рис. 11.6. Распределение теплоотдачи по поверхности цилиндра (1) и пластины (2) (характерным размером в выражениях для Nu и Re является l — длина пластины, $l = d$ при обтекании цилиндра)

Таким образом, уменьшение α в начале обтекания (лобовая часть цилиндра) объясняется ростом толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев. С этим же эффектом было связано изменение α по длине пластины (см. гл. 5). Но при обтекании пластины пограничный слой начинается с нуля, а при обтекании цилиндра с конечной толщины (в лобовой точке). Этим объясняется разница в поведении α для цилиндра и пластины в самом начале обтекания. Так как в области передней части цилиндра скорость внешнего потока увеличивается, пограничный слой растет медленнее, чем при обтекании пластины, и α уменьшается медленнее (рис. 11.6). Для числа Нуссельта в окрестности лобовой точки ($\varphi = 0$) справедлива формула

$$Nu = 1,14 Pr^{0,364} \sqrt{Re}. \quad (11.3)$$

Для среднего по периметру цилиндра числа Нуссельта опытным путем получены следующие формулы:

$$Nu = 0,76 Re^{0,4} Pr^{0,37} \epsilon_T \quad \text{при } 1 \leq Re \leq 40;$$

$$Nu = 0,52 Re^{0,5} Pr^{0,37} \epsilon_T \quad \text{при } 40 \leq Re \leq 10^3;$$

$$Nu = 0,26 Re^{0,6} Pr^{0,37} \epsilon_T \quad \text{при } 10^3 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5;$$

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \epsilon_T \quad \text{при } 10^5 \leq Re \leq 10^7.$$

Определяющей температурой при выборе значений μ , λ , Pr является T_{∞} , а ϵ_T учитывает зависимость свойств жидкости от температуры:

$$\epsilon_T = \left(\frac{Pr_{\infty}}{Pr_c} \right)^{0,25} \quad (11.4)$$

Приведенные формулы используются при числах $Pr \geq 0,6$, т.е. они несправедливы для жидких металлов.

Существенное влияние на теплоотдачу оказывает степень турбулентности набегающего потока. Для учета этого влияния в расчетные формулы вводят поправку

$$\epsilon_{Tu} = Tu^{0,15},$$

где Tu — измеряется в процентах.

Для шероховатой поверхности цилиндра значение α больше, чем для гладкой. Например коэффициент теплоотдачи при обтекании шероховатой трубы диаметром 50 мм (высота выступов шероховатостей равна 0,2—0,4 мм) примерно в 2 раза выше, чем для трубы с гладкой поверхностью. Следует отметить, что коэффициент c_D при переходе от гладкой трубы к шероховатой увеличивается значительно меньше.

Если вектор скорости набегающего потока составляет угол β с осью цилиндра, то в расчетные формулы вводят поправку ϵ_{β} (рис. 11.7). Приближенно можно считать, что

$$\epsilon_{\beta} = (\sin \beta)^{1/2}.$$

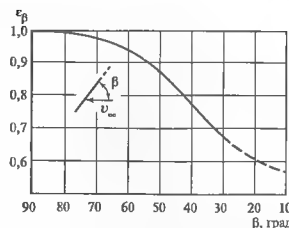


Рис. 11.7. Зависимость поправочного коэффициента ϵ_{β} от угла β

11.3. Конструктивные особенности пучков труб, теплоотдача при их обтекании, а также характер течения жидкости в этих пучках

Примером теплообменного устройства, выполненного в виде пучка труб, может служить водяной экономайзер парового котла. В экономайзере происходит подогрев питательной воды от T'_2 до T''_2 потоком горячего газа — продуктов сгорания топлив, температура которых уменьшается от T'_1 до T''_1 . Экономайзер можно сделать в двух вариантах: с коридорным или шахматным расположением труб. На рис. 11.8 показан экономайзер с шахматным расположением труб. Как в том, так и в другом случае геометрическими характеристиками пучка являются: диаметр труб, поперечный s_1 и продольный s_2 шаги (рис. 11.9). Пучки характеризуются также числом рядов и числом труб в ряду. Предельными случаями пучков являются коридорный

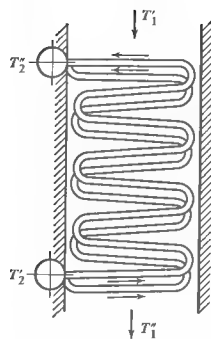


Рис. 11.8. Водяной экономайзер с шахматным расположением труб

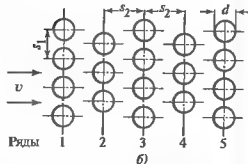
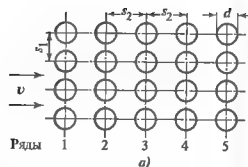


Рис. 11.9. Геометрические характеристики коридорного (а) и шахматного (б) пучков

пучок с $s_2 = d$ и система труб с $s_2 \gg d$. В первом случае сверхтесного пучка течение жидкости напоминает течение в канале с изменяющимся по длине сечением, а во втором — обтекание одиночной трубы с той лишь разницей, что труба находится в стесненных условиях.

В технических устройствах обычно применяются пучки с относительно небольшими шагами ($s/d = 1,2 \dots 2,5$). В отличие от одиночной трубы в пучке трубы второго, третьего и далее рядов находятся в следе за предыдущими рядами. Качественно поведение потока в коридорных и шахматных пучках показано на рис. 11.10.

Теплоотдача при обтекании пучков труб. Как и при обтекании одиночной трубы, коэффициент теплоотдачи изменяется по периметру трубы в глубинном ряду пучка. Если в передней части одиночной трубы максимум α всегда в точке $\varphi = 0$, то при обтекании трубы в глубинном ряду распределение теплоотдачи по углу φ зависит от компоновки пучка (рис. 11.11).

Опыты показывают, что начиная с третьего ряда средний коэффициент теплоотдачи трубы практически не зависит от номера ряда, т.е. имеет место стабилизация теплообмена. Объясняется это тем, что в пучке устанавливается собственная турбулентность, слабо зависящая от состояния набегающего потока. Обычно в первых двух рядах теплоотдача ниже, чем в глубинных рядах (рис. 11.12). При этом приблизительно можно считать, что для коридорного пучка $\alpha_1 = 0,6\alpha_3$, $\alpha_2 = 0,9\alpha_3$; для шахматного пучка $\alpha_1 = 0,6\alpha_3$, $\alpha_2 = 0,7\alpha_3$.

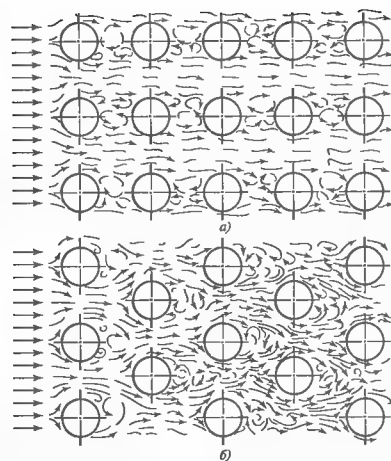


Рис. 11.10. Характер течения жидкости в коридорном (а) и шахматном (б) пучках труб

Для пучков число Re находится по скорости жидкости в узком сечении пучка и наружному диаметру трубы:

$$Re = \frac{v_{\text{уз}} d}{\nu},$$

а число

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}.$$

В технических устройствах, как правило, $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$. В этом случае средний α трубы в глубинном (начиная с третьего) ряду коридорного пучка при $\beta = 90^\circ$ находится по формуле

$$Nu = 0,27 Re^{0,63} Pr^{0,36} \epsilon_r. \quad (11.5)$$

Для шахматного пучка при $s_1/s_2 < 2$

$$Nu = 0,35 \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^{0,2} Re^{0,6} Pr^{0,36} \epsilon_r, \quad (11.6)$$

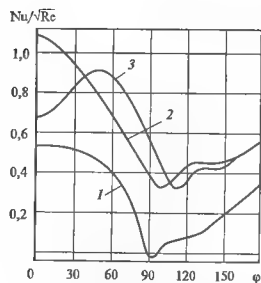


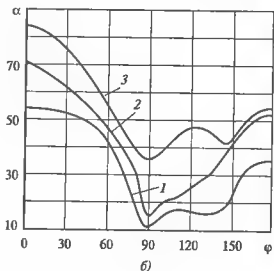
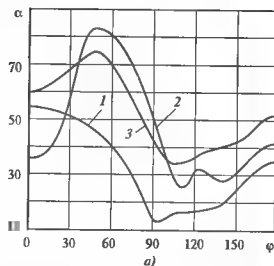
Рис. 11.11. Изменение теплоотдачи по периметру трубы

1 — одиночная труба; 2 — труба в глубинном ряду шахматного пучка, 3 — то же коридорного пучка

→

Рис. 11.12. Зависимость $\alpha = f(\varphi)$ при обтекании воздухом коридорного (а) и шахматного (б) пучков труб (пучки 2×2 ; $Re = 1,4 \cdot 10^4$)

1—3 — соответственно первый, второй и глубинный ряды пучка



при $s_1/s_2 > 2$

$$Nu = 0,4 Re^{0,6} Pr^{0,36} \epsilon_r.$$

Поправка ϵ_r здесь такая же, как и в случае одиночной трубы. Если угол натекания потока на пучок не равен 90° , то следует вводить поправку ϵ_r .

11.4. Задачи с решениями

Задача 1. В теплообменнике «газ — газ» разреженный пучок труб омывается дымовыми газами. Температура набегающего потока $t_{ж1} = 800^\circ C$, а скорость $v_\infty = 15$ м/с. Для газов, протекающих внутри труб, $t_{ж2} = 300^\circ C$ и $\alpha_2 = 90$ Вт/(м² · К). Трубы с диаметром и толщиной стенки $d_2 \times \delta = 32 \times 5$ мм изготовлены из стали 12Х1МФ, допустимая рабочая температура которой $550^\circ C$. Найдите среднюю температуру наружной поверхности трубы и температуру в первой критической (лобовой) точке и сопоставьте найденные значения с допустимой рабочей температурой стали.

294

Решение. При $t_{ж1} = 800^\circ C$ для дымовых газов $\lambda = 0,0915$ Вт/(м · К); $\nu = 131,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $Pr = 0,60$. Расчет теплоотдачи проводим по формулам, справедливым при обтекании одиночной трубы. Число Рейнольдса

$$Re = \frac{15 \cdot 0,032}{131,8 \cdot 10^{-6}} = 3641.$$

Среднее число Нуссельта

$$\overline{Nu} = 0,26 \cdot 3641^{0,6} \cdot 0,6^{0,37} = 29,4,$$

и коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha}_1 = 29,4 \frac{0,0915}{0,032} = 84,2 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Вычисляем число Нуссельта и коэффициент теплоотдачи в первой критической точке (φ = 0):

$$Nu = 1,14 \cdot 3641^{0,5} \cdot 0,60^{0,37} = 56,9;$$

$$\alpha = 56,9 \frac{0,0915}{0,032} = 162,7 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Теплопроводность стали $\lambda = 40$ Вт/(м · К). Средняя плотность теплового потока

$$\bar{q} = \frac{800 - 300}{\frac{1}{90} + \frac{0,005}{40} + \frac{1}{84,2}} = 21\,645 \text{ Вт/м}^2.$$

Местная плотность теплового потока при φ = 0

$$q = \frac{800 - 300}{\frac{1}{90} + \frac{0,005}{40} + \frac{1}{162,7}} = 28\,825 \text{ Вт/м}^2.$$

Средняя температура стенки

$$\bar{t}_c = 800 - \frac{21\,645}{84,2} = 543^\circ C.$$

Температура стенки в критической точке

$$t_c = 800 - \frac{28\,825}{162,7} = 623^\circ C.$$

Ответ. Средняя температура стенки трубы меньше, а температура в лобовой точке больше допустимой.

Задача 2. Найдите средний коэффициент теплоотдачи при поперечном обтекании дымовыми газами пакета труб экономайзера парового котла. Экономайзер собран из плоских змеевиков с шахматным расположением труб с диаметром и толщиной стенки 32×6 мм, причем $s_1/d = 2,4$, а $s_2/d = 1,8$,

295

а число рядов равно 40. Скорость газов в узком сечении $u_{yz} = 14$ м/с. Их температура на входе в пакет труб 520°C , а на выходе из него 380°C .

Решение. Средняя температура газов равна $0,5(520 + 380) = 450^\circ\text{C}$. При этой температуре для газов $\nu = 68,3 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda = 6,13 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К); $Pr = 0,63$.

Вычисляем число Рейнольдса:

$$Re = \frac{14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{68,3 \cdot 10^{-6}} = 6,56 \cdot 10^3.$$

Число Нуссельта для глубинных рядов пучка труб

$$Nu = 0,35 \left(\frac{2,4}{1,8} \right)^{0,2} (6,56 \cdot 10^3)^{0,6} \cdot 0,63^{0,36} = 61,2.$$

Для многорядного пучка труб влияние первых двух рядов незначительно. Поэтому коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = 61,2 \frac{6,13 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} = 117 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. Средний коэффициент теплоотдачи пакета труб $\bar{\alpha} = 117$ Вт/(м²·К).

Задача 3. Как изменится α в задаче 2, если шахматный порядок расположения труб заменить коридорным?

Решение. Используя формулу (11.5), получаем

$$Nu = 0,27(6,56 \cdot 10^3)^{0,63} \cdot 0,63^{0,36} = 58.$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = 58 \frac{6,13 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} = 111 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. Коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha} = 111$ Вт/(м²·К)

ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

12.1. Виды конденсации. Термические сопротивления в процессе конденсации пара на охлаждаемой стенке

В природе и технике встречаются различные виды конденсации пара. Конденсация может происходить внутри объема пара или парогазовой смеси. Например, образование тумана или выпадение дождя — это *объемная конденсация* водяного пара из влажного воздуха. Аналогичный процесс может наблюдаться при расширении пара в последних ступенях проточной части паровых турбин. Для объемной конденсации необходимо, чтобы пар был перенасыщен, т.е. его плотность должна превышать плотность насыщенного пара при данном давлении. При этом степень перенасыщения, при которой начинается конденсация тем больше, чем чище пар.

Чтобы происходил процесс объемной конденсации, в паре должны присутствовать *центры конденсации* (аэрозольные частицы, ионизированные атомы и др.). Особенностью объемной конденсации является то, что вследствие действия поверхностного натяжения небольшие капли жидкости (диаметром около 10 мкм) могут находиться в состоянии термодинамического равновесия с паром при давлении, меньшем давления насыщения, соответствующего плоской поверхности раздела фаз.

В промышленных теплообменных аппаратах конденсация осуществляется либо при прямом контакте с холодной жидкостью [жидкость направляется в объем пара в виде струй (капель), или струя пара — в объем жидкости], либо при соприкосновении пара с холодной стенкой (обычно стенок трубы). При конденсации выделяется теплота фазового перехода (теплота парообразования). Чтобы происходил стационарный процесс конденсации, эту теплоту необходимо непрерывно отводить от поверхности охлаждения. Если, например, полностью конденсируется сухой насыщенный пар, массовый расход которого G_p , кг/с, то отводимый тепловой поток (без учета теплоты переохлаждения конденсата)

$$Q = G_p r, \quad (12.1)$$

где r — теплота парообразования.

Очевидно, что если G_k — расход конденсата, то $G_k = G_p$.

При выпадении конденсата на поверхности охлаждаемой стенки возможны два вида конденсации: *капельная* и *плёночная*. В первом случае конденсат осажается в виде отдельных капель, которые занимают лишь часть поверхности теплообмена (остальная часть при этом покрыта тончайшим слоем жидкости), а во втором — на охлаждаемой поверхности образуется сплошная плёнка конденсата. Эта плёнка стекает вниз под действием силы тяжести или увлекается в ту или другую сторону потоком пара.

Капельная конденсация происходит в том случае, если конденсат не смачивает твёрдую поверхность. Смачиваемость характеризуется *краевым углом* θ (углом между поверхностями жидкости и твёрдого тела). Если угол θ острый, жидкость смачивает поверхность; если тупой, не смачивает. При капельной конденсации наблюдаются очень высокие значения коэффициентов теплоотдачи, однако искусственно ее трудно поддерживать в течение длительного времени.

В промышленных установках, конденсаторах паровых турбин, подогревателей питательной воды и других теплообменных аппаратах на ТЭС и АЭС обычно имеет место плёночная конденсация пара. Она происходит либо на наружной, либо на внутренней поверхности горизонтальных или вертикальных труб.

Допустим, что внутри вертикальной трубы протекает охлаждающая жидкость, а снаружи находится сухой насыщенный пар, содержащий некоторое количество воздуха (если давление ниже атмосферного, воздух может проникнуть в пар через неплотности в теплообменном аппарате). Рассмотрим процесс теплопередачи от пара к охлаждающей жидкости. Интенсивность этого процесса характеризуется коэффициентом теплопередачи

$$k = \frac{q}{T_s - T_{ж}},$$

где q — плотность теплового потока; T_s и $T_{ж}$ — температуры насыщения при давлении пара вдали от плёнки и охлаждающей жидкости.

Коэффициент теплопередачи — величина, обратная сумме термических сопротивлений. В общем случае (когда на стенке имеются отложения примесей веществ) в процессе теплопередачи могут быть семь термических сопротивлений. При этом

$$\Delta T = T_s - T_{ж} = \sum_{i=1}^7 \Delta T_i.$$

где ΔT_i — частные перепады температуры (рис. 12.1);

$$\Delta T_i = q R_i \quad (i = 1 \dots 7).$$

Рассмотрим первое (*диффузионное*) термическое сопротивление $R_1 = \Delta T_1 / q$. Механизм возникновения диффузионного сопротивления состоит в следующем. Когда порция паровоздушной смеси достигает поверхности

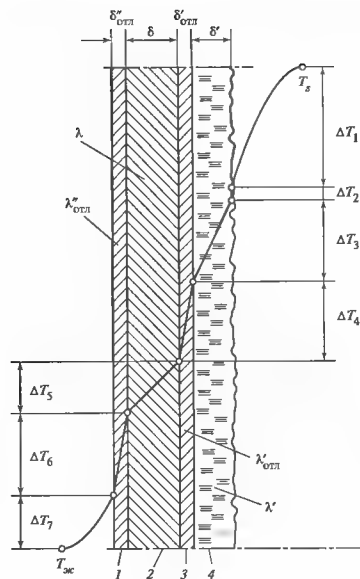


Рис. 12.1. Теплопередача от конденсирующегося пара к охлаждающей жидкости 1, 3 — отложения; 2 — стенка; 4 — плёнка конденсата; δ' , λ' — толщина и теплопроводность плёнки

плёнки, пар конденсируется. При этом вблизи плёнки образуется слой с повышенной концентрацией воздуха, и парциальное давление пара здесь меньше, чем в остальном объеме. Следовательно, температура пара в тонком слое вблизи плёнки ниже, чем вдали, что и объясняет существование разности температур ΔT_1 . Так как концентрации пара и воздуха оказываются различными в разных областях данного пространства, то в паровоздушной смеси происходит диффузия компонентов (пар диффундирует к поверхности плёнки, а воздух — наоборот). Наличие воздуха в паре резко снижает интенсивность процесса конденсации. Для чистого пара $R_1 = 0$ и $\Delta T_1 = 0$.

Термическое сопротивление R_2 называется *сопротивлением фазового перехода* или молекулярно-кинетическим сопротивлением на границе раз-

дела фаз. Дело в том, что при конденсации поток молекул к границе раздела фаз превышает поток молекул в противоположную сторону, вследствие чего в тонком слое (порядка нескольких длин свободного пробега молекул) имеет место перепад давления, которому соответствует «скачок» температуры $\Delta T_2 = qR_2$.

Для оценки термического сопротивления R_2 и значения ΔT_2 примем, что нормальная к поверхности пленки скорость молекул

$$v_n = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}},$$

где k — постоянная Больцмана; m — масса молекулы; M — масса одного киломоля (для H_2O $M = 18$ кг/кмоль); $R = 8314$ Дж/(кмоль $\cdot$ К) — универсальная газовая постоянная.

Пусть ρ_{n1} — плотность пара, соответствующая потоку молекул, падающих на пленку, а ρ_{n2} — плотность пара для потока молекул, вылетающих из пленки конденсата. Величины ρ_{n1} и ρ_{n2} пропорциональны давлениям насыщенного пара соответственно p_{n1} и p_{n2} . Принимая, что все молекулы пара захватываются пленкой, запишем выражение для плотности потока конденсирующегося пара

$$i = (\rho_{n1} - \rho_{n2})v_n = \frac{M}{RT_1}(p_{n1} - p_{n2})\sqrt{\frac{RT_1}{2\pi M}} = \sqrt{\frac{M}{2\pi RT_1}}(p_{n1} - p_{n2}).$$

С учетом уравнения Клапейрона — Клаузиуса

$$p_{n1} - p_{n2} \approx \frac{dp_s}{dT} \Delta T_2 = \frac{r}{T_s(v'' - v')} \Delta T_2.$$

Таким образом, скачок температуры ΔT_2 определяется по формуле

$$\Delta T_2 = \sqrt{\frac{2\pi R}{M}} \frac{T_s^{3/2}(v'' - v')}{r^2} q,$$

где $q = jr$.

Допустим, что конденсируется пар с атмосферным давлением, а $q = 10^5$ Вт/м². Тогда

$$\Delta T_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8314}{18}} \frac{373^{3/2}(1,672 - 0,001)}{2,257^2 \cdot 10^2} 10^4 = 0,03 \text{ К}.$$

Оценочный расчет показывает, что термическое сопротивление фазового перехода мало, поэтому обычно при конденсации чистого пара температуру внешней поверхности пленки принимают равной температуре насыщения в объеме пара, а при конденсации паровоздушной смеси — температуре насыщения при парциальном давлении пара вблизи пленки. Однако при капельной конденсации и конденсации паров жидких металлов сопротивление R_2 может быть значительно. Для расчета этого сопротивления

прибегают к более строгой молекулярно-кинетической теории фазового перехода.

Термическое сопротивление R_3 — это сопротивление конденсата, зависящее от режима течения пленки (ламинарное или турбулентное). Теплота фазового перехода, выделяющаяся на границе раздела фаз, передается далее к охлаждающей жидкости путем теплопроводности и конвекции в стекающей пленке.

Обозначим через $\delta'_{отл}$ и $\delta''_{отл}$ толщины слоев отложений на стенке со стороны конденсата и охлаждающей жидкости соответственно, а через $\lambda'_{отл}$ и $\lambda''_{отл}$ теплопроводности этих отложений. Тогда термические сопротивления отложений определяются так: $R_4 = \delta'_{отл} / \lambda'_{отл}$ и $R_6 = \delta''_{отл} / \lambda''_{отл}$, а термическое сопротивление стенки $R_5 = \delta / \lambda$, где δ и λ — толщина и теплопроводность стенки. Термическое сопротивление R_7 зависит от интенсивности отвода теплоты охлаждающей жидкостью, т.е. от коэффициента теплоотдачи. Если $\alpha_{охл}$ — коэффициент теплоотдачи, то $R_7 = 1/\alpha_{охл}$.

12.2. Теория пленочной конденсации на охлаждаемой вертикальной стенке (теория Нуссельта). Влияние различных факторов на теплоотдачу при ламинарном течении пленки

Пусть имеется вертикальная стенка (рис. 12.2), температура которой $T_c = \text{const}$. Около стенки находится неподвижный сухой насыщенный пар, температура которого $T_s > T_c$. Предположим, что течение пленки ламинарное; инерционные силы, вызываемые ускорением пленки, пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости и силами тяжести; конвективный перенос теплоты незначителен по сравнению с переносом теплоты поперек пленки (вдоль пленки перенос теплоты не учитывается); силы трения на границе «пленка — пар» пренебрежимо малы; физические свойства конденсата ($\rho_{ж}$, $\lambda_{ж}$ и $\mu_{ж}$) от температуры не зависят. В такой постановке задача о теплообмене при конденсации была решена Нуссельтом (1916 г.).

Режим течения пленки зависит от числа Рейнольдса. Для пленки

$$Re = \frac{4\bar{v}_x \delta}{\nu_{ж}}, \quad (12.2)$$

где $\bar{v}_x$ — средняя (в данном сечении x) скорость течения пленки; $\nu_{ж}$ — кинематическая вязкость жидкости (конденсата); δ — толщина пленки.

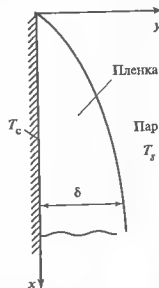


Рис. 12.2. К теории Нуссельта

В качестве характерного размера, входящего в формулу для определения числа Re , принят эквивалентный диаметр, который равен 4δ .

Так как $\bar{v}_x$ и δ — заранее неизвестные величины, то по (12.2) невозможно определить Re и установить режим течения. Обычно соотношение (12.2) преобразуют таким образом, чтобы число Re содержало одну из следующих величин: G_1 — расход конденсата, приходящий на единицу ширины стенки (в случае вертикальной трубы — на единицу длины периметра); $\bar{q}$ — среднего плотность теплового потока на участке стенки $0 \leq x \leq h$, где h — высота стенки; $\bar{T}_c$ — среднюю температуру стенки на указанном выше участке. Учтем, что

$$G_1 = \rho_{ж} \bar{v}_{ж} \delta; \quad \bar{q} h = G_1 r = \bar{\alpha} (T_s - \bar{T}_c) h.$$

Тогда получим

$$Re = \frac{4G_1}{\mu_{ж}} = \frac{4\bar{q}h}{r\mu_{ж}} = \frac{4\bar{\alpha}(T_s - \bar{T}_c)h}{r\mu_{ж}}. \quad (12.3)$$

Опытами установлено, что критическое число $Re_{кр} = 1600$. Теория Нуссельта справедлива (с учетом поправок, о которых будет сказано ниже) при $Re < Re_{кр}$.

Согласно теории Нуссельта, при пленочной конденсации пара теплота, выделяющаяся на границе раздела «пар — жидкость», отводится к стенке за счет теплопроводности жидкости в поперечном направлении. Уравнение теплопроводности и граничные условия записываются в виде:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0; \quad T|_{y=0} = T_c; \quad T|_{y=\delta} = T_s.$$

Решение этой задачи дает линейное распределение температуры по толщине пленки (рис. 12.3). При этом

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (T_s - T_c).$$

Так как $q \propto (T_s - T_c)$, то

$$\alpha = \lambda/\delta. \quad (12.4)$$

Для нахождения δ в данном сечении x составим уравнение теплового баланса:

$$\int_0^x q dx = \rho_{ж} \bar{v}_x \delta r. \quad (12.5)$$

Дифференцируя это уравнение, находим

$$q = \rho_{ж} r \frac{d}{dx} (\bar{v}_x \delta). \quad (12.6)$$

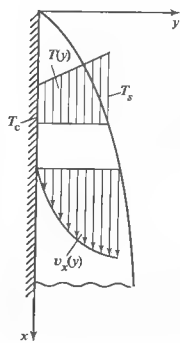


Рис. 12.3. Распределение температуры и скорости в стекающей пленке конденсата

Из (12.6) можно определить δ , но предварительно необходимо рассчитать $\bar{v}_x$. Для этого следует решить уравнение движения для пленки. С учетом принятых допущений это уравнение записывается в виде

$$g(\rho_{ж} - \rho_{п}) + \mu_{ж} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0. \quad (12.6a)$$

Граничные условия будут иметь вид

$$v_x = 0 \quad \text{при } y = 0;$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \delta.$$

Второе граничное условие является следствием того, что при $y = \delta$ силы трения равны нулю. В уравнении движения $\rho_{ж}$ и $\rho_{п}$ — плотности жидкости и пара в состоянии насыщения (при $T = T_s$).

Интегрируя уравнение движения и учитывая граничные условия при нахождении постоянных, получаем параболический закон распределения скорости v_x по толщине пленки (рис. 12.3):

$$v_x = g \frac{\rho_{ж} - \rho_{п}}{\mu_{ж}} \left(y\delta - \frac{1}{2}\delta^2 \right). \quad (12.7)$$

Средняя скорость

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_x dy = \frac{(\rho_{ж} - \rho_{п})g}{3\mu_{ж}} \delta^2. \quad (12.8)$$

В (12.6) положим $q = \lambda_{ж}/\delta \Delta T$, где $\Delta T = T_s - T_c$. Тогда получим

$$\delta^3 d\delta = \frac{\lambda_{ж} v_{ж} \Delta T}{(\rho_{ж} - \rho_{п})gr} dx. \quad (12.9)$$

При $x = 0$ $\delta = 0$. Интегрируя уравнение (12.9), получаем

$$\delta = 4 \sqrt[4]{\frac{\lambda_{ж} v_{ж} \Delta T x}{(\rho_{ж} - \rho_{п})gr}}. \quad (12.10)$$

Из (12.10) следует, что толщина пленки $\delta \sim \Delta T^{1/4}$ и увеличивается с ростом x : $\delta \sim x^{1/4}$. Используя (12.4), получаем формулу Нуссельта для местного коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = 4 \sqrt[4]{\frac{\lambda_{ж}^3 (\rho_{ж} - \rho_{п}) gr}{v_{ж} \Delta T x}}. \quad (12.11)$$

Так как в нашем случае $T_c = \text{const}$, то средний коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$ с учетом (12.11) имеет вид

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha \, dx = \frac{4}{3} \alpha|_{x=h},$$

где $\alpha|_{x=h}$ — коэффициент теплоотдачи в точке $x = h$.

Полагая в (12.11) $x = h$, окончательно получаем формулу Нуссельта для среднего $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = 0,943 \sqrt[4]{\frac{\lambda_{\text{ж}}^3 (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}) g r}{\nu_{\text{ж}} \Delta T h}}. \quad (12.12)$$

Теория пленочной конденсации при переменной температуре T_c была предложена Д.А. Лабунцовым¹.

Проанализируем вопрос о влиянии неизомеричности стенки на $\bar{\alpha}$. Обозначим через $\bar{T}_c$ среднюю температуру стенки:

$$\bar{T}_c = \frac{1}{h} \int_0^h T_c \, dx.$$

Этой температуре соответствует среднеинтегральный температурный напор $\bar{\Delta T} = T_s - \bar{T}_c$. Введем фактор неизомеричности $\psi(x) = \Delta T / \bar{\Delta T}$, где $\Delta T = T_s - T_c$; здесь T_c — местная температура стенки. Очевидно, что

$$\frac{1}{h} \int_0^h \psi(x) \, dx = 1.$$

В уравнении (12.9) положим, что $\Delta T = \bar{\Delta T} \psi(x)$, а затем это уравнение проинтегрируем. В результате получим

$$\delta = \left(\frac{4 \lambda_{\text{ж}} \nu_{\text{ж}} \bar{\Delta T}}{(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}) g r} \right)^{1/4} \left(\int_0^x \psi(x) \, dx \right)^{1/4}. \quad (12.13)$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\bar{q} h = \rho_{\text{ж}} \bar{v}_x \delta r,$$

где значения $\bar{v}_x$ и δ соответствуют сечению $x = h$.

¹ См. статью: Лабунцов Д.А. Обобщение теории конденсации Нуссельта на условия пространственно-неравномерного поля температур теплообменной поверхности // Тр. МЭИ. 1965. Вып. 63.

Имея в виду, что

$$\int_0^h \psi(x) \, dx = h,$$

а $\bar{\alpha} = \bar{q} / \bar{\Delta T}$, после простых преобразований находим

$$\bar{\alpha} = 0,943 \sqrt[4]{\frac{\lambda_{\text{ж}}^3 (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}) g r}{\nu_{\text{ж}} \Delta T h}}. \quad (12.14)$$

Таким образом, мы получили, что формула Нуссельта для $\bar{\alpha}$ справедлива и в том случае, когда температура стенки не постоянна, а зависит от x .

Дальнейшее изучение теории пленочной конденсации (Г.Н. Кружилин, Д.А. Лабунцов) показало, что принятые Нуссельтом допущения в обычных условиях не дают большой погрешности при определении коэффициента теплоотдачи, если безразмерная величина $K = r / (c_p \Delta T) > 5$ и число $\text{Pr} > 1$. Это видно из рис. 12.4, на котором дано сопоставление уточненного значения α со значением $\alpha_{\text{Нб}}$, рассчитанным по теории Нуссельта.

Влияние зависимости свойств жидкости от температуры, согласно Д.А. Лабунцову, можно учесть с помощью поправки

$$\epsilon_T = \frac{\alpha}{\alpha_{\text{Нб}}} = \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{\text{ж}}} \right)^{3/8} \left(\frac{\mu_{\text{ж}}}{\mu_c} \right)^{1/8},$$

где $\alpha_{\text{Нб}}$ — коэффициент теплоотдачи, вычисляемый по формуле Нуссельта (при этом все значения свойств выбираются по T_s); λ_c и μ_c — теплопроводность и вязкость жидкости при $T = T_c$; $\lambda_{\text{ж}}$ и $\mu_{\text{ж}}$ — то же, но при $T = T_s$; для воды при $\Delta T < 50 \text{ K}$ ϵ_T незначительно отличается от единицы.

Формула Нуссельта (12.12) справедлива не только для вертикальной пластины, но и для вертикальной трубы. При $\text{Re} > 4$ она дает заниженные результаты, так как в этом случае наблюдается не чисто ламинарное, а ламинарно-волновое течение (рис. 12.5). При этом оказывается, что средняя во времени толщина пленки и ее термическое сопротивление меньше, чем это получается по теории Нуссельта. По Д.А. Лабунцову, поправка, учитывающая развитие волнового течения, при $\text{Re} \geq 4$

$$\epsilon_v = (\text{Re} / 4)^{0,04}.$$

Последняя формула показывает, что по мере увеличения расхода жидкости (т.е. с увеличением Re) интенсивность волнового возмущения возрастает, а при $\text{Re} = 1600$ $\epsilon_v = 1,27$.

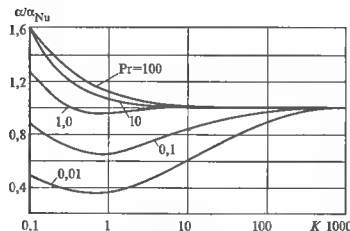


Рис. 12.4. Влияние конвективного переноса теплоты, инерционных сил в пленке и сил трения между пленкой и паром на теплоотдачу при конденсации на вертикальной стенке

Рис. 12.5. Ламинарно-волновое течение пленки конденсата

Для удобства практических расчетов формулу (12.12) с учетом поправки на волновое течение преобразуют к безразмерному виду. При заданном температурном напоре $\bar{\Delta T}$ в качестве безразмерного параметра принимают

$$Z = \frac{\lambda_{ж} \bar{\Delta T} h}{r \mu_{ж} l_g},$$

где

$$l_g = \left(\frac{v_{ж}^2}{g} \frac{\rho_{ж}}{\rho_{ж} - \rho_{п}} \right)^{1/3}. \quad (12.15)$$

Легко доказать, что при этом формула (12.14) с поправкой на волновое течение имеет вид

$$\frac{\bar{\alpha} l_g}{\lambda_{ж}} = 0,95 Z^{-0,22}. \quad (12.16)$$

С учетом (12.3) формулу (12.16) можно представить как

$$\text{Re} = 3,8 Z^{0,78}. \quad (12.17)$$

Если задана плотность теплового потока $\bar{q}$ или расход конденсата G_1 , то число Re — известная величина, а коэффициент теплоотдачи находится так:

$$\frac{\bar{\alpha} l_g}{\lambda_{ж}} = 1,38 \text{Re}^{-0,28}. \quad (12.18)$$

При конденсации *перегретого пара* расчет $\bar{\alpha}$ можно проводить по тем же формулам, что и для сухого насыщенного пара, если заменить в них r



на $r' = r + (h_{п} - h'')$, где $h_{п}$ и h'' — энтальпии перегретого пара и пара в состоянии насыщения, а ΔT оставить без изменения, т.е. $\Delta T = T_c - T_s$. Хотя $\bar{\alpha}$ при конденсации перегретого пара несколько выше, при заданной температуре T_c конденсата образуется меньше, так как

$$G = \frac{\bar{\alpha} (T_s - T_c) F}{r + (h_{п} - h'')}.$$

Коэффициент теплоотдачи для *влажного пара* (при влажности менее 20 %) рассчитывается по тем же формулам, что и для сухого насыщенного пара без внесения каких-либо изменений в них.

Если скорость пара мала, то он не оказывает заметного влияния на стекание пленки конденсата, и коэффициент теплоотдачи подчиняется закономерностям, справедливым для неподвижного пара. Однако при больших скоростях влияние пара на пленку становится существенным, причем оно зависит от того, в каком направлении движется пар. Если пар движется сверху вниз, то за счет действия сил трения на поверхности пленки скорость ее течения увеличивается, а толщина уменьшается. Это приводит к увеличению коэффициента теплоотдачи. Кроме того, при больших скоростях пара критическое значение числа Re уменьшается и переход к турбулентному режиму течения пленки происходит раньше, чем в случае неподвижного пара. Если пар движется снизу вверх, то при постепенном увеличении скорости сначала силы трения тормозят течение пленки, а затем, когда силы тяжести уже становятся меньше сил трения, пленка потоком пара увлекается вверх и частично срывается с поверхности стенки. В соответствии с этим коэффициент теплоотдачи с ростом скорости пара сначала уменьшается, а затем, пройдя через минимум, увеличивается.

Сделаем теоретическую оценку влияния на α сил трения на границе «пар — пленка». Рассмотрим случай, когда пар движется сверху вниз и его скорость такова, что силы трения много больше сил тяжести. Тогда уравнение движения пленки примет вид

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0. \quad (12.19)$$

Граничные условия представляются как

$$v_x|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=\delta} = \frac{\sigma_{п}}{\mu_{ж}}, \quad (12.20)$$

где $\sigma_{п}$ — касательное напряжение на поверхности пленки.

Интегрируя дважды (12.19), с учетом (12.20) получаем линейный закон изменения v_x по толщине пленки:

$$v_x = \frac{\sigma_n}{\mu_{ж}} y.$$

Средняя скорость пленки

$$\bar{v}_x = \frac{\sigma_n}{2\mu_{ж}} \delta. \quad (12.21)$$

Подставим (12.21) в (12.6) и проинтегрируем полученное уравнение. Окончательно имеем:

$$\delta = \left(\frac{3\lambda_{ж}\Delta T\mu_{ж}x}{\rho_{ж}\sigma_n} \right)^{1/3};$$

$$\alpha = \left(\frac{\lambda_{ж}^2\rho_{ж}r\sigma_n}{3\Delta T\mu_{ж}x} \right)^{1/3}$$

Значение σ_n приближенно можно найти, зная коэффициент сопротивления c_f при обтекании плоской поверхности:

$$\sigma_n = c_f \frac{\rho_n v_n^2}{2},$$

где ρ_n и v_n — плотность и скорость пара.

Отметим, что как в рассмотренном примере, так и ранее мы не учитывали влияния, обусловленные существованием плотности поперечного потока массы на границе раздела фаз. Обычно эти напряжения малы, однако в случае «сильной» конденсации (при больших значениях f) они могут играть существенную роль.

12.3. Конденсация пара на вертикальной стенке при смешанном режиме течения пленки

При стекании пленки конденсата скорость $\bar{v}_x$ и ее толщина δ с увеличением координаты x возрастают, следовательно, возрастает и число Re.

При больших числах Re ламинарно-волновое движение пленки становится неустойчивым, и при $Re = Re_{кр}$ оно переходит в турбулентное. Смена режимов сказывается как на дальнейшем росте δ , так и на поведении α . При $x > x_{кр}$ толщина пленки растет быстрее, чем при ламинарном течении, а α при этом увеличивается (рис. 12.6).



Рис. 12.6. Характер изменения толщины пленки и коэффициента теплоотдачи при конденсации пара на вертикальной стенке, высота которой $h > x_{кр}$

Основная причина увеличения α при $x > x_{кр}$ заключается в том, что значительная часть общего термического сопротивления (за исключением малых чисел Pr, что характерно для жидких металлов) сосредоточена в вязком подслое, а его толщина δ_v с ростом Re уменьшается.

Рассмотрим особенности определения толщины пленки δ и δ_v при турбулентном течении. В непосредственной близости к стенке распределение скорости в турбулентном потоке подчиняется «закону стеики», согласно которому v_x зависит только от локальных условий (координаты y), касательного напряжения на стенке σ_c и вязкости ν . Если ввести динамическую скорость

$$v_* = \sqrt{\sigma_c / \rho},$$

то для «закона стеики» справедлива функциональная зависимость

$$v_x / v_* = f(\eta),$$

где безразмерная координата

$$\eta = v_* y / \nu. \quad (12.22)$$

Для двухслойной схемы Прандтля координата $y = \delta_v$ соответствует $\eta_b = 11.7$. Обобщим уравнение движения пленки (см. § 12.2) на тот случай, когда в ней существует турбулентность. Это уравнение можно записать в виде

$$g(\rho - \rho'') + \frac{d\sigma}{dy} = 0,$$

где $\sigma = (\mu + \mu_t) \frac{dv_x}{dy}$; здесь μ_t — турбулентная вязкость.

Интегрируя последнее уравнение при условии, что пар движется медленно, для напряжения трения σ получаем

$$\sigma = g(\rho - \rho'')(\delta - y),$$

где ρ и ρ'' — плотности жидкости и пара.

При $y = 0$ $\sigma = \sigma_c$. Следовательно,

$$v_* = \sqrt{\frac{g\delta(\rho - \rho'')}{\rho}}.$$

Подставляя последнее соотношение в (12.22) (с учетом $y = \delta_v$), получаем

$$\delta = \eta_b^{2/3} \left[\frac{\mu^2}{\rho(\rho - \rho'')g} \right]^{1/3} = \eta_b^{2/3} l_g.$$

Безразмерная толщина пленки $\eta_\delta = v_* \delta / \nu$ однозначно связана с числом Re, так как

$$Re = 4 \frac{\bar{v}_x \delta}{\nu} = 4 \frac{\bar{v}_x}{v_*} \frac{v_* \delta}{\nu} = 4 \frac{\bar{v}_x}{v_*} \eta_\delta.$$

Если принять, что распределение скорости в пленке подчиняется логарифмическому закону, то для определения η_δ можно получить формулу

$$Re = \eta_\delta (12 + \ln \eta_\delta) - 160.$$

Пренебрегая теплотой переохлаждения конденсата, можно записать формулу для плотности теплового потока q в турбулентно стекающей пленке:

$$q = (\lambda + \lambda_T) \frac{dT}{dy}.$$

Здесь λ — теплопроводность жидкости, а λ_T — турбулентная теплопроводность. В нашем случае q не зависит от y .

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя его на отрезке от 0 до δ , с учетом того, что при $y = 0$ $T = T_c$, а при $y = \delta$ $T = T_s$, получаем

$$T_s - T_c = q \int_0^\delta \frac{dy}{\lambda + \lambda_T}.$$

Поскольку $\alpha = q/(T_s - T_c)$, то при $\lambda = \text{const}$ будем иметь

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta \int_0^\delta \frac{dy}{1 + \lambda_T/\lambda}}. \quad (12.23)$$

Так как мы уже знаем, как найти δ , то вся сложность определения α теперь заключается в вычислении интеграла в знаменателе (12.23). Поскольку отношение λ_T/λ сложным образом зависит от y , получение формулы для α возможно только численным методом.

Формула Лабунцова, аппроксимирующая результаты численного интегрирования (12.23) в диапазоне $1 \leq \text{Pr} \leq 25$ и $6 \cdot 10^3 \leq \text{Re} \leq 3 \cdot 10^4$, имеет вид

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = 0,023 \text{ Re}^{0,25} \text{ Pr}^{0,5}. \quad (12.24)$$

В (12.24) α — местный коэффициент теплоотдачи, который можно найти, если задано число Re. При этом должны быть известны либо средняя плотность теплового потока на участке стенки, расположенном выше рассматриваемого сечения, либо расход сконденсировавшегося пара.

Обычно на практике наблюдается смешанный режим течения пленки. В этом случае в верхней части стенки ($0 \leq x \leq x_{\text{кр}}$) течение ламинарное и ламинарно-волновое, а в нижней — турбулентное. Вообще говоря, турбулентные возмущения в пленке развиваются постепенно, поэтому существует некоторая переходная зона, закономерности теплообмена в которой изучены недостаточно. Для инженерных расчетов важно знать средний коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$ при смешанном режиме течения пленки. Метод расчета $\bar{\alpha}$ был предложен Д.А. Лабунцовым (1957 г.). Рассмотрим сущность этого метода.

В уравнении (12.6) произведение $\bar{u}_x \delta$ выразим через число Re с помощью (12.2):

$$\bar{u}_x \delta = \frac{v_{\text{ж}} \text{Re}}{4},$$

а также учтем, что $q = \alpha \Delta T$, где $\Delta T = T_s - T_c$ представляет собой местный температурный напор. Тогда (12.6) запишется в виде

$$\frac{4 \Delta T}{r \mu_{\text{ж}}} dx = \frac{d \text{Re}}{\alpha}. \quad (12.25)$$

Теперь введем $\psi(x) = \Delta T / \Delta \bar{T}$, где $\Delta \bar{T} = T_s - \bar{T}_c$. С учетом этого проинтегрируем (12.25) по x от нуля до h :

$$\frac{4 \Delta \bar{T}}{r \mu_{\text{ж}}} \int_0^h \psi(x) dx = \int_0^h \frac{d \text{Re}}{\alpha}. \quad (12.26)$$

Интеграл в левой части равен h . Верхний предел интегрирования в правой части следует заменить на число Re в сечении $x = h$. Так как

$$\frac{4 \Delta \bar{T} h}{r \mu_{\text{ж}}} = \frac{4 q h}{r \mu_{\text{ж}} \alpha} = \frac{\text{Re}}{\alpha},$$

то вместо (12.26) будем иметь

$$\frac{\text{Re}}{\alpha} = \int_0^{\text{Re}} \frac{d \text{Re}}{\alpha}. \quad (12.27)$$

Для того, чтобы найти $\bar{\alpha}$ из (12.27), область интегрирования следует разбить на две части. При этом в первой части ($0 \leq \text{Re} \leq 1600$) интеграл в (12.27) можно не вычислять, так как известно, что для $\bar{\alpha}$ справедлива формула (12.18), т.е.

$$\frac{\text{Re}}{\alpha} = 0,725 \frac{l}{\lambda_{\text{ж}}} \text{Re}^{1,28} = 0,725 \cdot 1600^{1,28} \frac{l}{\lambda_{\text{ж}}} = 9150 \frac{l}{\lambda_{\text{ж}}}. \quad (12.27a)$$

Примем, что для второй части ($\text{Re} > 1600$) справедлива формула (12.24). Следовательно,

$$\frac{\text{Re}}{\alpha} = 43,5 \frac{l}{\lambda_{\text{ж}}} \text{Pr}^{-0,5} \int_{1600}^{\text{Re}} \text{Re}^{-1/4} d \text{Re} = 58 \frac{l}{\lambda_{\text{ж}}} \text{Pr}^{-0,5} (\text{Re}^{3/4} - 253). \quad (12.27b)$$

Складывая (12.27а) и (12.27б), получаем формулу Лабунцова для смешенного режима стекания пленки:

$$\frac{\bar{\alpha} l_g}{\lambda_{ж}} = \frac{Re}{9150 + 58 Pr^{-0.5} (Re^{3/4} - 253)}. \quad (12.28)$$

Формула (12.28) используется в расчетах теплообменных аппаратов при $Re > 1600$. Если $Re \leq 1600$, то для расчета $\bar{\alpha}$ применяется формула (12.18). Значения физических свойств жидкости при этом выбираются по температуре T_s . Число Re определяется по расходу конденсата, который можно найти из уравнения теплового баланса.

В некоторых случаях считается известной температура $\bar{T}_c$, следовательно, задана величина Z . Тогда формулу (12.28) следует преобразовать с учетом того, что

$$\frac{\bar{\alpha} l_g}{\lambda_{ж}} = \frac{Re}{4Z}.$$

Избавляясь от комплекса $\bar{\alpha} l_g / \lambda_{ж}$ в левой части (12.28), получаем формулу, в которой число Re является искомой величиной:

$$Re = [253 + 0,069 Pr^{0.5} (Z - 2300)]^{4/3}. \quad (12.29)$$

Формула (12.29) справедлива при $Z \geq 2300$. Зная число Re , можно получить $\bar{\alpha}$, $\bar{q}$ или расход конденсата, воспользовавшись (12.3).

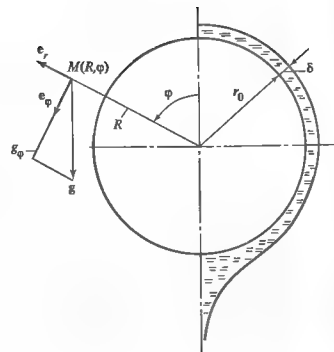
12.4. Конденсация пара на наружной поверхности горизонтальных труб

Теория пленочной конденсации неподвижного пара на одиночной трубе. Рассмотрим длинную горизонтальную трубу диаметром $d = 2r_0$, находящуюся в пространстве, занятом сухим насыщенным паром, температура насыщения которого T_s . Примем, что температура стенки трубы $T_c = \text{const}$, причем $T_c < T_s$. Так как толщина пленки $\delta \ll r_0$, то аналогично случаю плоской стенки $\alpha = \lambda / \delta$. В цилиндрических координатах $\delta = \delta(\varphi)$ (рис. 12.7).

Уравнение для определения δ имеет вид (12.6) с той лишь разницей, что $x = \varphi r_0$, а $\bar{v}_x = \bar{v}_\varphi$, где $\bar{v}_\varphi$ — проекция v на направление e_φ (рис. 12.7). С учетом сказанного выше толщину δ будем находить в результате решения уравнения

$$\frac{\lambda_{ж}}{\delta} \Delta T r_0 = \rho_{ж} r \frac{d}{d\varphi} (\bar{v}_\varphi \delta). \quad (12.30)$$

Рис. 12.7. К постановке задачи о конденсации пара на поверхности горизонтальной трубы



Скорость $\bar{v}_\varphi$ определяем после решения уравнения движения для компонент скорости v_φ . Так как $\delta \ll r_0$, то это уравнение будет иметь вид (12.6а), где y — координата, отсчитываемая от поверхности трубы, а g равно g_φ — проекции вектора g на направление e_φ , причем $g_\varphi = g \sin \varphi$. Граничные условия будут такими же, как и в задаче Нуссельта, поэтому (см. § 12.2) сразу можно записать

$$\bar{v}_\varphi = \frac{1}{3} \frac{(\rho_{ж} - \rho_{п}) g_\varphi}{\mu_{ж}} \delta^2.$$

Подставляя полученное выражение для $\bar{v}_\varphi$ в (12.30), получаем

$$\delta d(\delta^3 \sin \varphi) = A d\varphi, \quad (12.31)$$

где

$$A = \frac{3 \lambda_{ж} v_{ж} \Delta T r_0}{(\rho_{ж} - \rho_{п}) r g}. \quad (12.31а)$$

Обозначим $f = f(\varphi) = \sin \varphi$ и введем новую неизвестную функцию $u = f^{1/3} \delta$. После умножения левой и правой частей (12.31) на $f^{1/3}$ получим

$$3u^3 du = A f^{1/3} d\varphi. \quad (12.32)$$

При $\varphi = 0$ $u = 0$. Интегрируя (12.32), приходим к выражению

$$u = \left(\frac{4}{3} A \int_0^\varphi f^{1/3} d\varphi \right)^{1/4},$$

откуда следует формула для δ :

$$\delta = \left(\frac{4}{3}A\right)^{1/4} \frac{1}{f^{1/3}} \left(\int_0^\varphi f^{1/3} d\varphi\right)^{1/4}. \quad (12.33)$$

Можно найти δ при $\varphi = 0$. Для этого следует учесть, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^\varphi \sin^{1/3} \varphi d\varphi\right)^{1/4}}{\sin^{1/3} \varphi} = \frac{\left(\int_0^\varphi \varphi^{1/3} d\varphi\right)^{1/4}}{\varphi^{1/3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}$$

Из (12.33) получаем $\delta_{\varphi=0} = A^{1/4}$. Зависимость $\delta = \delta(\varphi)$ можно найти численным интегрированием (12.33). Расчеты показывают, что заметный рост δ наблюдается при $\varphi > \pi/2$.

Местный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\lambda_{ж}}{\delta} = \lambda_{ж} \left(\frac{3}{4A}\right)^{1/4} f^{1/3} \left(\int_0^\varphi f^{1/3} d\varphi\right)^{-1/4}$$

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha d\varphi = \frac{\lambda_{ж}}{\pi} \left(\frac{3}{4A}\right)^{1/4} B, \quad (12.34)$$

где

$$B = \int_0^\pi \left(\int_0^\varphi f^{1/3} d\varphi\right)^{-1/4} f^{1/3} d\varphi.$$

Пусть $z = \int_0^\varphi f^{1/3} d\varphi$. Тогда $dz = f^{1/3} d\varphi$, а (если $z_1 = z$ при $\varphi = \pi$)

$$B = \int_0^{z_1} z^{-1/4} dz = \frac{4}{3} z_1^{3/4}.$$

Вычислим z_1 , предварительно заметив, что

$$z_1 = \int_0^\pi \sin^{1/3} \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \varphi d\varphi.$$

Последний интеграл можно найти с помощью гамма-функций, так как известно, что

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^{2\alpha+1} x)(\cos^{2\beta+1} x) dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

В нашем случае $\alpha = -(1/3)$, $\beta = -(1/2)$.

Тогда

$$z_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} = 2,5874.$$

Теперь из (12.34) с учетом (12.31а) получается формула для среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации пара на наружной поверхности горизонтальной трубы:

$$\bar{\alpha} = 0,7284 \sqrt[4]{\frac{\lambda_{ж}^3 (\rho_{ж} - \rho_{п}) g r}{\nu_{ж} \Delta T d}}. \quad (12.35)$$

Формула (12.35) (но с коэффициентом 0,725) получена Нуссельтом. Значение коэффициента 0,728 является более точным. Это значение получено Д.А. Лабунцовым (см. сноску § 12.2). Им же показано, что при $q_c = \text{const}$

$$\bar{\alpha} = 0,6934 \sqrt[4]{\frac{\lambda_{ж}^3 (\rho_{ж} - \rho_{п}) g r}{\nu_{ж} (T_s - \bar{T}_c) d}}, \quad (12.36)$$

где $\bar{T}_c$ — средняя интегральная температура стенки.

Напомним, что, вычислив $\bar{\alpha}$ по (12.36), можно определить $\bar{q} = \bar{\alpha}(T_s - \bar{T}_c)$. Физические свойства жидкости, входящие в формулы (12.35) и (12.36), рекомендуется относить к T_s и при этом учитывать поправку ϵ_T (см. § 12.2), т.е. $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{\text{Нш}} \epsilon_T$, где $\bar{\alpha}_{\text{Нш}}$ рассчитывается по (12.35) или (12.36).

Конденсация на пучке горизонтальных труб. Случай конденсации на одиночной горизонтальной трубе на практике встречается редко. Обычно теплообменный аппарат состоит из большого числа труб. Например, в конденсаторе паровой турбины насчитывается 10 000—15 000 горизонтально расположенных труб. Коэффициент теплоотдачи для трубы, находящейся в пучке, зависит от места ее расположения. Если труба находится внутри пучка, то на нее попадет конденсат, образующийся на трубах, находящихся выше. На данной трубе образуется также «собственный» конденсат, в результате чего с увеличением номера ряда труб происходит увеличение толщины пленки конденсата (рис. 12.8, а), что приводит к умень-

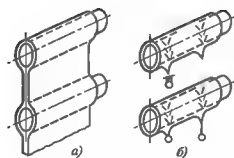


Рис. 12.8. Упрощенная (а) и действительная (б) картины стекания пленки конденсата в элементе пучка горизонтальных труб

шению коэффициента теплоотдачи. Однако конденсат стекает не непрерывно, а каплями (рис. 12.8, б), что создает возмущения в пленке на трубе нижестоящего ряда и увеличивает интенсивность теплообмена.

Как для одиночной трубы, так и для пучка труб существенное влияние на конденсацию оказывает скорость пара. В теплообменниках с цилиндрическим корпусом скорость пара при его движении сверху вниз изменяется как за счет уменьшения расхода пара (пар постепенно превращается в жидкость), так и за счет изменения проходного сечения. В результате теплоотдача для труб нижних рядов оказывается ниже, чем для труб, расположенных в верхних рядах.

Выше рассматривался вопрос о том, как влияет наличие воздуха в паре на теплообмен при его конденсации. Напомним, что, чем больше концентрация воздуха, тем меньший тепловой поток отводится через поверхность охлаждения. При движении паровоздушной смеси сверху вниз концентрация воздуха больше (следовательно, интенсивность теплообмена меньше) для труб нижних рядов пучка.

Коэффициент теплоотдачи при конденсации практически неподвижного пара на горизонтальном пучке труб приблизительно можно определить следующим образом [45].

Сначала формулу Нуссельта для одиночной трубы преобразуем к безразмерному виду. Для этого учтем, что расход конденсата, приходящий на единицу длины трубы,

$$G_1 = \frac{q\pi d}{r}.$$

Тогда температурный напор

$$\Delta T = \frac{G_1 r}{\pi d \alpha}.$$

Подставляя последнее соотношение для ΔT в формулу Нуссельта, получаем

$$\frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} = 1,52 \left(\frac{4G_1}{\mu} \right)^{-1/3}. \quad (12.37)$$

Согласно некоторым опытным данным, соотношение (12.37) можно применить к любой трубе в пучке, если под G_1 понимать расход конденсата, стекающего с данной трубы. Последний нетрудно рассчитать путем последовательного определения расхода конденсата, стекающего с каждой трубы.

Для пояснения метода расчета теплоотдачи рассмотрим случай, когда температура поверхности всех труб задана. В действительности эта температура неизвестна, ее находят, рассматривая процесс передачи теплоты от пара к охлаждающей жидкости с учетом термических сопротивлений стенок и теплоотдачи на внутренней поверхности трубы.

Сначала по формуле Нуссельта определяем α_1 для труб первого ряда, а затем находим расход конденсата

$$G_1^{(1)} = \frac{\bar{\alpha}_1 \pi d (T_s - T_{c1})}{r}.$$

Расход конденсата, образующегося на трубе второго ряда, определяется аналогично:

$$G_1^{(2)} = \frac{\bar{\alpha}_2 \pi d (T_s - T_{c2})}{r}. \quad (12.38)$$

Теперь в (12.37) следует подставить значение $\bar{\alpha}$, найденное по (12.38).

При этом в (12.37) $G_1 = G_1^{(1)} + G_1^{(2)}$. В результате получаем уравнение, из которого легко найти $G_1^{(2)}$. Таким же образом решаем задачу для третьего и всех последующих рядов.

Если скорость пара, входящего в теплообменный аппарат высока, то надо вводить поправку

$$\epsilon_v = 1,4 \left[\frac{v_n^2 (T_s - T_c) \lambda}{g d r \mu} \right]^{0,05}. \quad (12.39)$$

Если обозначить коэффициент теплоотдачи для неподвижного пара через α_0 , а для движущегося пара через α , то $\alpha = \alpha_0 \epsilon_v$. Скорость пара v_n в (12.39) соответствует самому узкому сечению потока; эта формула применима, если $\alpha/\alpha_0 < 1,7$.

Отметим, что существуют и другие методы расчета процесса конденсации на горизонтальном пучке труб.

12.5. Теплообмен при конденсации пара в трубах

Качественное описание процесса. Рассмотрим случай, когда в охлаждаемую вертикальную трубу поступает перегретый пар. Пусть в результате процесса теплопередачи от пара к охладителю на входном участке устано-

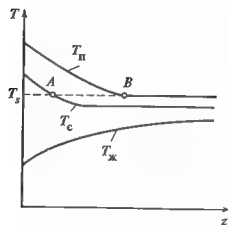


Рис. 12.9. Схема изменения температур пара, стенки и охлаждающей жидкости при конденсации в трубе

вводится такое распределение температуры стенки трубы, что во всех точках этого участка $T_c > T_s$. Тогда это будет участок однофазного потока. Конденсация начнется тогда, когда температура T_c станет равной (или несколько ниже) температуре T_s . Начиная с точки A (рис. 12.9) на стенке трубы будет образовываться пленка конденсата, а

в точке B температура пара станет равной T_s . На пленку действуют как сила тяжести, так и сила трения на границе раздела фаз. Сила трения, которая характеризуется касательным напряжением на поверхности раздела фаз σ_n , зависит от скорости движения пара. Поскольку расход пара G_n по мере продвижения по трубе уменьшается (расход конденсата G_k соответственно растет), то $\sigma_n = f(z)$, где z — продольная координата.

Отношение расхода пара G_n в данном сечении трубы к расходу смеси $G = G_n + G_k$ называется расходным массовым паросодержанием x , т.е. $x = G_n / G$. При полной конденсации пара на выходе из трубы $x = 0$, при частичной конденсации $x > 0$. Касательное напряжение σ_n (т.е. скорость пара) оказывает существенное влияние на характер поведения пленки конденсата на стенке трубы. Если силы тяжести, действующие на пленку, соизмеримы с силами трения, то движение конденсата будет зависеть от ориентации трубы в пространстве, а в случае вертикального расположения и от того, в какую сторону (сверху вниз или снизу вверх) движется пар. Если пар движется снизу вверх с малой скоростью, конденсат свободно стекает вниз по стенке трубы. С повышением скорости пара наступает момент, когда стекание конденсата периодически задерживается потоком пара, и часть конденсата отделяется от поверхности трубы. При определенной скорости пара конденсат не вытекает из нижнего сечения трубы, а остается в ее объеме. С повышением скорости возникает восходящий поток смеси пара и конденсата.

Если пар поступает в вертикальную трубу сверху, то в верхней части трубы течение пленки ламинарное, а начиная с точки $z = z_{кр}$ (z — продольная координата) оно переходит в турбулентное. Координата точки перехода зависит от критического числа Рейнольдса пленки конденсата $Re_{кр}$. Если для неподвижного пара $Re_{кр} = 1600$, то с увеличением σ_n $Re_{кр}$ резко снижается. Имеются данные [45], которые говорят о том, что при значениях безразмерного касательного напряжения

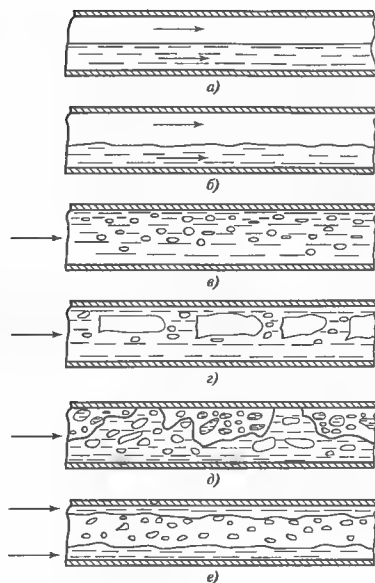


Рис. 12.10. Режимы течения парожидкостной смеси в горизонтальной трубе

а — расслоенный; б — волновой; в — пузырьковый; г — сырный; д — эмульсионный; е — дисперсно-кольцевой

$$\sigma_n^+ = \frac{\rho \sigma_n}{[\rho(\rho - \rho'')\mu g]^{2/3}},$$

больших 9, число $Re_{кр} = 50$, а в области $0 < \sigma_n^+ < 9$ $Re_{кр}$ уменьшается, причем

$$Re_{кр} = 1600 - 226\sigma_n^+ + 0,667(\sigma_n^+)^3.$$

При конденсации пара, движущегося в горизонтальной трубе, в зависимости от его скорости могут иметь место различные режимы течения парожидкостной смеси: дисперсно-кольцевой, кольцевой, расслоенный и другие (рис. 12.10). Если скорость входящего в трубу пара высока, то

на начальном участке трубы наблюдается кольцевой или дисперсно-кольцевой режим течения. При этом конденсат на стенке образует кольцевую пленку, а в ядре потока движется пар, в котором содержатся капли конденсата, оторвавшегося от поверхности пленки. С увеличением координаты z скорости пара, как отмечалось выше, падает, что приводит к преобладающему влиянию на пленку силы тяжести: пленка по внутренней поверхности трубы стекает вниз, где и накапливается конденсат, образуя ручей, который движется в продольном направлении совместно с потоком пара. Образование зоны медленно движущейся по нижней части трубы жидкости является причиной появления асимметричного изменения α по периметру и уменьшения среднего $\bar{\alpha}$.

Теплоотдача при конденсации в трубах. Если на поверхности трубы задана средняя плотность теплового потока, то с инженерной точки зрения задача сводится к отысканию расхода пара, который конденсируется в трубе. Эта задача решается просто. Действительно, запишем уравнение теплового баланса для элемента трубы длиной dz :

$$-qndz = rdG_{\text{п}} \quad (12.40)$$

где q — местная плотность теплового потока; знак «минус» указывает на то, что теплота отводится.

Проинтегрируем (12.40) по z от 0 до l (l — длина трубы), а по $G_{\text{п}}$ от $G_{\text{п.вх}} = x_{\text{вх}}G$ до $G_{\text{п.вых}} = x_{\text{вых}}G$. Тогда получим

$$\bar{q}ndl = rG(x_{\text{вх}} - x_{\text{вых}}).$$

При полной конденсации поступающего в трубу сухого насыщенного пара

$$\bar{q}ndl = rG.$$

Однако на практике ни $\bar{q}$, ни $\bar{T}_c$ заранее не известны, поэтому для решения задачи нужно рассматривать процесс теплопередачи в целом, т.е. учитывать термическое сопротивление стенки и интенсивность теплоотдачи на наружной поверхности трубы (там, где находится охладитель). В этом случае нужно знать коэффициент теплоотдачи на стороне конденсата. В принципе, располагая данными по σ_n и формулами, учитывающими влияние σ_n на α (см. § 12.2), можно найти локальные значения α внутри трубы. Касательное напряжение σ_n можно определить либо по гидравлическому сопротивлению парожидкостного потока, либо по коэффициенту трения на межфазной границе.

Расчетную формулу для α можно получить также, опираясь на аналогично Рейнольдса¹. Пусть, например, имеется случай, когда влияние силы тяжести не сказывается на парожидкостном потоке и на большей части длины трубы режим движения пленки конденсата турбулентный. Если к тому же скорость пара такова, что происходит интенсивный срыв конденсата в ядро потока и обратный процесс переноса капелек жидкости к стенке, т.е. наблюдается интенсивное перемешивание конденсата в пленке, то при этом в результате теоретического анализа можно получить

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \left(\frac{\rho'}{\rho_{\text{см}}} \right)^{1/2},$$

где α_0 — коэффициент теплоотдачи для однофазного турбулентного потока жидкости в данной трубе, причем расход этой жидкости (конденсата) равен G ; ρ' и $\rho_{\text{см}}$ — плотность жидкости и средняя плотность парожидкостной смеси в данном сечении трубы.

При известном расходе массовом паросодержании

$$\frac{\rho'}{\rho_{\text{см}}} = 1 + \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x.$$

Средний коэффициент теплоотдачи (усредненный по всей длине трубы)

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_0} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho'}{\rho_{\text{см}}} \right)_{\text{вх}}^{1/2} + \left(\frac{\rho'}{\rho_{\text{см}}} \right)_{\text{вых}}^{1/2} \right]. \quad (12.41)$$

Соотношение (12.41) подтверждено опытами на трубе длиной 2,5 м при давлении пара от 1,2 до 9 МПа как при полной ($x_{\text{вх}} = 1$, $x_{\text{вых}} = 0$), так и при частичной ($x_{\text{вх}} = 1$, $x_{\text{вых}} = 0,2 \dots 0,5$) конденсациях, а также опытами на трубе длиной 12 м при давлениях 6 и 9 МПа при полной конденсации пара. Тепловые потоки в опытах изменялись от $1,6 \cdot 10^5$ до $1,6 \cdot 10^6$ Вт/м².

12.6. Капельная конденсация

Капельная конденсация происходит в том случае, когда жидкость плохо смачивает поверхность охлаждения (краевой угол $\theta > 90^\circ$). Интенсивность теплообмена при капельной конденсации гораздо выше, чем при пленочной, поэтому разрабатываются методы получения капельной конденсации в технических устройствах. К таким методам относится покрытие поверхности особыми веществами — гидрофобизаторами (например, покрытие тефлоном), которое обеспечивает плохую смачиваемость поверхности. По-

¹ См. статью: Бойко Л.Д., Кружилин Г.Н. Теплопередача при конденсации пара в трубе // Изв. АН СССР. Сер. энергетика и транспорт. 1966. № 5. С. 113—128.

добные вещества можно добавлять также непосредственно в паровое пространство (или в поток пара).

Капелька жидкости, появившаяся в объеме пара, будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия, если ее радиус равен критическому радиусу, определяемому по формуле

$$R_{кр} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_{ж}\Delta T},$$

где $\Delta T = T_s - T_{np}$; здесь T_s — температура насыщения при данном давлении, а T_{np} — температура пара.

Если радиус капельки $R < R_{кр}$, ее существование в объеме пара невозможно; если $R > R_{кр}$, она растет. Центрами конденсации на охлаждаемой поверхности обычно являются микронеровности (впадинки). В первом приближении значение переохлаждения пара, необходимое для начала конденсации, можно найти из условия, что радиус устья впадины должен быть больше $R_{кр}$. В более точных расчетах необходимо учесть поправку на расклинивающее давление [10]. Расчеты показывают, что при переохлаждении поверхности на 0,1—0,3 °C на площади 1 см² число образующихся капелек составляет около 10⁶—10⁸. Капли быстро растут как за счет конденсации, так и за счет слияния с другими каплями. Достигнув большого размера, они скатываются по поверхности, отрываются или уносятся потоком пара.

Для обобщения опытных данных по теплоотдаче при капельной конденсации В.П. Исаченко [10, 11] предложил следующие комплексы:

$$Nu = \frac{\alpha R_{кр}}{\lambda_{ж}}; \quad Re_* = \frac{\lambda_{ж}\Delta T}{r\mu_{ж}}; \quad Pr = \frac{\nu_{ж}}{d_{ж}}; \quad \Pi_k = \frac{2\xi\sigma^2 T_s}{r\rho_{ж}^2\nu_{ж}^2}; \quad \xi = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right).$$

$$\text{При } Re_* = 3,3 \cdot 10^{-3} \dots 3,5 \cdot 10^{-2}$$

$$Nu = 5 \cdot 10^{-6} Re_*^{-1,57} \Pi_k^{1,16} Pr^{1/3},$$

$$\text{а при } Re_* = 8 \cdot 10^{-4} \dots 3,3 \cdot 10^{-3}$$

$$Nu = 3,2 \cdot 10^{-4} Re_*^{-0,84} \Pi_k^{1,16} Pr^{1/3}.$$

На коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации существенное влияние оказывают такие факторы, как наличие в паре неконденсирующихся газов и теплопроводность стенки (при конденсации на медной поверхности α в 2—3 раза больше, чем на стальной).

Для приближенной оценки интенсивности теплообмена при конденсации чистого водяного пара на медной поверхности ($t_s = 100$ °C) можно

принять $\alpha \approx 250\,000$ Вт/(м² · K). При $20 < t_s < 100$ °C $\alpha = 50\,000 + 2000t_s$ (см. [45]). Ввиду больших значений α в процессе капельной конденсации в теплообменных аппаратах значение теплового потока определяется термическим сопротивлением со стороны охлаждающей жидкости, а также сопротивлениями стенки и возможных оксидных пленок. Следует учитывать также сопротивление фазового перехода.

12.7. Задачи с решениями

Задача 1. На вертикальной стенке ($t_c = 80$ °C) конденсируется сухой насыщенный водяной пар ($p = 0,101$ МПа). Определите $x_{кр}$ — координату точки перехода от ламинарного течения пленки конденсата к турбулентному. Найдите также толщину пленки δ , коэффициент теплоотдачи α , среднюю скорость пленки $\bar{v}_x$ в сечении $x = x_{кр}$ и количество образующегося в единицу времени (в расчете на единицу ширины стенки) конденсата на участке $0 \leq x \leq x_{кр}$.

Решение. В точке $x = x_{кр}$ $Z = 2300$. Обозначим

$$A = \left[\frac{g(\rho_{ж} - \rho_{п})}{\nu_{ж}^2 \rho_{ж}} \right]^{1/3} \frac{\lambda_{ж}}{r\mu_{ж}}.$$

При $t_s = 100$ °C для воды $\rho_{ж} = 958$ кг/м³; $\lambda_{ж} = 0,677$ Вт/(м · K); $\mu_{ж} = 2,82 \cdot 10^{-4}$ Па · с; $\nu_{ж} = 0,295 \cdot 10^{-6}$ м²/с. При той же температуре $\rho_{п} = -0,597$ кг/м³; $r = 2257$ кДж/кг. С учетом этих данных $A = 51,69$ 1/(м · K).

Так как $Z = A\Delta t x$ ($\Delta t = t_s - t_c$), то

$$x_{кр} = \frac{2300}{51,69(100 - 80)} = 2,22 \text{ м.}$$

Толщину пленки найдем по теоретической формуле Нуссельта:

$$\delta = \left(\frac{4 \cdot 0,677 \cdot 2,82 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 2,22}{2257 \cdot 10^3 \cdot 958(958 - 0,597) \cdot 9,8} \right)^{1/4} = 2,02 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Определим теоретическое значение α при $x = x_{кр}$:

$$\alpha = \frac{0,677}{2,02 \cdot 10^{-4}} = 3352 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{K)}.$$

Скорость течения пленки

$$\bar{v}_x = \frac{(958 - 0,597) \cdot 9,8(2,02 \cdot 10^{-4})^2}{3 \cdot 2,82 \cdot 10^{-4}} = 0,45 \text{ м/с.}$$

Теоретический расход конденсата рассчитаем двумя способами:

$$G = \rho_{\text{ж}} \bar{v}_x \delta = 958 \cdot 0,45 \cdot 2,02 \cdot 10^{-4} = 0,087 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)};$$

$$G = \frac{\bar{\alpha} \Delta t_{\text{кр}}}{r} = \frac{4}{3} \frac{3352 \cdot 20 \cdot 2,22}{2257 \cdot 10^3} = 0,087 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}.$$

Действительный расход конденсата $G = 1600 \mu_{\text{ж}}/4 = 0,113 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}.$

Ответ. $\delta = 0,202 \text{ мм}$; $\alpha = 3352 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$; $\bar{v}_x = 0,45 \text{ м/с}$; $G = 0,087 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$ — теоретическое значение и $G = 0,113 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$ — действительное значение с учетом поправки на волновое течение пленки.

Задача 2. Снаружи вертикальной трубы диаметром $25 \times 1 \text{ мм}$ и длиной $1,8 \text{ м}$ находится сухой насыщенный водяной пар с давлением $0,101 \text{ МПа}$. Внутри трубы протекает вода. Тепловой поток, отводимый водой, составлял $17\,500 \text{ Вт}$. Найдите среднюю температуру наружной поверхности трубы.

Решение. Средняя плотность теплового потока на наружной поверхности трубы

$$\bar{q} = \frac{17\,500}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 1,8} = 1,24 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2.$$

Определяем число Re пленки конденсата:

$$Re = 4 \frac{1,24 \cdot 10^5 \cdot 1,8}{2257 \cdot 10^3 \cdot 2,82 \cdot 10^{-4}} = 1403.$$

Режим течения пленки ламинарно-волновой. При этом

$$l_g = \left(\frac{(2,82 \cdot 10^{-4})^2}{958(958 - 0,597) \cdot 9,8} \right)^{1/3} = 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\bar{\alpha} = 1,39 \frac{0,677}{3,63 \cdot 10^{-3}} \cdot 1403^{-0,29} = 3260 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Температура стенки

$$\bar{t}_c = 100 - \frac{1,24 \cdot 10^5}{3,26 \cdot 10^3} = 62 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ответ. Температура стенки $\bar{t}_c = 62 \text{ }^\circ\text{C}.$

Задача 3. На вертикальной трубе диаметром $d = 40 \text{ мм}$ и высотой $h = 6 \text{ м}$ конденсируется сухой насыщенный водяной пар ($t_s = 180 \text{ }^\circ\text{C}$). Температура стенки трубы постоянна: $t_c = 175 \text{ }^\circ\text{C}$. Найдите количество пара G'_2 , конденсирующегося в единицу времени на участке трубы $2 \leq x \leq 4 \text{ м}$, и отношение G'_2/G , где G — расход конденсата, образующегося на всей трубе.

Решение. При $t_s = 180 \text{ }^\circ\text{C}$ $\rho_{\text{ж}} = 886,9 \text{ кг/м}^3$; $\rho_{\text{п}} = 5,157 \text{ кг/м}^3$; $\mu_{\text{ж}} = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\nu_{\text{ж}} = 0,173 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda_{\text{ж}} = 0,674 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $r = 2015 \text{ кДж/кг}$; $Pr_{\text{ж}} = 1,04$. При этом (см. задачу 1) $A = 150 \text{ 1/(м} \cdot \text{К)}$. При $x = 2 \text{ м}$ $Z_1 = 150(180 - 175) \cdot 2 = 1500$. Число Рейнольдса пленки для $x = 2 \text{ м}$

$$Re_1 = 3,8 \cdot 1500^{0,78} = 1141.$$

Расход пара, сконденсировавшегося на участке $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$,

$$G_1 = \frac{1141 \cdot 1,53 \cdot 10^{-4} \pi \cdot 0,04}{4} = 5,48 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}.$$

При $x = 4 \text{ м}$ $Z_2 = 3000$. Тогда

$$Re_2 = [253 + 0,069(3000 - 2300)]^{4/3} = 2019$$

и расход пара на участке $0 \leq x \leq 4 \text{ м}$ $G_2 = 9,70 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}.$

Следовательно,

$$G'_2 = G_2 - G_1 = 4,22 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}.$$

При $x = 6 \text{ м}$ $Z_3 = 4500$. Тогда

$$Re_3 = [253 + 0,069(4500 - 2300)]^{4/3} = 2994$$

и расход пара для всей трубы $G = 14,38 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}$. Отношение $G'_2/G = 4,22/14,38 = 0,29$.

Ответ. $G'_2 = 4,22 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}$; $G'_2/G = 0,29$.

Задача 4. Дана труба с наружным диаметром $d = 30 \text{ мм}$ и длиной $l = 2,22 \text{ м}$. Найдите $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ — коэффициенты теплоотдачи при конденсации водяного пара ($p = 0,101 \text{ МПа}$) в случае горизонтального и вертикального расположения трубы. Температура $t_c = 80 \text{ }^\circ\text{C}$.

Решение. По формуле Нуссельта

$$\bar{\alpha}_1 = 0,728 \left(\frac{0,677^3 \cdot 958(958 - 0,597) \cdot 2257 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{2,82 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 0,03} \right)^{1/4} = 13\,900 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Из задачи 1 следует, что в нашем случае $Re = Re_{\text{кр}} = 1600$. Тогда

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{1600 \cdot 2257 \cdot 10^3 \cdot 2,82 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 20 \cdot 2,22} = 5734 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Ответ. При горизонтальном расположении трубы $\bar{\alpha}_1 = 13\,900 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, а при вертикальном $\bar{\alpha}_2 = 5734 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Задача 5. Найдите среднюю температуру стенки вертикально расположенной трубы, в которой конденсируется водяной пар при давлении $p_n = 1,55$ МПа, если известно, что $x_{вх} = 0,8$, $x_{вых} = 0,4$, $d = 16$ мм, $l = 2,5$ м, $\bar{q} = 1,3$ МВт/м².

Решение. При $p_n = 1,55$ МПа $t_s = 200$ °С. При этой температуре $\rho = 864,8$ кг/м³; $\rho'' = 7,865$ кг/м³; $r = 1938$ кДж/кг; $\lambda = 0,665$ Вт/(м·К); $\mu = 1,334 \cdot 10^{-4}$ Па·с; $Pr = 0,9$.

Расход смеси

$$G = \frac{1,3 \cdot 10^6 \pi \cdot 0,016 \cdot 2,5}{1938 \cdot 10^3 (0,8 - 0,4)} = 0,227 \text{ кг/с.}$$

Определяем число Рейнольдса для воды:

$$Re = \frac{\bar{v}d}{\nu} = \frac{4G}{\pi d \mu} = \frac{4 \cdot 0,227}{\pi \cdot 0,016 \cdot 1,334 \cdot 10^{-4}} = 1,33 \cdot 10^5.$$

По формуле Петухова (см. § 10.3) находим коэффициент теплоотдачи для воды при $Re = 1,33 \cdot 10^5$: $\alpha_0 = 10 580$ Вт/(м²·К).

Вычисляем отношение ρ'/ρ для входа и выхода из трубы:

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)_{вх} = 1 + \frac{864,8 - 7,865}{7,865} 0,8 = 88;$$

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)_{вых} = 1 + \frac{864,8 - 7,865}{7,865} 0,4 = 44.$$

Находим средний коэффициент теплоотдачи при конденсации пара в трубе:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot 10 580 (\sqrt{88} + \sqrt{44}) = 84 900 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Искомая температура стенки

$$\bar{t}_c = t_s - \frac{\bar{q}}{\bar{\alpha}} = 200 - \frac{1,3 \cdot 10^6}{84,9 \cdot 10^4} = 184,7 \text{ °С.}$$

Ответ. Средняя температура стенки $\bar{t}_c = 184,7$ °С.

Задача 6. В вертикальной трубе ($d = 30$ мм) конденсируется водяной пар при давлении $p_n = 2,32$ МПа. На входе скорость пара $v_n = 28$ м/с, а расходное массовое паросодержание $x_{вх} = 1$. Средняя температура стенки $\bar{t}_c = 180$ °С. При какой длине трубы будет обеспечена полная конденсация пара? Найдите скорость конденсата на выходе из трубы.

Решение. При $p_n = 2,32$ МПа $t_s = 220$ °С. При этой температуре $\rho = 840,6$ кг/м³; $\rho'' = 11,62$ кг/м³; $r = 1856$ кДж/кг; $\lambda = 0,65$ Вт/(м·К); $\mu = 1,334 \cdot 10^{-4}$ Па·с; $Pr = 0,86$.

Вычисляем расход пара на входе в трубу:

$$G_n = 11,62 \cdot 28 \frac{\pi}{4} \cdot 0,03^2 = 0,228 \text{ кг/с.}$$

Следовательно, для расчета α_0 $G = G_n$ и число Рейнольдса для воды

$$Re = \frac{4 \cdot 0,228}{\pi \cdot 0,03 \cdot 1,334 \cdot 10^{-4}} = 7,76 \cdot 10^4.$$

По формуле Петухова находим, что при $Re = 7,76 \cdot 10^4$ $\alpha_0 = 3686$ Вт/(м²·К).

Вычисляем отношение $(\rho'/\rho)_{вх}$:

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)_{вх} = 1 + \frac{840,6 - 11,62}{11,62} = 72,3.$$

На выходе $x_{вых} = 0$ и $(\rho'/\rho)_{вых} = 1$. Вычисляем средний коэффициент теплоотдачи при конденсации пара в трубе:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot 3686 (\sqrt{72,3} + 1) = 17 500 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

С учетом того, что $\bar{q} = \bar{\alpha}(t_s - \bar{t})$, искомая длина трубы

$$l = \frac{0,228 \cdot 1856 \cdot 10^3}{17 500 \pi \cdot 0,03 (220 - 180)} = 6,4 \text{ м.}$$

Скорость конденсата на выходе из трубы

$$v_{к,вых} = \frac{4 \cdot 0,228}{840,6 \pi \cdot 0,03^2} = 0,38 \text{ м/с.}$$

Ответ. Длина трубы $l = 6,4$ м. Скорость конденсата $v_{к,вых} = 0,38$ м/с.

Задача 7. На наружной поверхности вертикально расположенной латунной трубы с диаметром и толщиной стенки $d_2 \times \delta = 19 \times 1,5$ мм конденсируется сухой насыщенный водяной пар ($p_s = 1,55$ МПа, $t_s = 200$ °С). По трубе сверху вниз протекает вода, расход которой $G = 0,12$ кг/с. Давление воды $p = 2,0$ МПа, ее температура на входе в трубу $t_0 = 120$ °С, а на выходе из нее $t_{вых} = 180$ °С. Найдите высоту трубы.

Решение. Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи $\bar{\alpha}_2$ со стороны пара воспользуемся формулами, выведенными в § 12.2 и 12.3. С помощью этих формул можно найти среднюю плотность теплового потока

$\bar{q}_2 = \bar{\alpha}_2(t_s - \bar{t}_{c2})$, где $\bar{t}_{c2}$ — средняя температура наружной поверхности трубы. Со стороны воды $\bar{q}_1 = \bar{\alpha}_1(\bar{t}_{c1} - \bar{t}_v)$, где $\bar{t}_v$ — средняя температура воды. При этом $\bar{q}_1 \pi d_1 = \bar{q}_2 \pi d_2 = \bar{q}_l$ и, кроме того, $\bar{q}_l = 2\pi\lambda(\bar{t}_{c2} - \bar{t}_{c1}) / \ln(d_2/d_1)$. Так как закон изменения температуры воды вдоль оси трубы неизвестен, то $\bar{t}_v$ рассчитать невозможно. Однако приближенно можно считать, что на небольшом участке трубы температура воды изменяется по линейному закону. Заданную разность температур $t_{вмх} - t_0$ разобьем на n равных частей. Обозначим $t_n = t_{вмх}$. Тогда для малого участка трубы $\Delta t = (t_n - t_0)/n$. Пусть h_1 — длина первого (начиная отсчет сверху) участка; h_2 — сумма длин первого и второго участков; h_3 — сумма длин первого, второго и третьего участков и т.д. Тогда $h_n = h$, где h — искомая высота трубы. Соответственно $\bar{t}_{v1}$ — средняя температура воды на первом участке; $\bar{t}_{v2}$ — то же на суммарной длине первого и второго участков и т.д. При этом $\bar{t}_{v1} = 0,5(t_0 + t_1)$, где t_1 — температура воды в конце первого участка. Если произвольное число малых участков равно k , то

$$\bar{t}_{vk} = \frac{\bar{t}_{vk-1}h_{k-1} + 0,5(t_{vk-1} + t_{vk})(h_k - h_{k-1})}{h_k}.$$

Будем последовательно находить $h_1, h_2, \dots, h_n$. Для воды при ее средней температуре $t_v = 0,5(120 + 180) = 150$ °C $c_p = 4,309$ кДж/(кг·K); $\lambda = 0,682$ Вт/(м·K); $\mu = 1,82 \cdot 10^{-4}$ Па·с; $Pr = 1,15$. Число $Re = 52466$, а число Нуссельта (по формуле Петухова с учетом поправки ϵ_r) $Nu = 132,9$. Тогда для воды $\bar{\alpha}_v = 5664$ Вт/(м·K). Принимая для латуни $\lambda = 100$ Вт/(м·K), находим

$$\rho_k = \frac{1}{\alpha_v d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_k d_2} = 0,0107 + \frac{52,6}{\alpha_k},$$

где $\bar{\alpha}_k$ — средний коэффициент теплоотдачи при конденсации пара.

Величина $\bar{q}_{lk} = \pi(t_s - \bar{t}_{vk})/\rho_k$, а $\bar{Q}_k = \bar{q}_{lk}h_k$. В то же время

$$\bar{Q}_k = 0,12 \cdot 4309 k \Delta t = 517 k \Delta t \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Обозначим $\psi_k = 0,5(t_{k-1} + t_k)$. Для расчета h_k получаем формулу

$$h_k = \frac{\bar{Q}_k \Phi_k / \pi + (\bar{t}_{k-1} - \psi_k) h_{k-1}}{(t_s - \psi_k)},$$

где $k \geq 2$.

Значение h_1 определяем из уравнения $517 \Delta t = \pi(200 - \bar{t}_{v1}) h_1 / \Phi_1$.

Для расчета $\bar{\alpha}_k$ из таблиц свойств воды и водяного пара находим (при $t_s = 200$ °C):

$$\rho' = 864,8 \text{ кг/м}^3; \rho'' = 7,865 \text{ кг/м}^3; \mu = 1,334 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}; \nu = 0,1543 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \\ \lambda = 0,665 \text{ Вт/м} \cdot \text{K}; Pr = 0,9; r = 1938 \text{ кДж/кг} \cdot \text{K}.$$

С учетом этих данных $l_g = 1,348 \cdot 10^{-5}$ м, а для пленки

$$Re_k = \frac{4\bar{Q}_k}{\mu r \pi d_2} = 0,2593 \bar{Q}_k = 134,1 k \Delta t.$$

Если $Re_k \leq 1600$, то

$$\bar{\alpha}_k = 1,38 \frac{\lambda}{l_g} Re_k^{-0,28} = 68079 \cdot Re_k^{-0,28}.$$

Если $Re_k > 1600$, то

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\lambda}{l_g} \frac{Re_k}{9200 + 58 Pr^{-0,5} (Re_k^{0,75} - 253)} = \frac{49332 Re_k}{9200 - 60,9 (Re_k^{0,75} - 253)}.$$

Принимаем $n = 30$. С помощью компьютера находим $h = 3,77$ м.

Ответ. Высота трубы $h = 3,77$.

ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ

13.1. Основные сведения о механизме парообразования

При кипении жидкости коэффициенты теплоотдачи могут достигать высоких значений. Это позволяет поддерживать большие тепловые нагрузки при температурах поверхности нагрева, незначительно отличающихся от температуры кипения. На практике встречаются два случая кипения: кипение в большом объеме (в условиях свободной конвекции парожидкостной смеси) и кипение при вынужденном движении (кипение жидкости в трубах). Первый случай широко распространен в быту, в промышленности и энергетике он соответствует условиям работы различных испарителей и некоторых типов парогенераторов АЭС. Кипение при вынужденном движении осуществляется в процессе преобразования воды в пар в области экранных поверхностей нагрева топок паровых котлов, работающих при докритических давлениях. Способ отвода теплоты из активной зоны ядерного реактора с помощью движущейся по каналам кипящей воды используется также на АЭС.

На интенсивность теплообмена при кипении оказывает влияние целый ряд факторов, не поддающихся строгому теоретическому анализу. Поэтому закономерности теплоотдачи при кипении в основном получают опытным путем. Чтобы распространить результаты экспериментов на возможно большее число процессов кипения, при получении обобщающих формул часто используются различные гипотезы (модели), основанные на физических представлениях о кипении.

Условия, необходимые для образования пара в объеме жидкости. Хотя термин «кипение» ясен, его определение таково: кипением называется процесс образования пара внутри объема жидкости, нагретой выше температуры насыщения. Возникновение свободных поверхностей раздела жидкой и паровой фаз внутри жидкости является характерной особенностью процесса кипения.

Из курса термодинамики известно, что если имеются две фазы какого-либо вещества и они вступают в контакт друг с другом, то вещество будет переходить в ту фазу, химический потенциал которой меньше. У перегретой жидкости, т.е. жидкости, находящейся в метастабильном состоянии, химический потенциал больше, чем у пара. Поэтому перегретая жидкость стремится превратиться в пар. Важно отметить, что это превращение возможно только тогда, когда жидкость соприкасается с паровой фазой. Дру-

гими словами, чтобы перегретая жидкость закипела, в ней должны быть зародыши паровой фазы (центры парообразования).

В идеальных условиях жидкость можно значительно перегреть относительно температуры насыщения, и при этом она кипеть не будет. Этот перегрев не безграничный, и максимальное его значение зависит от рода жидкости и от давления. В конце концов жидкость вскипает самопроизвольно: центры парообразования возникают в результате флуктуаций плотности из-за теплового движения молекул. Температура предельного перегрева $T_{пе}$ может быть найдена [45] из эмпирической формулы

$$T_{пе0} = 0,905 + 0,095 T_{s0}^8,$$

где $T_{пе0} = T_{пе}/T_{кр}$, К; $T_{s0} = T_s/T_{кр}$, К; (здесь $T_{кр}$ — критическая температура, К).

Для воды при атмосферном давлении из этой формулы получим: $T_{пе} = 583 \text{ К} - 310 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Ясно, что в реальных условиях вода закипает не за счет образования центров кипения из-за флуктуаций плотности, а вследствие наличия таковых в объеме (пылинки, растворенный газ) или на поверхности нагрева. Вскипание жидкости в объеме возникает при резком сбросе давления, под которым находится жидкость. Однако наиболее распространен тот случай, когда зарождение паровой фазы происходит на поверхности нагрева. Это объясняется тем, что на поверхности практически всегда имеются готовые центры парообразования и, кроме того, около поверхности жидкости больше всего перегрева.

Критический радиус пузырька. Радиус пузырька пара, $R_{кр}$, находящегося в состоянии неустойчивого термодинамического равновесия с окружающей жидкостью, называется *критическим*. Если радиус пузырька $R > R_{кр}$ пузырек растет, если $R < R_{кр}$ его существование в объеме жидкости невозможно, т.е. если он каким-то образом и возник, то тут же исчезнет (сконденсируется). Следовательно, критический радиус есть минимально возможный радиус жизнеспособного пузырька.

Как известно из курса физики, на каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, которые быстро убывают с расстоянием. Если выделить молекулу внутри жидкости, то силы со стороны молекул, заключенных в сфере молекулярного действия, оказываются в среднем скомпенсированными (результатирующая сила равна нулю). Если же молекула находится на расстоянии от поверхности, меньшем радиуса сферы молекулярного действия, то равнодействующая сил, приложенных к молекуле, не равна нулю и направлена внутрь жидкости. Это объясняется тем, что концентрация молекул в паре (или газе) меньше, чем в жидкости. В результате поверхностный слой оказывает на жидкость давление, называемое молекулярным. Молекулы, перемещающиеся в поверхностный слой за счет своей кинетической энергии, совершают работу против сил молекулярного давления. Уменьшение кинетической энергии этих молекул сопровождается увеличением их потенциальной энергии. Следовательно, молекулы поверхно-

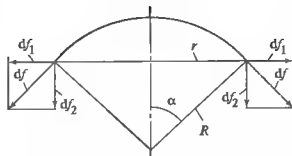


Рис. 13.1. К выводу формулы Лапласа

ность шара минимальна, этим объясняется тот факт, что пузырьки пара имеют сферическую форму.

Поверхностная энергия характеризуется поверхностным натяжением σ , Н/м, — силой, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность. Силы поверхностного натяжения направлены по касательной к поверхности и перпендикулярно к участку контура, на который они действуют. Значение σ различно для разных жидкостей; оно уменьшается с увеличением температуры и давления. Присоедин поверхностно-активных веществ значительно уменьшают σ .

Если поверхность жидкости не плоская, а выпуклая, то поверхностное натяжение приводит к появлению избыточного давления поверхности на жидкость. Если же поверхность вогнутая, то избыточное давление направлено в противоположную сторону.

Представим теперь в объеме жидкости пузырек пара радиусом R . Отсечем мысленно шаровой сегмент, опирающийся на окружность радиусом $r = R \sin \alpha$ (рис. 13.1). На каждый элемент окружности длиной dl действует сила поверхностного натяжения $f = \sigma d\ell$, которую можно разложить на две силы: f_1 и f_2 . Геометрическая сумма сил f_1 равна нулю, поэтому равнодействующая сил поверхностного натяжения перпендикулярна плоскости сечения и направлена внутрь пузырька. Избыточное давление Δp легко рассчитать. Сила $f_2 = \sigma dl \sin \alpha = \sigma dl \frac{r}{R}$. Для всего контура $f_2 = \frac{2\sigma \pi r^2}{R}$. Раз-

делив на площадь основания шарового сегмента с учетом $\Delta p = \frac{f_2}{\pi r^2}$ получим

$$\Delta p = 2\sigma/R. \quad (13.1)$$

Формула (13.1) является частным случаем формулы Лапласа, определяющей избыточное давление для произвольной поверхности двойкой кривизны:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости ($R > 0$, если центр кривизны находится внутри жидкости, и $R < 0$, если он вне жидкости).

Для сферической поверхности $R_1 = R_2 = R$, для цилиндрической $R_1 = R$ и $R_2 = \infty$, для плоской $R_1 = R_2 = \infty$ (силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают).

ного слоя обладают дополнительной потенциальной энергией (она называется поверхностной энергией), которая пропорциональна площади слоя.

Равновесное состояние, как известно, характеризуется минимумом потенциальной энергии. Поэтому поверхность жидкости (при отсутствии внешних сил) будет стремиться к сокращению. Поскольку при заданном объеме поверхности

Рассмотрим теперь случай, когда $p_n = p_{ж} + 2\sigma/R$, когда пузырек будет находиться в состоянии равновесия с окружающей жидкостью. При этом жидкость должна быть перегрета относительно T_s при ее давлении (здесь T_s соответствует плоской поверхности раздела фаз). Действительно, в условиях равновесия, когда $T_n = T_{ж}$, число молекул, падающих в единицу времени на плоскую границу раздела фаз, равно числу молекул, вылетающих из жидкости за то же время. Так как в пузырьке давление больше, чем в жидкости, то поток молекул из жидкости должен быть больше того, который имел бы место для плоской поверхности. Это возможно только путем увеличения $T_{ж}$ сверх T_s . Другими словами, перегрев жидкости обусловлен тем, что $T_n = T_s(p_n)$, а для равновесия необходимо, чтобы $T_{ж} = T_n$.

Обозначим радиус пузырька при равновесии фаз через $R_{кр}$. Тогда, если не учитывать зависимость p_s от кривизны поверхности раздела фаз, в формуле (13.1)

$$\Delta p = \left(\frac{dp}{dT} \right)_s \Delta T,$$

причем $(dp/dT)_s$ определяется формулой Клапейрона — Клаузиуса.

Уточненное значение Δp найдем по формуле

$$\Delta p = \left(\frac{dp}{dT} \right)_s \Delta T - \frac{2\sigma v''}{(v'' - v')R_{кр}}. \quad (13.2)$$

Если учесть, что $v' = 1/\rho'$, $v'' = 1/\rho''$, то из совместного рассмотрения (13.1), (13.2) и формулы Клапейрона — Клаузиуса

$$R_{кр} = \frac{2\sigma T_s}{\rho'' r \Delta T}. \quad (13.3)$$

Оценим $R_{кр}$ для пузырька водяного пара при $p = 1,2 \cdot 10^{-3}$ МПа ($t_s = 10^\circ \text{C}$) и $p = 21$ МПа ($t_s = 370^\circ \text{C}$):

$$R_{кр} = \frac{2 \cdot 741,6 \cdot 10^{-6} \cdot 283}{9,39 \cdot 10^{-3} \cdot 2477} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$R_{кр} = \frac{2 \cdot 4,71 \cdot 10^{-4} \cdot 643}{203 \cdot 438,4 \cdot 10^3} = 6,8 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Равновесие пузырька пара в перегретой жидкости неустойчиво. Малейшие отклонения T и p от равновесных значений приводят либо к росту,

либо с исчезновением пузырька. Действительно, пусть, например, слегка возрастет, а затем быстро вернется к прежнему значению температура $T_{ж}$. Тогда за отрезок времени, когда температура жидкости повышалась, давление пара в пузырьке (вследствие дополнительного испарения) увеличится, что приведет к нарушению механического равновесия. Пузырек начнет расти, а давление в нем (в соответствии с формулой Лапласа) будет уменьшаться. При более низком давлении температура пара в пузырьке будет ниже той, которая была ранее в состоянии равновесия. Хотя температура $T_{ж}$ уже вернулась к прежнему значению, пар в пузырьке уже не тот: его температура ниже. Перепад температур $T_{ж} - T_{п}$ приведет к следующему акту испарения, в результате пузырек будет неограниченно расти.

Рассуждая аналогично, легко доказать, что при незначительном отрицательном всплеске температуры $T_{ж}$ (т.е. при ее уменьшении) наш пузырек сконденсируется. Сконденсируется также случайно возникший пузырек с радиусом $R < R_{кр}$ (в нем $T_{п} > T_{ж}$), в то время как случайно возникший пузырек, у которого $R > R_{кр}$, будет расти.

Неустойчивость равновесия пузырька пара в перегретой жидкости можно объяснить с позиции термодинамики, используя понятие химического потенциала. В самом деле, при равновесии, когда $R = R_{кр}$, $\varphi(p_{п}, T) = \varphi_{ж}(p_{ж}, T)$, где $p_{п}$ и $p_{ж}$ — давления пара и жидкости; $\varphi_{п}$ и $\varphi_{ж}$ — соответствующие химические потенциалы. Если в результате малого возмущения окажется, что $R < R_{кр}$, то, как это следует из формулы Лапласа, давление пара в пузырьке повысится, химический потенциал паровой фазы станет больше. Так как более устойчива та фаза, у которой φ меньше, то начнется конденсация пара, которая приведет к дальнейшему отклонению от состояния равновесия и в конечном счете к исчезновению пузырька. Если окажется, что $R > R_{кр}$, процесс фазового перехода пойдет в другую сторону, и пузырек будет неограниченно расти.

Температуру перегрева жидкости, необходимую для существования пузырька радиусом $R_{кр}$, как указывалось выше, можно определить по формуле (13.3). При выводе этой формулы предполагалось, что ΔT — малая величина. Для невысоких давлений можно вывести формулу, которая будет справедлива и для больших значений ΔT . При малых давлениях r_{ϕ} — приблизительно постоянная величина, а пар можно считать идеальным газом. Тогда уравнение Клапейрона—Клаузиуса примет вид

$$\frac{dP}{dT} = \frac{r_{\phi} P}{T_s \bar{R} T_s},$$

где r_{ϕ} — теплота фазового перехода (теплота парообразования); T_s — температура насыщения при давлении $p_{ж}$; $\bar{R}$ — газовая постоянная (для пара).

Разделяя в последнем уравнении переменные p и T и интегрируя, получаем

$$\ln \frac{p_{п}}{p_{ж}} = \frac{r_{\phi}}{T_s \bar{R} T_s} (T_{п} - T_s).$$

Из уравнения Лапласа имеем

$$\frac{p_{п}}{p_{ж}} = 1 + \frac{2\sigma}{R_{кр} p_{ж}}.$$

Тогда соотношение, связывающее между собой критический радиус пузырька с $T_{п}$, T_s , будет иметь вид

$$T_{п} - T_s = \frac{\bar{R} T_s T_{п}}{r_{\phi}} \ln \left(1 + \frac{2\sigma}{R_{кр} p_{ж}} \right).$$

При выводе последней формулы зависимость $p_{ж}$ от радиуса кривизны поверхности раздела фаз (ввиду ее малости в рассматриваемом случае) не учитывалась.

Скорость роста пузырька. Если радиус пузырька $R = R_{кр}$, то, как указывалось выше, пузырек находится в состоянии механического равновесия. Если радиус $R > R_{кр}$, механическое равновесие нарушается и пузырек растет под действием перепада давлений $p_{п} - p_{ж}$, который расходуется на преодоление инерции жидкости и сил поверхностного натяжения. В процессе роста пузырька температура $T_{п}$ и давление пара $p_{п}$ в пузырьке изменяются с течением времени, причем, как показывает анализ, в большинстве случаев зависимость между $p_{п}$ и $T_{п}$ подчиняется уравнению Клапейрона—Клаузиуса. Другими словами, температура пара в пузырьке во всех точках равна температуре насыщения при давлении $p_{п}$. Так как давление $p_{п}$ во время роста пузырька меньше, чем в том случае, когда его радиус $R = R_{кр}$, то $T_{п} < T_{ж}$ и в области жидкости, примыкающей к пузырьку, возникает градиент температуры, за счет которого происходит подвод теплоты, расходуемой на испарение жидкости.

В общем случае скорость роста пузырька в неограниченном объеме жидкости должна определяться в результате решения уравнения движения поверхности раздела фаз и уравнения энергии с учетом уравнения теплового баланса.

Предположим, что $T_{п} = T_{ж}$. Это условие приближенно выполняется для пузырьков малых размеров при низких давлениях, когда процесс испарения протекает с большой скоростью и не требуется больших градиентов температуры для испарения жидкости. Эта модель роста пузырька называется динамической (задача о росте пузырька является чисто механической, так как отпадает необходимость нахождения $T_{п}$, а давлению $p_{п}(T_{п}) = p_{п}(T_{ж})$, т.е. является постоянной величиной). Чтобы решить указанную задачу, можно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии, применив ее для движущейся жидкости. Если предположить, что объем жидкости не ограничен и считать, что в начальный момент времени радиус

пузырька $R = 0$, то изменение кинетической энергии жидкости за отрезок времени

$[0, \tau]$ будет равно $\rho_{ж}/2 \int_0^R v^2 dV$, где R — радиус пузырька в момент времени τ ;

$dV = 4\pi r^2 dr$ (r — текущий радиус); v — скорость движения жидкости. При $r = R$ $v = dR/d\tau$. Из уравнения неразрывности нетрудно найти, что

$$v = \frac{dR}{d\tau} \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Таким образом, изменение кинетической энергии $E_{кин}$ за отрезок времени $[0, \tau]$ определяется по формуле

$$\Delta E_{кин} = \frac{\rho_{ж}}{2} \int_0^R \left[\frac{dR}{d\tau} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]^2 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho_{ж} \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 R^3.$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии следует:

$$2\pi \rho_{ж} \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 (p_n - p_{ж}),$$

или

$$\frac{dR}{d\tau} = \left[\frac{2(p_n - p_{ж})}{3\rho_{ж}} \right]^{1/2}. \quad (13.4)$$

Из (13.4) видно, что в рассмотренном частном случае скорость роста пузырька постоянна, а его радиус возрастает прямо пропорционально времени. Формула (13.4) была получена Релеем (1917 г.). Отметим, что разность давлений в (13.4) может быть представлена как $\Delta p = p_s(T_{\infty}) - p_{\infty}$, где $p_s(T_{\infty})$ — давление насыщения при температуре жидкости T_{∞} вдали от пузырька; p_{∞} — действительное давление в жидкости вдали от пузырька. Обозначим $\Delta T = T_{\infty} - T_s(p_{\infty})$. Тогда на основании уравнения Клапейрона—Клаузиуса с учетом того, что давление мало, можно записать

$$\Delta p = \frac{r_{ф} p_{ж}}{T_s^2 R} \Delta T. \quad (13.5)$$

Области высоких давлений приближенно соответствует энергетическая (тепловая) модель роста пузырька. В этом случае скорость роста пузырька относительно мала, вследствие чего инерция жидкости вносит незначительный вклад в динамику роста пузырька. Поэтому можно принять, что $p_n = p_{ж}$. Скорость роста пузырька находится из уравнения теплового баланса:

$$4\pi R^2 \lambda_{ж} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} d\tau = \rho_n 4\pi R^2 dR r_{ф},$$

где $R = R(\tau)$ — радиус пузырька; r — текущий радиус.

Из последнего уравнения получим

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{\lambda_{ж}}{\rho_n r_{ф}} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

Для нахождения производной $(\partial T/\partial r)_{r=R}$ необходимо решить уравнение энергии. Решение показывает, что

$$R/\sqrt{a_{ж}\tau} = f(Ja),$$

где Ja — число Якоба;

$$Ja = \frac{\rho_{ж} c_{пж} \Delta T}{r_{ф} \phi_{рп}}.$$

При $Ja \ll 1$

$$R/\sqrt{a_{ж}\tau} = \sqrt{2} Ja,$$

а при $Ja \gg 1$

$$R/\sqrt{a_{ж}\tau} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} Ja.$$

Зарождение и рост пузырьков на поверхности нагрева. Явление смачиваемости оказывает влияние на образование паровой фазы на поверхности нагрева. Обычно центрами парообразования являются микронеровности (впадинки) поверхности. Во впадинках практически всегда находится газ или пар. Данная впадинка будет активным центром парообразования только в том случае, если при заполнении жидкостью сосуда содержащийся в ней газ не растворится в жидкости, а останется во впадинках. Как видно из рис. 13.2, а, если стенки впадинки смачиваются жидкостью, то поверхностное натяжение способствует проникновению жидкости. Впадинка на рис. 13.2, б при нагреве поверхности, когда давление пара, находящегося в ней, повысится, будет представлять собой активный центр парообразования. В этом центре будут возникать пузырьки, если радиус его устья больше $R_{кр}$. Активными центрами парообразования могут быть также микронеровности «резервуарного» типа (рис. 13.2, в).

При наличии воздуха в паровом пузырьке значение температуры перегрева жидкости ΔT , необходимое для образования паровой фазы, уменьша-

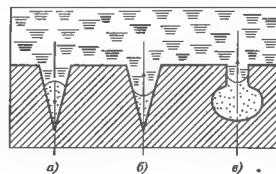


Рис. 13.2. Центры парообразования

а — жидкость смачивает впадинку; б, в — жидкость не смачивает впадинку (в — центр «резервуарного» типа); стрелкой показано направление действия лапласового давления

ется. Это непосредственно следует из того, что температура перегрева жидкости в (13.3) пропорциональна разности парциального давления пара и давления жидкости.

Наблюдения показывают, что под растущим пузырьком существует тонкий микрослой жидкости. Д.А. Лабунцов теоретически обосновал тот факт, что именно испарение этого микрослоя и обеспечивает (за исключением небольших давлений) рост пузырька. На основании анализа размерностей с учетом того, что теплоемкость жидкости, а также ее вязкость не существенны для роста пузырька на поверхности, он вывел формулу

$$R = A \sqrt{\frac{\lambda_{ж} \Delta T}{r \rho_n}} \tau, \quad (13.6)$$

где числовой коэффициент $A = 3,5$ получен на основании опытных данных.

Формулу (13.6) можно представить в виде

$$R / \sqrt{a_{ж} \tau} = \sqrt{12} Ja.$$

При малых давлениях существенным становится подвод теплоты к растущему пузырьку от всей окружающей пузырек жидкости. Формула скорости роста пузырька, справедливая в широком интервале изменения давлений (или чисел Ja), была получена В.В. Ягвым:

$$R / \sqrt{a_{ж} \tau} = \gamma Ja + \sqrt{\gamma^2 Ja^2 + 12} Ja,$$

где $\gamma = \sin^2 \theta [(1 + \cos \theta)^2 (2 - \cos \theta)]^{-1}$; здесь θ — краевой угол.

Рост пузырька, образовавшегося на поверхности, продолжается до момента его отрыва. В зависимости от давления форма растущих пузырьков различна. При высоких давлениях, когда скорость роста и ускорение относительно малы, преобладающей формой пузырька является сферическая; при атмосферном давлении наблюдаются сферические, сплюснутые и полусферические пузырьки; в области низких давлений — преимущественно полусферические.

Как было показано Д.А. Лабунцовым, при достаточно высоких давлениях отрыв пузырька аналогичен отрыву газового пузырька, медленно вдуваемого через отверстие диаметром d . Тогда диаметр пузырька, отрывающегося от поверхности,

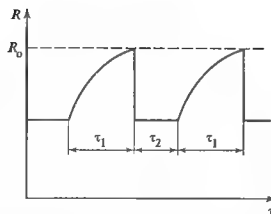
$$D_0 = 1,8 \left[\frac{\sigma d_0}{g(\rho_{ж} - \rho_n)} \right]^{1/3},$$

где d_0 — характерный размер микрошероховатостей поверхности нагрева.

Согласно опытным данным, отрывной диаметр пузырька при кипении воды с увеличением давления уменьшается. При $p = 0,1$ МПа $D_0 = 2$ мм, при $p = 10$ МПа $D_0 = 0,2$ мм, а при $p = 0,02$ МПа $D_0 = 10$ мм.

Рис. 13.3. Схема изменения радиуса пузырька, растущего в центре парообразования

τ_1 — время роста; τ_2 — время ожидания; R_0 — радиус пузырька в момент отрыва



Как видно, при низких давлениях отрывной диаметр пузырька велик (имеется в виду диаметр сферы, объем которой равен объему пузырька). Характерно также, что при этом, как указывалось выше, форма отрывающегося пузырька — полусферическая. Эти явления объясняются динамической реакцией жидкости на быстрый рост пузырька, действие этой реакции приводит к задержке отрыва и деформации пузырька.

Как показывают наблюдения, частота отрыва пузырьков зависит от тепловой нагрузки на поверхности нагрева. При умеренных перегревах жидкости частота отрыва обратно пропорциональна D_0 . С момента отрыва пузырька до появления другого проходит некоторое время, называемое временем ожидания (рис. 13.3). Это время необходимо для повышения температуры поверхности до прежнего значения, так как рост пузырька сопровождается отводом теплоты от стенки и локальным понижением T_c . С увеличением перегрева жидкости (с увеличением q) время ожидания уменьшается, и частота отрыва будет практически обратно пропорциональна времени роста.

13.2. Кривая кипения

Кривой кипения называется зависимость $q = f(\Delta T)$, где q — плотность теплового потока на поверхности нагрева; $\Delta T = T_c - T_s$ — температурный напор. Кривую кипения получают опытным путем. Поскольку она охватывает большой диапазон изменения q и ΔT , ее обычно строят в логарифмических координатах. Для кипения воды при атмосферном давлении кривая кипения приведена на рис. 13.4.

Рассмотрим процесс кипения жидкости в большом объеме при постепенном повышении температуры поверхности нагрева. Этот способ обогрева поверхности соответствует граничным условиям первого рода. Практически он реализуется в том случае, когда поверхность, на которой кипит жидкость, с противоположной стороны обогревается горячим теплоносителем (например, паром), температуру которого постепенно увеличивают.

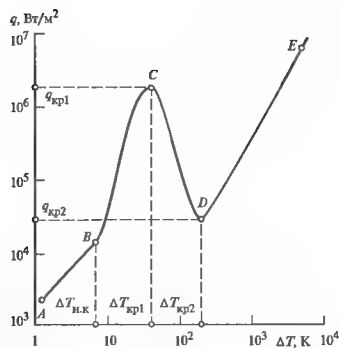


Рис. 13.4. Кривая кипения (граничное условие первого рода)

Область AB на рис. 13.4 отличается малыми значениями температурно-го напора. Здесь перегрева пристенного слоя жидкости недостаточно для образования значительного количества пузырьков, и отвод теплоты осуществляется путем свободной конвекции жидкости. При свободной конвекции коэффициент теплоотдачи $\alpha \sim \Delta T^n$, где $n = 0,25$ для горизонтальной трубы; $n = 0,2 \dots 0,33$ для горизонтальной пластины. Следовательно, в области AB $q \sim \Delta T^{n+1}$.

Точка B на кривой кипения является точкой начала кипения. Ей соответствует температурный напор $\Delta T_{н.к.}$, который зависит от состояния поверхности (размера и числа активных центров парообразования). Область $\Delta T_{н.к.} \leq \Delta T \leq \Delta T_{кр1}$, где $\Delta T_{кр1}$ — первый критический температурный напор соответствует *пузырьковому* режиму кипения. В этой области сначала в центрах парообразования образуются паровые пузырьки, которые быстро растут и, достигнув отрывного диаметра D_o , всплывают вверх. Так как жидкость перегрета, то по мере движения пузырьков происходит ее интенсивное испарение и размер пузырьков многократно увеличивается.

Поскольку частота отрыва велика, то с начала образования пузырьков происходит интенсивное перемешивание пристенного слоя жидкости, что приводит к резкому увеличению коэффициента теплоотдачи. Как только началось пузырьковое кипение, незначительное повышение температуры T_c приводит к существенному росту отводимого теплового потока (расходующего в конце концов на образование пара).

С повышением ΔT частота отрыва пузырьков и число работающих центров парообразования увеличиваются.

Дальнейший рост ΔT приводит к образованию около поверхности нагрева областей с повышенным паросодержанием. Однако и в этом случае на стенке, как показывают наблюдения, еще имеется очень тонкая пленка жидкости, толщина которой периодически изменяется с течением времени. Средняя статистическая толщина этой пленки $\delta_{зф}$ определяет значение α . Поскольку значение $\delta_{зф}$ составляет порядка десятков микрометров, то в этой области коэффициенты теплоотдачи достигают больших значений.

Когда температурный напор приближается к $\Delta T_{кр1}$, скорость роста теплоотдачи уменьшается, что связано с образованием «сухих» пятен — паровых областей, вытесняющих пленку жидкости с нагреваемой поверхности.

Точка C на кривой кипения называется первой критической точкой. Ей соответствует первая критическая плотность теплового потока $q_{кр1}$. Начиная с этой точки при повышении ΔT кипение уже имеет качественно другой характер. Поверхность нагрева в этом случае отделена от жидкости нестабильной паровой пленкой, эта пленка периодически разрушается, позволяя жидкости контактировать с поверхностью. Жидкость, оказавшаяся на стенке, очень быстро вскипает, а образовавшийся пар сливается с тем паром, который уже имеется в пристенной зоне. С увеличением ΔT все большее количество жидкости около стенки превращается в пар, и при $\Delta T = \Delta T_{кр2}$ доступ жидкости к поверхности вообще прекращается.

Кипение жидкости при наличии нестабильной паровой пленки на поверхности нагрева называется *переходным* режимом кипения. На кривой кипения он соответствует участку CD .

Если температурный напор больше $\Delta T_{кр2}$, то режим кипения называется *пленочным*. Он характеризуется тем, что на поверхности нагрева существует устойчивая пленка перегретого пара. При пленочном кипении перенос теплоты через паровую пленку осуществляется путем теплопроводности, конвекции и излучения. Поскольку теплопроводность пара мала, то интенсивность переноса теплоты при пленочном режиме кипения значительно ниже, чем при пузырьковом. Поэтому отводимые от стенки тепловые потоки могут быть большими только при высоких температурах стенки.

Роль переноса теплоты излучением возрастает с увеличением температуры T_c и при $T_c \approx 1000$ К для кипения воды ($p = 0,1$ МПа) коэффициент теплоотдачи излучением становится соизмеримым с конвективным коэффициентом теплоотдачи.

При пленочном кипении периодический отрыв пузырьков уже происходит не от поверхности нагрева, а от поверхности пленки. Периодический отрыв пузырьков и их перенос в объеме жидкости имеет место тогда, когда

кипение происходит на горизонтально расположенной поверхности. Если поверхность нагрева вертикальная, то образовавшийся пар движется вверх вдоль стенки, образуя при этом на стенке паровую пленку, толщина которой увеличивается с высотой.

При пленочном кипении на горизонтальных трубах пар даижется вверх по периметру трубы и удаляется от нее в виде отрывающихся пузырьков. Обычно при этом наблюдается ламинарное даижение пара около трубы. Если труба расположена вертикально, то, как правило, течение пара турбулентное.

Мы рассмотрели смену режимов кипения при постепенном увеличении температурного напора, что обеспечивается таким же изменением температуры стенки T_c . Кривая кипения останется такой же, если идти в обратном направлении, т.е. за начальную точку принять точку E (рис. 13.4). Плавню уменьшая T_c , мы придем в точку D , в которой устойчивое пленочное кипение прекратится и начнется переходный режим кипения, который продлится до точки C , после чего будет пузырьковый режим. Таким образом, как при прямом, так и при обратном ходе кривая выйдет одинаково.

В процессе кипения при *постепенном увеличении плотности теплового потока* (тепловой нагрузки) на кривой кипения будет отсутствовать участок CD (переходный режим кипения), а прямой и обратный ходы процесса кипения будут отличаться друг от друга (рис. 13.5). Указанный выше способ обогрева поверхности соответствует граничному условию второго рода (на стенке задано q). Зависимой переменной в этом случае является T_c (или ΔT).

При втором способе обогрева линии ABC на рис. 13.4 и 13.5 ничем не отличаются. Однако в точке C ($q = q_{кр1}$) пузырьковый режим кипения

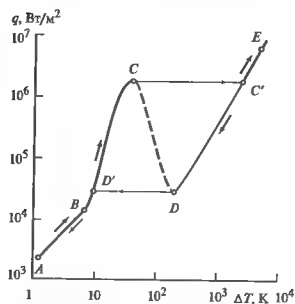


Рис. 13.5. Кривая кипения (граничное условие второго рода)

практически мгновенно переходит в пленочный. Объясняется это тем, что максимальная плотность теплового потока, который можно отвести от поверхности нагрева при пузырьковом кипении, равна $q_{кр1}$. При незначительном увеличении q нарушается баланс между подводимым и отводимым количеством теплоты. Так как теплоты отводится меньше, чем подводится, то ее избыток идет на нагревание стенки. Поскольку при повышении T_c интенсивность теплоотвода уменьшается (рис. 13.4, участок CD), то разность между подводимой и отводимой теплотой

увеличивается, что приводит к очень быстрому разогреву стенки. Когда нестационарный процесс разогрева стенки закончится, баланс теплоты ($q_{отв} = q_{подв}$) восстановится, но уже при пленочном режиме кипения. Условно этот практически мгновенный переход от одного режима кипения к другому на рис. 13.5 показан прямой CC' . При $q > q_{кр1}$ процесс пленочного кипения пойдет по линии $C'E$.

При обратном ходе, начинающемся от точки E , процесс кипения протекает следующим образом. Ход зависимости $q = f(\Delta T)$ на линии ED такой же, как на рис. 13.4. Однако, рассуждая аналогично тому, как это было сделано для прямого хода, нетрудно убедиться, что при снижении q произойдет переход от пленочного режима кипения к режиму, который на кривой кипения (рис. 13.5) условно показан линией DD' . При дальнейшем снижении тепловой нагрузки процесс пузырькового кипения будет протекать по линии $D'BA$.

Подчеркнем, что при кипении в большом объеме имеют место две критические плотности теплового потока $q_{кр1}$ и $q_{кр2}$ и соответственно два критических температурных напора $\Delta T_{кр1}$ и $\Delta T_{кр2}$. Величина $q_{кр1}$ представляет собой максимальную плотность теплового потока, который можно отвести от поверхности при пузырьковом режиме кипения. В случае обогрева при граничном условии второго рода (на поверхности задано q) $q_{кр1}$ называется также первой критической тепловой нагрузкой. Величина $q_{кр2}$ является минимальной плотностью теплового потока, который можно отвести от поверхности при пленочном режиме кипения. Она называется также второй критической тепловой нагрузкой.

Величины $\Delta T_{кр1}$ и $\Delta T_{кр2}$ связаны с $q_{кр1}$ и $q_{кр2}$ соотношениями $q_{кр1} = \alpha_{кр1} \Delta T_{кр1}$ и $q_{кр2} = \alpha_{кр2} \Delta T_{кр2}$, где $\alpha_{кр1}$ и $\alpha_{кр2}$ — коэффициенты теплоотдачи в критических точках на кривой кипения.

13.3. Теплоотдача и критические тепловые потоки при кипении в большом объеме

Теплоотдача при пузырьковом кипении. Физические представления о механизме парообразования (см. § 13.1) и опытные данные указывают на то, что интенсивность теплоотдачи при пузырьковом режиме кипения зависит от физических свойств жидкости и пара, температурного напора (или тепловой нагрузки поверхности нагрева), а также от давления. В самом деле, с увеличением температурного напора уменьшается критический радиус пузырька, включается в работу все большее число активных центров парообразования, увеличиваются скорость роста пузырьков и интенсивность перемешивания более и менее нагретых слоев жидкости около поверхности нагрева. Ясно, что при всем этом должен возрастать коэф-

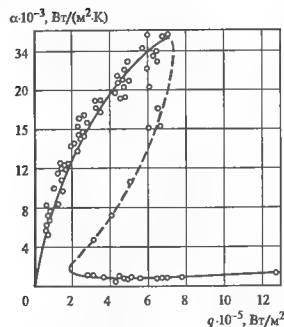


Рис. 13.6. Зависимость $\alpha = f(q)$ при кипении воды в большом объеме ($p = 0,101$ МПа)

Следует подчеркнуть, что рост коэффициента теплоотдачи с увеличением ΔT и q происходит только тогда, когда $\Delta T \leq T_{кр1}$ и $q < q_{кр1}$. Превышение температурного напора и тепловой нагрузки сверх их первых критических значений приводит к резкому уменьшению α , так как при этом пузырьковый режим кипения переходит в пленочный. График зависимости $\alpha = f(q)$ приведен на рис. 13.6.

Опытные данные показывают, что при пузырьковом кипении

$$\alpha = f(p)q^n,$$

где показатель степени n незначительно изменяется в зависимости от состояния поверхности и рода жидкости; приближенно можно считать, что n не зависит от давления, а численное значение $n = 2/3$.

На теплоотдачу при пузырьковом режиме кипения оказывают влияние такие факторы, как чистота жидкости, наличие в ней растворенных газов, состояние поверхности нагрева (шероховатость, однородность, смачиваемость, адсорбционные свойства и др.). Поэтому опытные данные, полученные на разных установках при одних и тех же значениях p и q , могут отличаться друг от друга.

Приближенная теория процесса теплообмена при развитом кипении предложена Д.А. Лабунцовым. Модель Лабунцова основана на том, что при развитом кипении, когда объемное содержание пара около поверхности нагрева велико, на ней существует тонкая пленка жидкости, сохраняющаяся вплоть до значений q , близких к значениям $q_{кр1}$. Малое термическое сопротивление этой пленки и определяет высокую интенсивность теплоотдачи при кипении.

Толщина пленки различна в разных точках поверхности, и, кроме того, она изменяется с течением времени. Однако, если ввести эффективную

коэффициент теплоотдачи. Повышение давления влияет таким же образом, так как величина $R_{кр}$ в этом случае уменьшается и, несмотря на то, что скорость роста пузырьков тоже снижается, уменьшается и отрывной диаметр, а следовательно, увеличивается частота отрыва пузырьков. Повышение тепловой нагрузки приводит к увеличению перегрева пристенного слоя жидкости, поэтому влияние q на коэффициент теплоотдачи аналогично влиянию ΔT .

(усредненную по времени и поверхности) толщину такой пленки $\delta_{эф}$, то можно предположить, что

$$\alpha = \lambda / \delta_{эф}, \quad (13.7)$$

где λ — теплопроводность жидкости.

Согласно Д.А. Лабунцову, значение $\delta_{эф}$ зависит от вязкости жидкости ν , интенсивности движения парожидкостной смеси у границы пленки и плотности действующих центров парообразования. Поскольку с увеличением q объем генерируемого пара возрастает, интенсивность беспорядочного движения двухфазной среды при этом также растет. Характерной величиной, определяющей эту интенсивность, может быть приведенная (условная) скорость парообразования v_p , которую можно найти из уравнения теплового баланса: $Q = G_p r$, где G_p — полный расход образующегося пара, пересекающего условную поверхность площадью F , параллельную поверхности нагрева. Учитывая, что $G_p = \rho'' v_p F$, а $Q = qF$, получаем

$$v_p = \frac{q}{\rho'' r}. \quad (13.8)$$

Чем меньше $R_{кр}$, тем на большем числе активных центров парообразования возникает паровая фаза. Другими словами, плотность центров парообразования характеризуется значением $R_{кр}$. Пленка жидкости испытывает периодическое движение с периодом $\tau \sim R_{кр} / v_p$. Из анализа размерностей следует, что толщина пленки $\delta_{эф} \sim \sqrt{\tau \nu}$. При этом

$$\delta_{эф} \sim \left(\frac{\nu R_{кр}}{v_p} \right)^{1/2}. \quad (13.9)$$

Подставляя в (13.9) соотношения (13.3) и (13.8) и имея в виду (13.7), после преобразований получаем

$$\alpha = b \left(\frac{\lambda^2}{\nu \sigma T_s} \right)^{1/3} q^{2/3}, \quad (13.10)$$

где b — безразмерный коэффициент, который зависит от отношения ρ''/ρ , и на основании опытных данных

$$b = 0,075 \left[1 + 10 \left(\frac{\rho''}{\rho} \right)^{2/3} \right].$$

Формула Лабунцова (13.10) подтверждается опытными данными при кипении различных жидкостей за исключением условий низких давлений ($p < 10^5$ Па), когда процесс кипения отличается возникновением значительных перегревов жидкости, нерегулярным вскипанием и сопровождается звуковыми эффектами (стукаками). В последнем случае значения α ниже тех,

которые получаются из (13.10). При расчете α по (13.10) все значения физических свойств выбираются при температуре T_c . Для удобства расчета α при кипении воды из (13.10) можно получить зависимость, справедливую при $10^5 \leq p \leq 200 \cdot 10^5$ Па:

$$\alpha = \frac{3,4p^{0,18}}{1 - 0,0045p} q^{2/3}, \quad (13.11)$$

где p , бар; q , Вт/м².

Первая критическая плотность теплового потока. Для расчета $q_{кр1}$ на основе гидродинамической модели кризиса кипения на горизонтальной и обращенной вверх поверхности нагрева С.С. Кутателадзе (1950 г.) получил формулу

$$q_{кр1} = kr \sqrt{\rho''^4 \sigma g (\rho' - \rho'')}, \quad (13.12)$$

в которой, согласно опытным данным, постоянная $k \approx 0,14$.

Гидродинамическая модель Кутателадзе состояла в том, что при определенном значении динамического напора пара $\rho'' v_n^2$ наступает такой момент кипения, когда доступ жидкости к поверхности нагрева становится затрудненным. Этот момент и принимался за начало смены режимов кипения. Результаты, полученные по формуле Кутателадзе, удовлетворительно согласуются с опытными данными для воды (рис. 13.7) и других жидкостей, за исключением условий низких давлений.

Сущность модели В.В. Ягова (1985 г.) заключается в анализе состояния пристенной пленки жидкости при повышении тепловой нагрузки поверхности нагрева до значений, близких к $q_{кр1}$. Вследствие ухудшения условий отвода больших паровых образований при больших q на поверхности нагрева появляются «сухие» пятна и сама жидкая пленка в некоторых местах поверхности периодически пересыхает, при этом ее средняя толщина уменьшается. Можно рассчитать среднюю плотность теплового потока, приходящегося на одну «сухую» пятно в жидкой пленке, и, приравняв полученное значение к тепловой нагрузке на поверхности нагрева, можно определить $q_{кр1}$. Формулы Ягова имеют вид:

при $p/p_{кр} \geq 0,05$

$$q_{кр1} = 0,06r(\rho'')^{0,6} \sigma^{0,4} \left[\frac{g(\rho' - \rho'')}{\mu} \right]^{0,2}; \quad (13.13)$$

при $p \leq 0,001$

$$q_{кр1} = 0,4 \frac{r^{81/55} (\rho'')^{13/110} \sigma^{9/11} \lambda^{7/110} g^{21/55} Pr^{4/33}}{v^{1/2} p^{3/10} R^{79/110} T_s^{21/22}}. \quad (13.14)$$

Здесь $p_{кр}$ — критическое давление для данной жидкости.

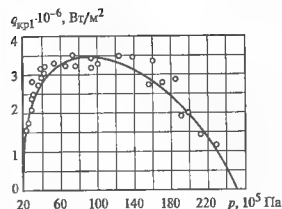


Рис. 13.7. Зависимость $q_{кр1}$ от давления для кипящей воды



Рис. 13.8. Схема пленочного кипения на горизонтальной трубе

Во всем диапазоне изменения давлений

$$q_{кр1} = [(q'_{кр1})^3 + (q''_{кр1})^3]^{1/3}, \quad (13.15)$$

где $q'_{кр1}$ вычисляется по (13.13), а $q''_{кр1}$ — по (13.14).

При $p/p_{кр} \geq 0,05$ значения $q_{кр1}$, найденные по (13.13), (13.15) и по формуле Кутателадзе, практически совпадают друг с другом.

Теплоотдача при пленочном кипении. Переход к пленочному кипению, как указывалось выше, сопровождается снижением интенсивности отвода теплоты. Существенное влияние на толщину паровой пленки, которая создает основное термическое сопротивление переносу теплоты, оказывает форма и расположение в пространстве поверхности нагрева.

Формулу для среднего по периметру α при пленочном кипении на горизонтальных трубах (рис. 13.8), когда движение пленки ламинарное, можно получить таким же методом, как в случае пленочной конденсации. Она имеет следующий вид:

$$\alpha = 0,62 \left(\frac{(\lambda'')^3 r_* g (\rho' - \rho'')}{v'' d (T_c - T_s)} \right)^{1/4}. \quad (13.16)$$

В (13.16) $r_* = r + 0,5c_p''(T_c - T_s)$, а значения свойств пара выбираются при средней температуре перегретого пара $T_{cp} = 0,5(T_c + T_g)$.

При пленочном кипении на вертикальных поверхностях течение пленки пара, как правило, турбулентное. Как и при свободной конвекции однофазной жидкости, коэффициент теплоотдачи здесь практически не зависит от высоты поверхности, причем

$$\alpha = 0,25 \left(\frac{(\lambda'')^2 c_p'' g (\rho' - \rho'')}{v''} \right)^{1/3}. \quad (13.17)$$

Входящие в (13.17) свойства выбираются так же, как и при расчете по (13.16).

Вторая критическая плотность теплового потока. Если при пленочном режиме кипения уменьшать температуру поверхности, то, как показывают наблюдения, при температуре поверхности, несколько меньшей, чем температура предельного перегрева жидкости, паровая пленка становится нестабильной и жидкость начинает периодически смачивать поверхность. Плотность теплового потока при этом

$$q_{кр2} = \alpha \Delta T_{кр2}, \quad (13.18)$$

где $\Delta T_{кр2} \approx 0,9(T_{пр} - T_s)$; здесь $T_{пр}$ — температура предельного перегрева (см. § 13.1).

Коэффициент теплоотдачи α в (13.18) следует определять по формулам для пленочного кипения.

13.4. Общие сведения о кипении при вынужденной конвекции в трубах

При пузырьковом режиме кипения в большом объеме и трубах термическое сопротивление переносу теплоты мало, а коэффициенты теплоотдачи достигают высоких значений. Поэтому способ отвода теплоты при кипении жидкости, движущейся в трубе, применяется в технических устройствах с большими тепловыми нагрузками на поверхности нагрева (например, в атомных реакторах). Процесс генерации пара на тепловых электрических станциях осуществляется за счет кипения воды, которая движется по трубам, расположенным в топке парового котла.

Однако следует иметь в виду, что так же, как и в случае большого объема, при кипении в трубах наблюдаются кризисы теплоотдачи, приводящие к резкому снижению α . Интенсивность теплоотдачи и возникновение кризисов кипения связаны со структурой двухфазного потока и его скоростью. Двухфазные потоки характеризуются параметрами, определения которых приводятся ниже.

Параметры двухфазного потока. Параметры двухфазного потока подразделяются на расходные и истинные.

Расходное *массовое паросодержание* определяется как отношение массового расхода пара в данном сечении трубы $G_{п}$, кг/с, к массовому расходу смеси G , кг/с:

$$x = G_{п}/G.$$

Массовый расход смеси

$$G = G_{п} + G_{ж},$$

где $G_{ж}$ — расход жидкой фазы, кг/с.

Для потока жидкости, находящейся в состоянии насыщения, $Q = G_{п}r$. В то же время $Q = G(h_{см} - h')$, где $h_{см}$ — энтальпия смеси и жидкости на линии насыщения. Отсюда следует, что

$$x = \frac{h_{см} - h'}{r},$$

т.е. величина x представляет собой относительную энтальпию потока. Очевидно, что если понятие относительной энтальпии распространить на поток насыщенного пара (вся жидкость испарилась), то $x = 1$, а если на поток недогретой до T_s жидкости, то $x < 0$. Отметим, что в термически неравновесном ($T_{п} \neq T_{ж}$) двухфазном потоке относительная энтальпия смеси не характеризует ее действительный состав. Например, при поверхностном кипении, когда ядро потока еще не успело нагреться до температуры T_s , $x < 0$, хотя на самом деле паровая фаза в данном сечении трубы имеется.

Расходное *объемное паросодержание* определяется так:

$$\beta = \frac{V_{п}}{V_{п} + V_{ж}}.$$

Здесь $V_{п}$ и $V_{ж}$ — объемные расходы паровой и жидкой фаз, причем

$$V_{п} = \frac{G_{п}}{\rho'}; \quad V_{ж} = \frac{G_{ж}}{\rho''}.$$

Истинное объемное паросодержание ϕ характеризуется отношением площади поперечного сечения $S_{п}$, занятой паром, к полной площади поперечного сечения трубы S :

$$\phi = S_{п}/S.$$

Соотношение, связывающее между собой β и x , имеет вид

$$\beta = \left(1 + \frac{\rho''}{\rho'} \frac{1-x}{x}\right)^{-1}.$$

Если в данном сечении трубы истинная скорость пара $v_{п}$ не равна истинной скорости жидкости $v_{ж}$, то

$$\phi = \left(1 + \frac{\rho''}{\rho'} \frac{v_{п}}{v_{ж}} \frac{1-x}{x}\right)^{-1}.$$

Скорости $v_{п}$ и $v_{ж}$ следует определять по формулам

$$v_{п} = V'/S_{п}; \quad v_{ж} = V''/S_{п},$$

где $S_{ж} = S - S_{п}$.

Разность $v_{п} - v_{ж}$ называется *относительной скоростью фаз*.

В практических расчетах истинные скорости обычно заранее неизвестны. Поэтому часто пользуются расходными характеристиками, которые могут быть определены из материального и теплового балансов. Например, зная расходную плотность смеси

$$\bar{\rho} = \rho''\beta + \rho'(1 - \beta),$$

можно найти и отношение $\rho' / \bar{\rho}$:

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = 1 + \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x,$$

которое используется в некоторых расчетных формулах, относящихся к двухфазным потокам.

При изучении двухфазных потоков часто применяются два понятия: приведенная скорость смеси (иногда ее называют *скоростью циркуляции*)

$$v_0 = \frac{G}{S\rho'},$$

и средняя массовая скорость, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$,

$$\bar{v} = G/S.$$

Режимы течения. Как показывают наблюдения, в зависимости от x , $\bar{v}$ и p паровая фаза по-разному распределена в объеме вертикально расположенной трубы. При этом различают шесть режимов течения парожидкостной смеси (рис. 13.9), для которых используются следующие термины.

Если пар распределен в жидкости в виде небольших по сравнению с радиусом трубы пузырьков (рис. 13.9, а), то режим течения называется *пузырьковым*. Он характерен для начальной стадии парообразования в трубе. Когда расход пара увеличивается, то пузырьки сливаются друг с другом с образованием больших пузырей. При этом режим течения может быть либо *снарядным*, либо *эмульсионным*.

Такая форма течения смеси, при которой пар движется в форме крупных пузырей, напоминающих форму снаряда, называется *снарядным* (рис. 13.9, б). Если пар распределен в потоке в виде небольших объемов, разделенных жидкостью, то режим называется *эмульсионным* (рис. 13.9, в).

Дисперсно-кольцевой режим течения соответствует такой форме движения смеси, при которой пар образует ядро потока, а жидкая фаза движется в виде пленки по поверхности трубы, а также в виде капель в паре (рис. 13.9, г).

Кольцевой режим течения (рис. 13.9, д) представляет собой предельный случай дисперсно-кольцевого режима. От последнего он отличается тем, что в ядре потока капли жидкости отсутствуют. Второй предельный случай — *дисперсный* режим течения: по стенке движется пар, а жидкость движется в виде мелких капель (рис. 13.9, е).

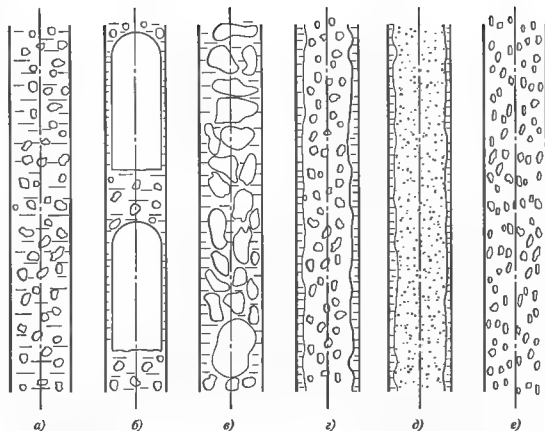


Рис. 13.9. Схемы режимов течения парожидкостной смеси в вертикальной трубе

В горизонтальных или наклонных трубах при низких скоростях и больших значениях x наблюдается *расслоенный* режим течения, когда в верхней части поперечного сечения трубы движется преимущественно пар, а в нижней — жидкость. Однако при больших скоростях в этом случае отмечаются те же режимы, что и для вертикальной трубы, но с нарушением симметрии (паровая фаза стремится занять верхнюю часть трубы).

Расслоенный режим движения опасен для обогреваемой трубы. Вследствие резкого изменения α по периметру трубы и соответствующего изменения T_c в ее стенке возникают температурные напряжения. Так как граница раздела фаз периодически изменяется со временем, температурные напряжения будут переменными. Они приводят к медленному разрушению стенки и последующему ее разрыву по продольному сечению.

Развитие процесса кипения по длине обогреваемой трубы. Пусть в равномерно обогреваемую трубу поступает жидкость, температура которой $T_{ж}$ меньше температуры насыщения T_s (рис. 13.10). В случае длинной трубы можно выделить пять характерных участков.

Первый участок соответствует течению однофазной жидкости. Закономерности теплообмена здесь описываются зависимостями, приведенными выше (см. гл. 9 и 10).

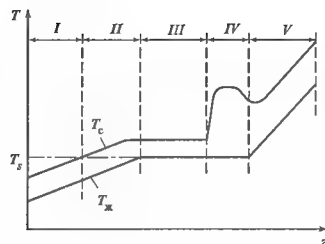


Рис. 13.10. Изменение температур T_c и $T_{ж}$ при движении жидкости в равномерно обогреваемой трубе

Второй участок характеризуется тем, что в пристенной зоне потока температура жидкости больше температуры насыщения, а в ядре — меньше. Это зона кипения *недогретой жидкости* (кипение с недогревом или поверхностное кипение). В этом случае парообразование происходит не во всем объеме жидкости, а только вблизи поверхности. Пузырьки пара, образуясь на стенке, попадая в ядро потока, где температура меньше T_s , конденсируются.

Третий участок — это участок кипения *насыщенной жидкости*. В этой зоне трубы генерируется основное количество пара, причем расход его увеличивается по мере продвижения от начала зоны к концу. Расход жидкости при этом соответственно уменьшается. В зависимости от массовой скорости, давления и паросодержания здесь реализуется пузырьковый, нитчатый или эмульсионный режим течения. Третья зона ограничена критическим сечением, в котором наблюдается смена режима кипения: контакт жидкости со стенкой нарушается, в результате чего резко повышается ее температура.

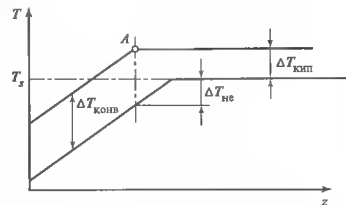
Четвертая зона — закризисная. Парообразование в этом случае происходит при повышенной температуре стенки T_c .

Пятая зона — это зона перегретого пара. Здесь, как и в первой зоне, закономерности теплоотдачи соответствуют однофазной жидкости.

13.5. Теплоотдача при кипении в трубах

Кипение *недогретой* до температуры насыщения жидкости. Рассмотрим случай поверхностного кипения в трубе при $q_c = \text{const}$. При малых перегревах температуры стенки относительно температуры насыщения образующиеся пузырьки пара оказывают слабое влияние на α и темпе-

Рис. 13.11. К расчету значения температуры недогрева жидкости, необходимой для начала развитого поверхностного кипения



ратура стенки изменяется по длине трубы так же, как и для однофазной жидкости. Однако с началом развитого поверхностного кипения (рис. 13.11, точка A) теплоотдача становится более интенсивной и ход кривой $T_c(z)$ изменяется. Далее будем приближенно считать, что начиная с точки A температура T_c изменяется аналогично изменению T_s .

Найдем значение температуры недогрева $\Delta T_{не} = T_s - T_{ж*}$ при котором начинается развитое поверхностное кипение. Из рис. 13.11 видно, что $\Delta T_{не} = \Delta T_{конв} - \Delta T_{кип}$, где температурный напор при конвективном теплообмене однофазной жидкости $\Delta T_{конв} = q / \alpha_{конв}$, а температурный напор при кипении насыщенной жидкости $\Delta T_{кип} = q / \alpha_{кип}$. Таким образом,

$$T_s - T_{ж*} = q \left(\frac{1}{\alpha_{конв}} - \frac{1}{\alpha_{кип}} \right).$$

Коэффициент теплоотдачи $\alpha_{конв}$ в случае турбулентного режима течения можно рассчитать по формуле Петухова. Зная температуру $T_{ж*}$ соответствующую точке A, из уравнения теплового баланса легко рассчитать координату точки начала кипения в трубе.

Теплоотдача при кипении *насыщенной* жидкости. Интенсивность теплоотдачи при кипении в трубах так же, как и в большом объеме, определяется в основном турбулизацией пристенного слоя жидкости. Поэтому коэффициенты теплоотдачи в трубах практически такие же, как и при пузырьковом режиме кипения в большом объеме. Однако в ряде случаев на α оказывают влияние скорость циркуляции и паросодержание потока. Влияние последнего фактора объясняется тем, что с ростом паросодержания вследствие уменьшения плотности двухфазной среды увеличивается скорость жидкости у стенки.

Коэффициенты теплоотдачи в том случае, когда влияние паросодержания мало, можно рассчитать по формуле

$$\alpha = \alpha_{конв} \left(1 + \frac{\alpha_{кип}}{\alpha_{конв}} \right)^{1/2}$$

где $\alpha_{\text{кип}}$ находится по формулам (13.10), (13.11), справедливым для кипения в большом объеме.

Для нахождения α используются также формулы Рассохина:

$$\alpha_{\text{кип}} = 3,1 p^{0,25} q^{2/3} \quad \text{при } 1 \leq p \leq 80 \text{ бар};$$

$$\alpha_{\text{кип}} = 0,027 p^{1,33} q^{2/3} \quad \text{при } 80 \leq p \leq 200 \text{ бар},$$

где q , Вт/м².

Как показывают опыты, паросодержание практически не влияет на теплоотдачу, если

$$K = \left(\frac{v_{\text{ср}} r \rho'}{q_{\text{с}}} \right)^{3/2} \left(\frac{0,7 \alpha_{\text{кип}}}{\alpha} \right)^2 < 5 \cdot 10^4,$$

где $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость смеси, которая связана со скоростью циркуляции v_0 соотношением

$$v_{\text{ср}} = v_0 \left[1 + x \left(\frac{\rho'}{\rho''} - 1 \right) \right].$$

Если $K > 5 \cdot 10^4$, то коэффициент теплоотдачи с учетом влияния паросодержания можно определить по формуле

$$\alpha_1 = \alpha (1 + 7 \cdot 10^{-9} K)^{1/2},$$

полученной В.М. Боришанским и справедливой при $0,2 \leq p \leq 17$ МПа, $0,08 \leq q \leq 6$ МВт/м² и $1 \leq v_{\text{см}} \leq 300$ м/с.

Теплоотдача при кольцевом режиме течения парожидкостной смеси. В случае кольцевого режима течения кипение в пленке практически отсутствует и парообразование происходит вследствие испарения жидкости с поверхности пленки. При этом основным фактором, влияющим на интенсивность теплоотдачи, является скорость двухфазной смеси. Оценку значения коэффициента теплоотдачи можно сделать с помощью так называемого параметра Мартинелли—Локкарта, который используется при изучении двухфазных потоков. Параметр Мартинелли—Локкарта X определяется по условным гидравлическим сопротивлениям $\Delta p_{\text{ж}}/l$ и $\Delta p_{\text{п}}/l$, которые имели бы место при движении в трубе жидкости (с расходом $G_{\text{ж}}$) или только пара (с расходом $G_{\text{п}}$), причем

$$X = \left(\frac{\Delta p_{\text{ж}}/l}{\Delta p_{\text{п}}/l} \right)^{1/2}$$

Тогда, как это следует из литературных данных,

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\text{конв}}} = \frac{3,5}{X^{1/2}}.$$

Таким образом, если известно, что в трубе реализуется кольцевой режим течения, то достаточно знать паросодержание потока (т.е. $G_{\text{ж}}$ и $G_{\text{п}}$), поскольку расчет гидравлического сопротивления однофазной среды затруднений не вызывает. Так как $\Delta p_{\text{п}} > \Delta p_{\text{ж}}$, то $\alpha > \alpha_{\text{конв}}$.

Теплоотдача в закризисной зоне парогенирующего канала. Закризисная зона характеризуется ухудшенным теплообменом, поскольку контакт внутренней поверхности трубы с жидкостью нарушен, т.е. здесь имеет место дисперсный режим течения: капли жидкости распределены в паре. Теплота от нагретой стенки отводится в основном путем вынужденной конвекции перегретого пара. При высоких тепловых нагрузках труба может иметь недопустимо высокую температуру стенки. Однако, если, например, в топке парового котла закризисная зона окажется в области малых тепловых потоков, то работа парогенирующей трубы будет безопасной.

Формулы для расчета α в закризисной зоне получают на основании опытных данных. Теплоотдача в закризисной зоне зависит от рода кипящей жидкости, давления и массовой скорости. В диапазоне изменения $4 \leq p \leq 22$ МПа и $1000 \leq \rho \bar{v} \leq 2000$ кг/(м²·с) расчет α можно проводить по следующей эмпирической формуле:

$$\text{Nu} = 0,023 \text{Pr}_c \left(x + \frac{\rho''}{\rho'} (1-x) \right)^{0,8}, \quad (13.19)$$

где

$$Y = 1 - 0,1 \left(\frac{\rho'}{\rho''} - 1 \right)^{0,4} (1-x)^{0,4}; \quad (13.19a)$$

Pr_c — число Прандтля для сухого насыщенного пара при $T - T_c$:

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu''}; \quad \text{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda''}.$$

Здесь μ'' и λ'' — динамическая вязкость и теплопроводность пара при $T = T_c$.

Коэффициент теплоотдачи α в (13.19) относится к температурному напору $\Delta T = T_c - T_s$. Следовательно, зная тепловую нагрузку q , после расчета α по формуле (13.19) находим T_c :

$$T_c = T_s + q/\alpha. \quad (13.19b)$$

Если $\bar{\rho}v < 1000 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$, то для расчета T_c формула (13.196) не годится, так как в этом случае оказывается существенным тот факт, что температура каплей жидкости $T_{ж} = T_c$, а температура пара $T_n > T_s$ и поток не является термодинамически равновесным.

13.6. Кризисы теплоотдачи при кипении в трубах

Особенности кризисов теплоотдачи в трубах. В тех случаях кипения, когда жидкость омывает внутреннюю поверхность трубы, интенсивность теплоотдачи высокая и температура стенки незначительно отличается от температуры насыщения. При определенных условиях контакт жидкости со стенкой может прекратиться и стенка будет омываться паром. Так как теплопроводность пара много меньше теплопроводности жидкости, то интенсивность отвода теплоты от стенки при этом резко снизится, что при сохранении тепловой нагрузки приведет к увеличению ее температуры. Рост температуры стенки может быть настолько высоким, что произойдет разрушение (пережог) ее материала. Описание явление, наблюдающееся при кипении в трубах, принято называть кризисом теплоотдачи (или кризисом теплообмена).

Знание условий, при которых наступает кризис теплоотдачи, необходимо для обеспечения надежной эксплуатации парогенерирующих труб и каналов в тепловой и ядерной энергетике. Если превысить допустимую тепловую нагрузку, то ядерный реактор либо придет в аварийное состояние, либо (в благоприятном случае) резко уменьшится срок службы его тепловыделяющих элементов. Аварийное состояние из-за кризисов теплоотдачи может наступить и при кипении воды в трубах, расположенных в топке парового котла, особенно при большом выделении теплоты, которое имеет место, например, при сжигании мазута.

В случае кипения в большом объеме момент наступления кризиса теплоотдачи при увеличении тепловой нагрузки выяснит просто. Для этого достаточно вычислить значение $q_{кр}$, которое для данной зависимости зависит только от давления. При этом кризис теплоотдачи однозначно связан с изменением механизма парообразования вблизи поверхности нагрева (кризисом кипения), т.е. переходом от пузырькового режима к пленочному. Изменение механизма парообразования является причиной кризиса теплоотдачи и при кипении в трубах, однако здесь (помимо давления) его наступление зависит еще от таких факторов, как структура и паросодержание потока в данном сечении трубы, массовая скорость, диаметр трубы и др. Поэтому универсальную формулу для расчета кризиса теплоотдачи в трубах получить затруднительно, и условия его наступления наиболее надежно можно выяснить с помощью экспериментально полученных данных, которые обычно сводятся в таблицы.

Основные механизмы кризиса теплоотдачи. Значения параметров, при которых наблюдается кризис теплоотдачи при кипении жидкости в трубе, можно зафиксировать в следующем опыте.

Возьмем тонкостенную длинную трубу небольшого диаметра. Расположим ее вертикально и снизу вверх будем пропускать через нее воду. Зафиксируем давление воды p и массовую скорость $\bar{\rho}v$. Нагревая трубу электрическим током ($q = \text{const}$), будем следить за изменением температуры T_c по длине трубы (см. рис. 13.10). Зафиксируем координату $z = z_{кр}$, при которой наблюдается резкое повышение T_c (кризис теплоотдачи). Нетрудно вычислить относительную энтальпию в сечении, где наступает кризис. Считая, что опытное значение $q = q_{кр}$, и обозначая энтальпию воды на входе в трубу через $h_{вх}$ и энтальпию пароводяной смеси в критическом сечении через $h_{кр}$, получаем

$$x_{кр} = \frac{h_{кр} - h_{вх}}{r} = \frac{4q_{кр}\pi dz_{кр}}{\bar{\rho}v\pi d^2 r}.$$

При высоких тепловых нагрузках кризис теплоотдачи наступает и тогда, когда вода еще не догрета до температуры насыщения, а образование пара происходит только в поверхностном слое жидкости. При этом $x_{кр} < 0$.

Опытным путем можно получить зависимость $q_{кр} = f(x_{кр})$, которая схематично показана на рис. 13.12. Она наблюдается при кипении воды в диапазоне $3 \leq p \leq 16 \text{ МПа}$ и $500 \leq \bar{\rho}v \leq 2500 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. Кривую, приведенную на рис. 13.12, можно разбить на три участка. Первый соответствует области кипения недогретой жидкости и малых паросодержаний насыщенной жидкости (пузырьковому режиму течения). Кризис теплоотдачи в этом случае объясняется тем, что при большой плотности теплового потока вследствие интенсивного парообразования в пристенном слое объемное содержание пара становится настолько большим, что приток жидкости к стенке становится затруднительным. На стенке начинают появляться «сухие» пятна, а в определенный момент рост числа этих пятен становится неуправляемым, мгновенно появляется пленка пара, что и приводит к кризису теплоотдачи. Отметим, что механизм образования кризиса здесь аналогичен тому, который имеет место при

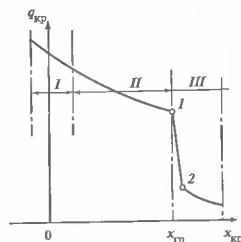


Рис. 13.12. Влияние паросодержания на кризисы теплоотдачи при кипении в трубе

I — кризис при $x < 0$ и пузырьковом режиме; II — кризис при дисперсно-кольцевом режиме; III — область кризиса второго рода

смене пузырькового режима пленочным в случае кипения в большом объеме.

Второй участок кривой на рис. 13.12 соответствует повышенному содержанию пара в двухфазном потоке (дисперсно-кольцевой режим течения). В этом случае кризис теплоотдачи также связан с переходом от пузырькового режима кипения к пленочному, однако по сравнению с первым участком этот кризис наступает при меньших тепловых нагрузках.

Поскольку механизм образования кризиса теплоотдачи на первом и втором участках кривой один и тот же, эти два участка часто объединяют в один и называют участком *кризиса первого рода*.

Дисперсно-кольцевой режим течения постепенно переходит в дисперсный. При интенсивном кипении в жидкой пленке наблюдается вынос влаги с ее поверхности в ядро потока, который возникает вследствие разрыва поверхности отрывающимися пузырьками. Одновременно происходит осаждение капель из ядра потока на поверхности пленки. По мере роста паросодержания наступает момент, когда испарение и унос влаги из пленки не компенсируется выпадением капель из ядра потока, пленка высыхает. Высыхание пленки приводит к резкому снижению $q_{кр}$, а на графике (рис. 13.12) этот момент отмечается точкой излома кривой $q_{кр} = f(x_{кр})$ (рис. 13.12, точка 1). Значение $x_{кр}$, которое соответствует области резкого снижения $q_{кр}$, называется граничным паросодержанием, а кризис теплоотдачи вследствие высыхания жидкой пленки называется *кризисом второго рода*. Процесс высыхания пленки является неустойчивым, так как на нее продолжают выпадать капли из ядра потока. Полное высыхание пленки при этом происходит при значении паросодержания, несколько большем $x_{гр}$. Точка 2 на рис. 13.12 называется точкой начала *кризиса орошения*.

При $p > 16$ МПа и $\bar{p}v > 2500$ кг/(м²·с) резкого излома кривой не наблюдается и кризис теплоотдачи объясняется недостаточным орошением каплями стенки жидкости.

Значения критических плотностей теплового потока $q_{кр}^0$ (кризисы первого рода) в зависимости от относительной энтальпии x при некоторых значениях p и $\bar{p}v$ для трубы диаметром $d_0 = 8$ мм приведены в табл. 13.1.

Для труб других диаметров $q_{кр}/q_{кр}^0 = (d_0/d)^{0.5}$.

В табл. 13.2 даны граничные паросодержания при кипении воды в трубе диаметром $d_0 = 8$ мм.

Таблица 13.1. Критические плотности теплового потока $q_{кр}^0$, МВт/м², при кипении воды в трубе диаметром $d_0 = 8$ мм

Давление, МПа	Массовая скорость, кг/(м ² ·с)	Массовое паросодержание				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
11,8	750	2,60	2,25	1,90	1,60	1,30
	1000	2,65	2,20	1,75	1,45	—
	1500	2,50	1,90	1,45	—	—
	2000	2,40	1,75	1,15	—	—
	2500	2,35	1,50	1,05	—	—
	3000	2,15	1,30	0,80	—	—
	4000	2,15	1,30	0,80	0,55	0,40
	5000	2,15	1,35	0,90	0,60	0,45
13,8	750	2,05	1,70	1,40	1,20	—
	1000	2,00	1,60	1,30	1,05	—
	1500	1,95	1,45	0,90	—	—
	2000	1,95	1,30	—	—	—
	2500	1,95	1,10	0,75	0,50	0,30
	3000	1,90	1,15	0,80	0,55	0,35
	4000	2,05	1,30	0,90	0,65	0,45
	5000	2,20	1,50	1,05	0,75	0,50
15,7	750	1,50	1,20	0,95	0,80	0,60
	1000	1,55	1,20	0,90	0,65	0,40
	1500	1,60	1,15	0,80	0,45	0,30
	2000	1,75	1,25	0,85	0,45	0,30
	2500	1,80	1,25	0,85	0,50	0,40
	3000	1,85	1,30	0,85	0,55	0,40
	4000	2,10	1,45	1,00	0,70	0,45
	5000	2,40	1,65	1,20	0,80	0,55
17,7	750	1,10	0,80	0,60	0,45	0,35
	1000	1,15	0,85	0,65	0,40	0,20
	1500	1,30	0,90	0,65	0,40	0,30
	2000	1,45	1,10	0,75	0,45	0,30
	2500	1,65	1,20	0,80	0,55	0,35
	3000	1,80	1,35	0,95	0,65	0,40
	4000	2,05	1,55	1,15	0,80	0,50
	5000	2,40	1,70	1,20	0,85	0,60
19,6	750	1,05	0,60	0,45	0,40	0,35
	1000	1,05	0,65	0,50	0,30	—
	1500	1,20	0,85	0,55	0,40	0,25
	2000	1,35	1,00	0,70	0,45	0,30
	2500	1,45	1,10	0,80	0,55	0,35
	3000	1,50	1,20	0,90	0,65	0,40
	4000	1,70	1,45	1,10	0,80	0,50
	5000	2,20	1,70	1,25	0,90	0,60

Таблица 13.2. Граничные паросодержания $x'_{гр}$ при кипении воды в трубе диаметром $d_0 = 8$ мм

Массовая скорость, кг/(м ² ·с)	Давление, МПа					
	2,94	4,9	6,9	9,8	11,8	13,8
750	0,75	0,75	0,70	0,60	0,55	0,45
1000	0,65	0,65	0,60	0,50	0,45	0,35
1500	0,55	0,55	0,45	0,40	0,35	0,30
2000	0,45	0,45	0,40	0,30	0,30	0,30
2500	0,40	0,40	0,35	0,30	0,30	—
3000	0,35	0,35	0,30	0,30	—	—
4000	0,30	0,30	0,25	—	—	—
5000	0,30	—	—	—	—	—

Для труб другого диаметра $x'_{гр}$ находится по формуле

$$\frac{x'_{гр}}{x_{гр}} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^{0,25}.$$

Опытные данные показывают, что $x_{гр}$ слабо зависит от неравномерности распределения теплового потока по длине трубы.

Коэффициенты запаса до кризиса. Если требуется, чтобы парообразование в трубе происходило без кризисов теплоотдачи, необходимо найти значение предельно допустимой тепловой нагрузки на поверхности трубы. Этот вопрос решается с помощью коэффициента запаса до кризиса. Чтобы найти коэффициент запаса, поступают следующим образом.

Во-первых, в координатах $q-x$ для данных значений p и $\overline{v_0}$ наносят кривую $q_{кр} = f(x)$ и отмечают значение $x = x_{гр}$ (рис. 13.13). На этот же график наносят точку a (или b), которая соответствует q_a (или q_b) на выходе из трубы. Чтобы узнать, когда наступит кризис при повышении q , сначала из уравнения теплового баланса выражают энтальпию двухфазного потока в выходном сечении трубы:

$$h_{вых} = h_{вх} + \frac{4q\pi dl}{\rho v \pi d^2}. \quad (13.20)$$

Вычитая из левой и правой частей энтальпию жидкости на линии насыщения h' и деля затем на r , получают

$$x_{вых} = x_{вх} + \frac{4q\pi dl}{\rho v \pi d^2 r}. \quad (13.20a)$$

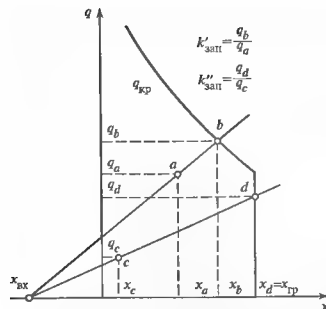


Рис. 13.13. Схема расчета коэффициентов запаса до кризиса

Из (13.20a) видно, что связь между q и $x_{вых}$ линейная. Следовательно, можно провести прямую через точку a (или точку b) и точку, лежащую на горизонтальной оси (ее координата $x_{вх}$). Прямая пересечет линию $q_{кр} = f(x)$ или вертикальную прямую $x = x_{гр}$ (см. рис. 13.13).

Коэффициенты запаса определяются как отношения q_c/q_a или q_d/q_b , т.е.

$$k'_{зап} = q_b/q_a; \quad (13.21)$$

$$k''_{зап} = q_d/q_c. \quad (13.22)$$

Формула (13.21) определяет запас до кризиса первого рода, а (13.22) — до кризиса второго рода.

13.7. Задачи с решениями

Задача 1. Найдите коэффициент теплоотдачи α и температуру поверхности нагрева t_c при пузырьковом кипении воды в большом объеме. Давление $p = 5,5$ МПа, а тепловая нагрузка $q = 0,2$ МВт/м².

Решение. Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{3,4 \cdot 55^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 55} (2 \cdot 10^5)^{2/3} = 31 \, 760 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

При $p = 5,5$ МПа $t_s = 270$ °С. Температура

$$t_c = t_s + q/\alpha = 270 + \frac{2 \cdot 10^5}{3,176 \cdot 10^4} = 276,3 \text{ °С}.$$

Ответ. $\alpha = 31 \, 760 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$; $t_c = 276,3$ °С.

Задача 2. Температура поверхности нагрева парогенератора $t_c = 268^\circ\text{C}$. Давление пара $p = 4,7$ МПа. Найдите расход производимого пара в расчете на 1 м^2 поверхности нагрева.

Решение. При $p = 4,7$ МПа $t_s = 260^\circ\text{C}$ и $\Delta t = t_c - t_s = 8^\circ\text{C}$. Так как $\alpha = q/\Delta t$, то по формуле Лабунцова

$$\frac{q}{\Delta t} = \frac{3,4p^{0,18}}{1 - 0,0045p} q^{2/3}.$$

Подставляя в эту формулу заданные значения величин, получаем $q = 2,54 \cdot 10^5$ Вт/м². При $p = 4,7$ МПа $r = 1661$ кДж/кг. Таким образом, $G = q/r = 2,54 \cdot 10^5 / (1,661 \cdot 10^6) = 0,15$ кг/(м² · с).

Ответ. Расход образующегося пара равен $0,15$ кг/(м² · с).

Задача 3. По трубкам парогенератора АЭС протекает теплоноситель (вода под давлением 13 МПа). Средняя температура воды $t = 285^\circ\text{C}$. На наружной поверхности кипит вода (рабочее тело). Давление производимого пара $p = 47 \cdot 10^5$ Па ($t_s = 260^\circ\text{C}$). Скорость воды в трубках (их внутренний диаметр равен 13,2 мм) составляет 3 м/с. Найдите среднюю тепловую нагрузку q поверхности теплообмена. Известно, что сумма термических сопротивлений стенки трубы и оксидных пленок составляет $8,95 \cdot 10^{-5}$ м² · К/Вт.

Решение. Рассчитаем коэффициент теплоотдачи от теплоносителя к стенке трубки. При $t = 285^\circ\text{C}$ для воды $\rho = 749$ кг/м³; $\mu = 95,7 \cdot 10^{-6}$ Па · с; $\lambda = 0,578$ Вт/(м · К); $Pr = 0,876$. Число Рейнольдса для воды в трубке

$$Re = \frac{749 \cdot 3 \cdot 0,0132}{95,7 \cdot 10^{-6}} = 3,1 \cdot 10^5.$$

По формуле Петухова получаем $Nu = 509$. Тогда $\alpha_n = 509 \cdot 0,578 / 0,0132 = 22\,288$ Вт/(м² · К). Термическое сопротивление $R_\alpha = \alpha_n^{-1} = 4,48 \cdot 10^{-5}$ м² · К/Вт.

Коэффициент теплоотдачи для кипящей воды

$$\alpha = \frac{3,4 \cdot 47^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 47} q^{2/3} = 7,85 q^{2/3}.$$

Для определения q запишем уравнение теплопередачи:

$$q = \frac{285 - 260}{4,48 \cdot 10^{-5} + 8,95 \cdot 10^{-5} + 0,127 q^{-2/3}}.$$

Решая это уравнение, получаем $q = 136$ кВт/м².

Ответ. Тепловая нагрузка $q = 136$ кВт/м².

Задача 4. Плотность подводимого к поверхности нагрева теплового потока $q = 6$ МВт/м². Возможен ли теплоотвод при пузырьковом кипении воды ($p = 4,7$ МПа)?

Решение. Максимальная плотность теплового потока при пузырьковом кипении равна $q_{кр1}$. При $p = 4,7$ МПа $\rho'' = 23,7$ кг/м³; $\rho' = 784$ кг/м³; $\mu' = 1,06 \cdot 10^{-4}$ Па · с; $\sigma = 2,37 \cdot 10^{-2}$ Н/м; $r = 1,66 \cdot 10^6$ Дж/кг.

По формуле Кутателадзе

$$q_{кр1} = 0,14 \cdot 1,66 \cdot 10^6 \cdot \sqrt[4]{23,7} \cdot \sqrt[4]{0,0237 \cdot 9,8(784 - 23,7)} = 4,13 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2.$$

По формуле Ягова

$$q_{кр1} = 0,06 \cdot 1,66 \cdot 10^6 \cdot 23,7^{0,6} \cdot 0,0237^{0,4} \left[\frac{9,8(784 - 23,7)}{1,06 \cdot 10^{-4}} \right]^{0,2} = 5,53 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ. Так как $q > q_{кр1}$, то теплоотвод возможен только при пленочном кипении воды.

Задача 5. Рассчитайте температуру поверхности нагрева (горизонтальная трубка диаметром $d = 12$ мм) для двух случаев: а) режим кипения воды пузырьковый; б) режим кипения пленочный. Для обоих случаев $q = 1,54 \cdot 10^5$ Вт/м², $p = 0,101$ МПа.

Решение. Коэффициент теплоотдачи $\alpha = q/\Delta t$. При пузырьковом режиме кипения

$$\frac{q}{\Delta t} = \frac{3,4 \cdot 1,01^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 1,01} q^{2/3}$$

Отсюда $\Delta t = 15,7^\circ\text{C}$ и $t_c = 100 + 15,7 = 115,7^\circ\text{C}$.

Для расчета Δt при пленочном режиме кипения задаемся температурой $t_c = 900^\circ\text{C}$. Тогда средняя температура паровой пленки будет составлять 500°C . При этой температуре и данном давлении для перегретого пара [1] $\rho_n = 0,281$ кг/м³; $\lambda_n = 6,69 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К); $\mu_n = 28,58 \cdot 10^{-6}$ Па · с; $c_{pn} = 2,135$ кДж/(кг · К). При $t_s = 100^\circ\text{C}$ $r = 2257$ кДж/кг и плотность воды $\rho_{ж} = 958,4$ кг/м³.

Эффективная теплота парообразования

$$r_* = 2257 + 0,5 \cdot 2,135(900 - 100) = 3111 \text{ кДж/кг}.$$

При пленочном режиме кипения

$$\frac{q}{\Delta t} = 0,62 \sqrt[4]{\frac{\lambda_n^3 (\rho_{ж} - \rho_n) g r_*}{\nu_n d \Delta t}}.$$

Поставляя в последнюю формулу известные величины, получаем $\Delta t = 800^\circ\text{C}$ и $t_c = 100 + 800 = 900^\circ\text{C}$. Так как полученное значение t_c совпадает с принятым в первом приближении, повторного расчета не требуется. Найденная температура ($t_c = 900^\circ\text{C}$) является приближенной, так как в расчете не учитывался перенос теплоты излучением через паровую пленку.

Ответ. При пузырьковом кипении $t_c = 115,7^\circ\text{C}$ ($\alpha = 9800 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$), а при пленочном кипении $t_c = 900^\circ\text{C}$ ($\alpha = 192 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$).

Задача 6. Экранная поверхность нагрева парового котла выполнена из труб с диаметром и толщиной стенки 40×5 мм. Теплопроводность стенок труб $\lambda = 40 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Рассчитайте температуры внутренней и незагрязненной наружной поверхностей труб при движении в них кипящей воды (пузырьковый режим). Давление $p = 18,67 \text{ МПа}$; массовая скорость $\bar{\rho}v = 1500 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. Считайте, что плотность теплового потока $q = 3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$ равномерно распределена по наружному периметру труб.

Решение. При $p = 18,67 \text{ МПа}$ $t_s = 360^\circ\text{C}$. Для воды $\lambda = 0,423 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\mu = 0,602 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\text{Pr} = 2,13$. Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\bar{\rho}v d}{\mu} = \frac{1500 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{0,602 \cdot 10^{-4}} = 7,5 \cdot 10^5.$$

По формуле Петухова находим $\text{Nu} = 1831$. Коэффициент теплоотдачи при движении однофазной среды

$$\alpha_{\text{конв}} = 1831 \frac{0,423}{30 \cdot 10^{-3}} = 25\,817 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

По формуле Лабунцова рассчитаем коэффициент теплоотдачи для кипения воды в большом объеме:

$$\alpha_{\text{кип}} = \frac{3,4 \cdot 186,7^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 186,7} (3 \cdot 10^5)^{2/3} = 244\,000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Так как $\alpha_{\text{кип}}/\alpha_{\text{конв}} > 3$, то коэффициент теплоотдачи при кипении в трубе $\alpha = \alpha_{\text{кип}} = 244\,000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Температура внутренней поверхности

$$t_{c1} = 360 + \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{2,44 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3}} = 361,6^\circ\text{C}.$$

Температура наружной поверхности

$$t_{c2} = 361,6 + \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 40} \ln \frac{40}{30} = 361,6 + 43,1 = 404,7^\circ\text{C}.$$

В данном случае термическое сопротивление стенки трубы больше термического сопротивления теплоотдачи к кипящей воде.

Ответ. $t_{c1} = 361,6^\circ\text{C}$; $t_{c2} = 404,7^\circ\text{C}$.

Задача 7. В равномерно обогреваемую трубу поступает вода со следующими параметрами: $t = 240^\circ\text{C}$; $p = 6,42 \text{ МПа}$; $v = 0,6 \text{ м/с}$. Внутренний диаметр трубы $d = 14$ мм, ее длина $l = 3,5$ м. Тепловая нагрузка на внутренней поверхности $q = 150 \text{ кВт/м}^2$. Найдите длину участка подогрева воды до температуры насыщения $l_{\text{эк}}$ (длину экономайзерного участка); координату точки A (рис. 13.11) начала развитого поверхностного кипения z_A ; расходное массовое паросодержание на выходе из трубы $x_{\text{вых}}$ и температуру стенки t_c на участке кипения насыщенной жидкости.

Решение. Для воды при $p = 6,42 \text{ МПа}$ $t_s = 280^\circ\text{C}$; $\rho = 750,4 \text{ кг/м}^3$; $c_p = 5,294 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$; $r = 1540 \text{ кДж/кг}$; $\lambda = 0,581 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\nu = 0,1245 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\text{Pr} = 0,85$. При средней температуре воды $t = 260^\circ\text{C}$ $c_p = 4,984 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Расход воды

$$G = 750,4 \cdot 0,6 \frac{\pi}{4} 0,014^2 = 0,0692 \text{ кг/с}.$$

Длину экономайзерного участка найдем из уравнения теплового баланса: $q_{\text{пл}} l_{\text{эк}} = G c_p (t_s - t_{\text{ж.вх}})$. Подставляя в это уравнение известные величины, получаем

$$l_{\text{эк}} = \frac{0,0692 \cdot 4,984 (280 - 240)}{150 \pi \cdot 0,014} = 2,09 \text{ м}.$$

Вычисляем число Рейнольдса для воды:

$$\text{Re} = \frac{0,6 \cdot 0,014}{0,1245 \cdot 10^{-6}} = 6,74 \cdot 10^4.$$

Число Нуссельта находим по формуле Михеева:

$$\text{Nu} = 0,021 (6,74 \cdot 10^4)^{0,8} \cdot 0,85^{0,43} = 142,8.$$

Коэффициент теплоотдачи для однофазной среды

$$\alpha_{\text{конв}} = 142,8 \frac{0,581}{0,014} = 5926 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Коэффициент теплоотдачи при кипении воды в большом объеме находим по формуле Лабунцова:

$$\alpha_{\text{кип}} = \frac{3,4 \cdot 64,2^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 64,2} (1,5 \cdot 10^5)^{2/3} = 28\,460 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Температура воды, соответствующая точке A ,

$$T_{ж} - 280 - 1,5 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{5926} - \frac{1}{28460} \right) = 260 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Находим длину участка трубы, где отсутствует кипение жидкости:

$$l_A = 2,09 \frac{260 - 240}{280 - 240} = 1,045 \text{ м}.$$

Определяем расход пара в выходном сечении трубы:

$$G_{п} = \frac{150\pi \cdot 0,014(3,5 - 2,09)}{1540} = 0,006 \text{ кг/с}.$$

Расходное массовое паросодержание на выходе из трубы

$$x_{\text{вых}} = \frac{0,006}{0,0692} = 0,087.$$

Так как в нашем случае $\alpha_{\text{кип}}/\alpha_{\text{конв}} > 3$, то коэффициент теплоотдачи в зоне кипения насыщенной жидкости $\alpha - \alpha_{\text{кип}} = 28460 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Тогда

$$t_c = 280 + \frac{150000}{28460} = 285,3 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Такая же температура стенки будет и в зоне поверхностного кипения. Как видно, в отсутствие кризисов теплоотдачи температура парогенерирующего канала незначительно отличается от температуры насыщения.

Ответ. Температура стенки $t_c = 285,3 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Задача 8. В трубе диаметром $d = 8 \text{ мм}$ в условиях вынужденного движения кипит вода при $p = 11,8 \text{ МПа}$. Массовый расход смеси $G = 0,0502 \text{ кг/с}$. При каком паросодержании возникнет кризис теплообмена второго рода?

Решение. Массовая скорость

$$\bar{\rho v} = \frac{4 \cdot 0,0502}{\pi \cdot 0,008^2} = 1000 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

При этом значении $\bar{\rho v}$ и $p = 11,8 \text{ МПа}$ из табл. 13.2 находим: $x_{\text{гр}}^0 = 0,45$.

Ответ. Кризис теплообмена будет в том сечении трубы, для которого $x = 0,45$.

Задача 9. В испарителе ядерной энергоустановки с натриевым теплоносителем происходят нагревание воды в трубе до температуры t_c , ее испарение и частичный перегрев пара. Найдите длину участка испарения воды l , на котором паросодержание $0 \leq x \leq x_{\text{гр}}$. Трубы с диаметром и толщиной стенки $16 \times 2,5 \text{ мм}$ изготовлены из нержавеющей стали ($\lambda = 18 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$). Скорость воды в них на входе в испарительный участок составляет $1,56 \text{ м/с}$, а давление — $12,86 \text{ МПа}$. Температура натрия, омывающего наружную поверхность

труб, на участке испарения изменяется от 450 до $380 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи от натрия к поверхности труб составляет $35000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Решение. При $p = 12,86 \text{ МПа}$ $t_s = 330 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $r = 1137 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$. Для воды $\rho = 640,4 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0,745 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\lambda = 0,480 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\text{Pr} = 10$. Массовая скорость $\bar{\rho v} = 640,4 \cdot 1,56 = 1000 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. При $\bar{\rho v} = 1000 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$ и $p = 12,86 \text{ МПа}$ $x_{\text{гр}} = 0,41$.

Вычисляем число Рейнольдса для воды:

$$\text{Re} = \frac{1000 \cdot 0,011}{0,745 \cdot 10^{-4}} = 1,47 \cdot 10^5.$$

По формуле Петухова находим $\text{Nu} = 295$, откуда $\alpha_{\text{конв}} = 295 \cdot 0,480/0,011 = 13000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Выражаем коэффициент теплоотдачи к кипящей воде через плотность теплового потока q :

$$\alpha_{\text{кип}} = \frac{3,4 \cdot 128,6^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 128,6} q^{2/3} = 19,34 q^{2/3}. \quad (13.23)$$

Принимаем $\alpha_{\text{кип}}/\alpha_{\text{конв}} > 3$. Тогда при кипении в трубе $\alpha = \alpha_{\text{кип}}$. Пусть q_1 и q_2 — плотности теплового потока в начале и конце искомого участка испарения. Составим формулу для отыскания q_1 :

$$q_1 = \frac{380 - 330}{\frac{1}{35000} + \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{18} + \frac{1}{19,34 q_1^{2/3}}} = \frac{50}{1,69 \cdot 10^{-4} + 5,17 \cdot 10^{-2} q_1^{-2/3}}.$$

Отсюда получаем: $q_1 = 2,7 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$; $\alpha_k = 8,1 \cdot 10^4 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ и $\alpha_k/\alpha_{\text{конв}} = 6,2 > 3$ (ранее принятое допущение выполняется).

Найдем температуру натрия t_{Na} в том сечении, где $x = x_{\text{гр}}$. Из балансных соотношений следует, что

$$t_{\text{Na}} = 380 + (450 - 380)0,41 = 408,7 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Примем, что на всем участке $0 \leq x \leq x_{\text{гр}}$ внутри трубы коэффициент теплоотдачи определяется формулой (13.23). Тогда q_2 можно найти таким же образом, как и q_1 : $q_2 = 4,4 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$. Среднее значение $\bar{q} = 0,5(270 + 440) = 355 \text{ кВт/м}^2$. При этом $l = 3,6 \text{ м}$.

Ответ. Искомая длина $l = 3,6 \text{ м}$.

Задача 10. В трубку диаметром $d = 8 \text{ мм}$ поступает вода с температурой t_s (давление $p = 13,8 \text{ МПа}$). Ее массовая скорость $\bar{\rho v} = 1000 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. Най-

дите такие значения q , при которых в трубке не будет кризиса теплоотдачи первого рода. Определите также длину участка кипения без кризиса.

Решение. При $\bar{p}v = 1000 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$ и $p = 13,8 \text{ МПа}$ из табл. 13.2 находим $x_{\text{гр}}^0 = 0,35$. Из табл. 13.1 видно, что при $x_{\text{гр}}^0 = 0,35$ и тех же значениях p и $\bar{p}v$

$q_{\text{кр}}^0 = 1,15 \text{ МВт/м}^2$. Следовательно, искомые значения $q < 1,15 \text{ МВт/м}^2$.

При $q = \text{const}$ и $x_{\text{вх}} = 0$

$$x = \frac{q\pi dz}{Gr} = \frac{4qz}{\rho v d}. \quad (13.24)$$

При $p = 13,8 \text{ МПа}$ $r \approx 1970 \text{ кДж/кг}$. Полагая в (13.24) $q = 1,15 \text{ МВт/м}^2$, получаем

$$z = \frac{0,35 \cdot 1000 \cdot 1970 \cdot 0,008}{4 \cdot 1150} = 1,2 \text{ м.}$$

Ответ. Значения $q < 1,15 \text{ МВт/м}^2$, а искомая длина участка трубы равна 1,2 м.

Часть четвертая

МАССООБМЕН

Глава четырнадцатая

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ МАССО- И ТЕПЛООБМЕНА

14.1. Основные понятия

Процессы массообмена происходят как в однокомпонентной, так и в многокомпонентной среде. В технических приложениях часто встречается случай двухкомпонентной среды. Смесь двух веществ называется *бинарной*. Обогащение воздуха кислородом, выделяемым листьями растений, рассматривается как процесс массообмена в бинарной смеси газов. Широко распространенные процессы испарения в паровоздушную среду и конденсации пара из смеси «пар—воздух» также относятся к случаю массообмена в бинарной смеси.

Перенос массы вещества из одной области пространства в другую может осуществляться как в неподвижной (с макроскопической точки зрения), так и в движущейся многокомпонентной среде.

При наличии массопереноса в движущейся среде скорость движения отдельных компонентов вследствие диффузии может не совпадать со скоростью движения смеси в целом. В качестве последней скорости можно принимать как среднюю объемную, так и среднюю массовую скорость.

По определению *средняя массовая скорость смеси*

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i}. \quad (14.1)$$

В (14.1) n — число компонентов смеси; ρ_i — масса i -го компонента, содержащаяся в единице объема (парциальная плотность); v_i — скорость движения i -го компонента. Ясно, что *плотность смеси*

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i. \quad (14.2)$$

Величина $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ называется *вектором плотности потока массы смеси*, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Иначе эта величина называется импульсом единицы объема смеси. Для i -го компонента $\mathbf{J}_i = \rho_i \mathbf{v}_i$, и в соответствии с (14.1) и (14.2)

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i = \mathbf{J}.$$

Различают конвективный и диффузионный процессы переноса массы. Плотностью *конвективного* переноса массы i -го компонента называется величина, равная произведению $\rho_i \mathbf{v}_i$, а разность плотностей полного и конвективного потоков массы представляет собой плотность *диффузионного* потока i -го компонента, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$:

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{J}_i - \rho_i \mathbf{v} = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}). \quad (14.3)$$

Диффузионный поток массы не зависит от выбора инерциальной системы отсчета координат, а конвективный — зависит. Важным является то, что всегда

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{j}_i = 0. \quad (14.4)$$

Равенство (14.4) доказывается просто. Действительно,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{j}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i - \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{v} = \mathbf{J} - \mathbf{v} \sum_{i=1}^n \rho_i = \mathbf{J} - \rho \mathbf{v} = 0.$$

В молекулярно-кинетической теории наличие диффузионного потока объясняется тем, что средняя скорость теплового движения молекул i -го компонента в многокомпонентной смеси отлична от нуля. В то же время средняя массовая скорость теплового движения всех компонентов всегда равна нулю. Отсюда следует равенство (14.4).

Состав смеси можно охарактеризовать различными способами. Отношение парциальной плотности i -го компонента к плотности смеси называется *массовой концентрацией* (массовой долей) компонента:

$$c_i = \rho_i / \rho. \quad (14.5)$$

Так как $\sum_{i=1}^n \rho_i = \rho$, то

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1. \quad (14.6)$$

Для бинарной смеси

$$c_1 + c_2 = 1. \quad (14.6a)$$

При наличии химических реакций количество участвующего в реакции вещества обычно измеряется в молях. Для удобства расчетов вводится понятие молярной массы вещества M , г/моль ($\text{кг}/\text{кмоль}$). Если m — масса вещества, кг; ν — количество вещества (число киломолей), то $M = m/\nu$. Молярная масса — величина постоянная для данного вещества.

Молярная концентрация — это число киломолей i -го компонента, содержащихся в единице объема смеси, $\text{кмоль}/\text{м}^3$:

$$C_i = \nu_i / V. \quad (14.7)$$

Так как $\nu_i = m_i / M_i$, $\rho_i = m_i / V$, а $c_i = \rho_i / \rho$, то $C_i = \rho c_i / M_i$.

Состав газовой смеси можно описать с помощью парциальных давлений компонентов. Пусть p_i — парциальное давление i -го газа, а p — давление смеси. Для идеально-газовой смеси по закону Дальтона $p = \sum_{i=1}^n p_i$,

причем, согласно уравнению Клапейрона Менделеева,

$$p_i V = \frac{m_i}{M_i} RT,$$

где $R = 8314 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$ — универсальная газовая постоянная.

Очевидно, что

$$C_i = \frac{p_i}{RT}. \quad (14.7a)$$

Нетрудно доказать, что

$$\frac{p_i}{p} = \frac{c_i}{M_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{M_i} \right)^{-1}; \quad (14.8)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{M_i}.$$

Уравнение состояния (14.8) входит в математическое описание процессов тепло- и массообмена в газовой смеси.

Объемная доля i -го компонента газовой смеси равна отношению парциального давления компонента к давлению смеси:

$$r_i = p_i / p. \quad (14.8a)$$

Содержание водяного пара во влажном воздухе характеризуется относительной влажностью

$$\Phi = p_n / p_s,$$

где p_n — парциальное давление пара во влажном воздухе; p_s — давление насыщенного пара при температуре воздуха; температура, при которой значение p_n становится равным значению p_s , называется точкой росы.

При изучении совместных процессов тепло- и массообмена используется понятие *энтальпии смеси*. Для смеси идеальных газов

$$h = \sum_{i=1}^n c_i h_i, \quad (14.9)$$

где h_i — энтальпия i -го компонента (относится к массе этого компонента), кДж/кг.

Если пренебречь теплотой смешения, то соотношение (14.9) можно использовать не только для смеси идеальных газов, но и в других случаях.

При наличии химических реакций следует учитывать *энтальпию образования* i -го компонента h_i^0 (см. § 15.4). При этом удельная энтальпия при произвольной температуре T

$$h_i = \int_{T_0}^T c_{pi} dT + h_i^0, \quad (14.10)$$

где T_0 — температура, при которой $h_i = h_i^0$.

Теплоемкость смеси постоянного состава называется «замороженной»:

$$\bar{c}_p = \sum_{i=1}^n c_{pi} c_i. \quad (14.11)$$

Теплоемкость $\bar{c}_p$ в процессах тепломассообмена является функцией координат точки. При наличии химических реакций c_i может быть функцией времени, а в стационарных процессах без химических реакций она зависит только от координат точки.

14.2. Закон Фика. Коэффициент диффузии

Диффузионные потоки вещества возникают вследствие неоднородного распределения концентрации компонентов смеси в пространстве. Диффузия, обусловленная градиентом концентрации компонента, называется *концентрационной диффузией*. Для бинарной смеси справедлив закон Фика:

$$j_1 = -\rho D \text{grad} c_1; \quad (14.12)$$

$$j_2 = -\rho D \text{grad} c_2, \quad (14.12a)$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — плотность смеси; D — коэффициент диффузии, м²/с.

По формуле записи закон Фика аналогичен закону теплопроводности Фурье. Знак «-» в (14.12) указывает на то, что векторы j_1 и $\text{grad} c_1$ в данной точке среды направлены в противоположные стороны. Такой же смысл имеет знак «-» и в (14.12a). Согласно закону Фика, чем больше градиент концентрации, тем больше диффузионный поток вещества.

Для многокомпонентной смеси закономерности процессов концентрационной диффузии сложны. Поэтому часто, допуская не очень большую погрешность, все компоненты смеси разбивают на два сорта (тяжелые и легкие) и рассматривают как бы бинарную смесь с единым для смеси коэффициентом диффузии D , а вектор j_i ($i = 1, 2, \dots, n$) рассчитывают по формуле

$$j_i = -\rho D \text{grad} c_i. \quad (14.13)$$

Коэффициент диффузии для газовых смесей и растворенных веществ в жидком растворителе различный, он практически не зависит от концентрации. Для смеси «пар—воздух» (воздух рассматривается как газ постоянного состава) при $T_0 = 273$ К и $p_0 = 0,101$ МПа $D_0 = 0,216 \cdot 10^{-4}$ м²/с, а при других значениях T и p

$$D = D_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,8} \frac{p_0}{p}. \quad (14.14)$$

Коэффициент диффузии для жидких растворов значительно ниже, чем для газовых смесей, и существенно зависит от температуры. При $T_0 = 293$ К для кислорода, растворенного в воде, $D_0 = 1,8 \cdot 10^{-9}$ м²/с. Для разбавленных растворов (концентрация растворенного вещества $c_1 \leq 0,1$)

$$D = D_0 \frac{T}{T_0} \frac{\mu_0}{\mu},$$

где μ_0, μ — динамические вязкости растворителя при температурах T_0 и T .

Значения коэффициентов диффузии содержатся в справочниках (см., например, [47]).

Из элементарной молекулярно-кинетической теории газов следует, что $D \approx l v_m$, где l — длина свободного пробега; v_m — скорость теплового движения молекул. При этом оказывается, что коэффициенты диффузии, температуропроводности и кинематические вязкости равны друг другу ($D = a = \nu$).

Более точная теория диффузии в бинарной смеси газов при $p = \text{const}$, $T = \text{const}$ дает следующие выражения для проекции плотностей потоков массы первого и второго компонентов на ось Ox :

$$J_1 = -D m_1 \frac{dn_1}{dx};$$

$$J_2 = -Dm_2 \frac{dn_2}{dx},$$

где n_1, n_2 — число молекул первого и второго сорта в единице объема; m_1, m_2 — массы молекул первого и второго сорта.

При $p = \text{const}$ и $T = \text{const}$ $n_1 + n_2 = n = \text{const}$ и $dn_1/dx = -dn_2/dx$. Так как оказывается, что сумма $J_1 + J_2 \neq 0$, то диффузия вызывает движение газа в целом (направленное движение) со скоростью

$$v = \frac{J_1 + J_2}{\rho} = \frac{D(m_2 - m_1)}{\rho} \frac{dn_1}{dx}.$$

Если из J_1 и J_2 вычесть конвективные потоки компонентов, равные $\rho_1 v$ и $\rho_2 v$, то можно получить диффузионные потоки в виде

$$j_1 = -m_1 m_2 \frac{n}{\rho} D \frac{d}{dx} \left(\frac{n_1}{n} \right); \quad (14.15)$$

$$j_2 = -m_1 m_2 \frac{n^2}{\rho} D \frac{d}{dx} \left(\frac{v_2}{n} \right). \quad (14.5a)$$

Нетрудно доказать, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{n_1}{n} \right) = \frac{m^2}{m_1 m_2} \frac{dc_1}{dx}. \quad (14.15b)$$

Здесь $m = \rho/n$. Подставляя (14.15b) в (14.15), получаем закон Фика (14.12), записанный в проекции на ось Ox . При этом для коэффициента диффузии из теории вытекает формула

$$D = \frac{3}{8n\sigma_{12}^2} \sqrt{\frac{\pi kT}{2\mu_{12}}}. \quad (14.16)$$

В (14.16) k — постоянная Больцмана; $\sigma_{12} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$, где σ_1 и σ_2 — эффективные диаметры молекул первого и второго сорта;

$$\mu_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2).$$

В общем случае процесс переноса массы данного компонента происходит тогда, когда в пространстве существует неоднородное поле химического потенциала этого компонента. Для бинарной смеси теоретически выводятся следующие выражения для плотностей диффузионных потоков:

$$j_1 = -\rho D \left(\text{grad} c_1 + \frac{kT_{12}}{T} \text{grad} T + \frac{k_{p12}}{p} \text{grad} p \right);$$

$$j_2 = -\rho D \left(\text{grad} c_2 + \frac{kT_{21}}{T} \text{grad} T + \frac{k_{p21}}{p} \text{grad} p \right).$$

В последних формулах D — коэффициент диффузии бинарной смеси (иногда обозначается D_{12} , причем $D_{12} = D_{21}$; в однокомпонентной среде $D = D_{11}$, где D_{11} — коэффициент самодиффузии); k_{T12} и k_{T21} — безразмер-

ные коэффициенты термодиффузии; k_{p12} и k_{p21} — безразмерные коэффициенты бародиффузии. В силу (14.4) $k_{T12} + k_{T21} = 0$ и $k_{p12} + k_{p21} = 0$. Коэффициенты термодиффузии и бародиффузии зависят от c_1 и c_2 и обращаются в нуль при $c_1 \rightarrow 1$ и $c_2 \rightarrow 1$.

Влияние бародиффузии на массоперенос настолько мало, что им можно пренебречь. Термодиффузия существенно сказывается лишь тогда, когда массы молекул двух компонентов газовой смеси резко отличаются друг от друга и велики градиенты температуры и средние концентрации компонентов. На практике влиянием термодиффузии пренебрегают и считают, что диффузионный поток массы обусловлен только градиентом концентрации компонента.

Для отыскания функций $c_i(x, y, z, \tau)$ составляют уравнения диффузии, неразрывности и движения, а для совместных процессов массо- и теплообмена еще и уравнение энергии. В случае бинарной смеси задача тепломассообмена упрощается, так как сумма $c_1 + c_2 = 1$ и достаточно найти поле концентрации одного компонента.

14.3. Уравнения диффузии и неразрывности

Рассмотрим многокомпонентный поток смеси, в которой происходят химические реакции. Выберем систему координат $Oxyz$ (рис. 14.1). В точке M с координатами x, y, z в произвольный момент времени τ скорость i -го компонента равна v_i , скорость j -го компонента — v_j , а средняя массовая скорость — v . Приток массы i -го компонента через поверхность неподвижного контрольного объема ΔV за время $\Delta \tau$ равен $-\text{div}_i \rho_i v_i \Delta V \Delta \tau$. Массу i -го компонента, образующегося в единицу времени в единице объема в результате химических реакций, обозначим κ_i , кг/(м³ · с). Составим уравнение баланса массы:

$$\rho_i(x, y, z, \tau + \Delta \tau) \Delta V = \rho_i(x, y, z, \tau) \Delta V -$$

$$-\text{div}_i \rho_i v_i \Delta V \Delta \tau + \kappa_i \Delta V \Delta \tau.$$

Сократим его члены на ΔV и положим $\Delta \tau \rightarrow 0$. Тогда получим уравнение диффузии в виде

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + \text{div}_i \rho_i v_i = \kappa_i. \quad (14.17)$$

В (14.17) можно произвести замену:

$$J_i = \rho_i v_i. \text{ Уравнение (14.17) записано}$$

для i -го компонента ($i = 1, 2, \dots, n$). Со-

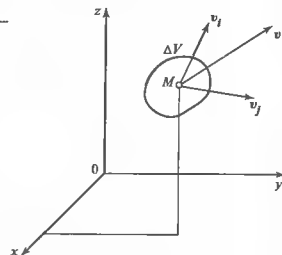


Рис. 14.1. К выводу уравнения диффузии

гласно основному закону химических реакций, $\sum_{i=1}^n \kappa_i = 0$. Складывая n уравнений вида (14.17), получаем уравнение неразрывности для смеси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (14.18)$$

Видно, что (14.18) совпадает с уравнением неразрывности для однородной среды.

Преобразуем (14.17). Учтем, что $\rho_i = c_i \rho$;

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} = \rho \frac{\partial c_i}{\partial \tau} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial \tau};$$

$$\operatorname{div} \rho_i \mathbf{v}_i = \operatorname{div} \rho_i \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{j}_i = c_i \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} c_i + \operatorname{div} \mathbf{j}_i.$$

Последние соотношения подставим в (14.17) и получим другую форму уравнения диффузии:

$$\rho \left(\frac{\partial c_i}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} c_i \right) = -\operatorname{div} \mathbf{j}_i + \kappa_i. \quad (14.19)$$

Выражение в скобках в левой части (14.19) — субстанциональная производная $dc_i/d\tau$. Тогда (14.19) может быть записано в виде

$$\rho \frac{dc_i}{d\tau} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_i + \kappa_i. \quad (14.19a)$$

Далее заметим, что в (14.17)

$$\rho \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_i, \text{ а в (14.18) } \rho \mathbf{v} = \mathbf{J}. \text{ Умножая}$$

(14.17) и (14.18) почленно на dV и интегрируя эти уравнения, с учетом формулы Остроградского—Гаусса получа-

ем уравнения баланса массы i -го компонента и баланса массы смеси в целом для контрольного объема V , ограниченного замкнутой поверхностью площадью S :

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} dV + \int_S \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{n}_0 dS = \int_V \kappa_i dV; \quad (14.20)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV + \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 dS = 0, \quad (14.21)$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали (рис. 14.2).

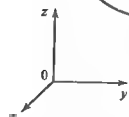
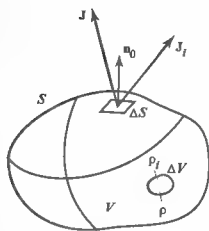


Рис. 14.2. К выводу уравнений (14.20) и (14.21)

14.4. Уравнения движения смеси

Рассматривая составляющие баланса импульса смеси в элементарном объеме ΔV за время Δt , аналогично тому, как это было сделано в § 4.5, можно получить три уравнения движения (в проекциях на оси координат Ox , Oy , Oz). Например, для оси Ox приток импульса в расчете на единицу объема в единицу времени

$$-\operatorname{div} \sum_{i=1}^n \rho_i v_{ix} \mathbf{v} = -\operatorname{div} \rho v_x \mathbf{v},$$

где средняя массовая скорость $\mathbf{v}$ определяется по формуле (14.1), а

$$v_x = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i v_{ix}}{\rho}.$$

Составляющая баланса импульса, обусловленная нестационарностью процесса движения, запишется как

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{i=1}^n \rho_i v_{ix} = \frac{\partial \rho v_x}{\partial \tau}.$$

Проекция силы тяжести, действующей на компоненты смеси, $\sum_{i=1}^n \rho_i g_x = \rho g_x$. Учитывая также напряжения σ_{xx} , σ_{yx} и σ_{zx} , окончательно получаем уравнение движения в проекции на ось Ox :

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial \tau} + \operatorname{div} \rho v_x \mathbf{v} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}. \quad (14.22)$$

Напряжения в движущейся смеси описываются обобщенным законом Ньютона (см. § 4.4), в котором μ — динамическая вязкость, зависящая от концентрации и вязкости компонентов.

Для газовых смесей приближенные значения μ можно получить по формуле Уилке:

$$\mu = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{1 + \sum_{k=1}^n G_{ik} \frac{x_k}{x_i}}, \quad (14.23)$$

где

$$x_i = \left(\frac{c_i}{M_i} \right) / \left(\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{M_k} \right);$$

$$G_{ik} = \frac{[1 + (\mu_i/\mu_k)^{1/2} (M_k/M_i)^{1/4}]^2}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + M_i/M_k}}.$$

Для бинарной газовой смеси

$$\mu = \frac{\mu_1 c_1}{c_1 + c_2 \psi_{12}} + \frac{\mu_2 c_2}{c_2 + c_1 \psi_{21}} \quad (14.23a)$$

В (14.23a) μ_1 и μ_2 — динамические вязкости чистых газов при температуре смеси; c_1 и c_2 — массовые концентрации газов; ψ_{12} и ψ_{21} — коэффициенты, которые следует находить по формулам:

$$\psi_{12} = \frac{M_1/M_2}{\sqrt{8}(1 + M_1/M_2)^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{1/4} \right]^{-2};$$

$$\psi_{21} = \frac{M_2/M_1}{\sqrt{8}(1 + M_1/M_2)^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{1/4} \right]^{-2}.$$

С учетом обобщенного закона Ньютона и уравнения неразрывности (14.22) запишется в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} = & \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Уравнение (14.24) и аналогичные уравнения в проекциях на оси Oy и Oz по форме записи и содержанию ничем не отличаются от уравнений движения однородной жидкости.

В компактной форме три уравнения движения записываются в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j},$$

где

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$$

здесь $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta = 0$ при $i \neq j$.

Преобразуем два первых слагаемых в правой части (14.24). Введем гидростатическое давление p_0 , причем $\partial p_0 / \partial x = \rho_0 g_x$ (здесь ρ_0 — плотность смеси в некоторой точке пространства, например, вдали от поверхности раздела фаз). Тогда

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = (\rho - \rho_0) g_x - \frac{\partial p'}{\partial x},$$

где $p' = p - p_0$.

Величину $(\rho - \rho_0) g_x$ можно рассматривать как равнодействующую двух сил: силы тяжести и силы Архимеда. В уравнении движения этой величины учитывается свободная конвекция, возникающая из-за разности плотностей смеси в различных точках пространства.

14.5. Уравнение энергии. Число Льюнса

В многокомпонентной среде выделим неподвижный контрольный объем ΔV (см. рис. 14.1). Будем считать, что перенос энергии происходит при условии $p = \text{const}$, а теплотой трения можно пренебречь.

Приближенное уравнение энергии, которое мы получим при этих допущениях, будет соответствовать течению среды с относительно малой скоростью (число Маха для газа должно быть меньше 0,25).

Пренебрегая теплотой смешения, можно утверждать, что энтальпия смеси в объеме ΔV в момент времени τ составляет $\sum_{i=1}^n h_i \rho_i \Delta V =$

$$= \sum_{i=1}^n h_i c_i \rho \Delta V = \rho h \Delta V, \text{ а ее изменение за элементарный промежуток времени равно } \frac{\partial \rho h}{\partial \tau} \Delta V \Delta \tau.$$

Приток энтальпии в ΔV за $\Delta \tau$

$$-\operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^n \rho_i h_i \mathbf{v}_i \right) \Delta V \Delta \tau = -\operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^n \rho_i h_i \mathbf{v} \right) \Delta V \Delta \tau - \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^n h_i \mathbf{j}_i \right) \Delta V \Delta \tau.$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{j}_i / \rho_i$. Подведенное к ΔV за $\Delta \tau$ количество теплоты (путем теплопроводности и излучения) равно $-\operatorname{div} \mathbf{q}_\Sigma \Delta V \Delta \tau$, где $\mathbf{q}_\Sigma = -\lambda \operatorname{grad} T + \mathbf{q}_R$, здесь λ — теплопроводность смеси; $\mathbf{q}_R$ — вектор плотности потока излучения (см. § 16.2 и 19.4).

Учитывая рассмотренные выше составляющие баланса энтальпии, на основании первого закона термодинамики получаем уравнение энергии для смеси компонентов:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial \tau} + \operatorname{div} \rho h \mathbf{v} = -\operatorname{div} \mathbf{q}_\Sigma - \operatorname{div} \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{j}_i. \quad (14.25)$$

Уравнение (14.25) справедливо как при отсутствии, так и при наличии химических реакций в многокомпонентной среде. В последнем случае в h_i следует учитывать энтальпию образования. О том, как определяется $\mathbf{q}_R$,

будет сказано ниже (см. гл. 19). Если перенос энергии излучением отсутствует, то $q_R = 0$.

С учетом (14.18) уравнение (14.25) можно представить в виде

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\operatorname{div} q_{\Sigma} - \operatorname{div} \sum_{i=1}^n h_i j_i. \quad (14.25a)$$

Далее положим $q_R = 0$. Тогда $q_{\Sigma} = q = -\lambda \operatorname{grad} T$. В общем виде (условие $\rho = \text{const}$ не выполняется, существенна теплота трения) уравнение энергии записывается следующим образом:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div} \sum_{i=1}^n h_i j_i + \frac{dP}{dt} + \epsilon. \quad (14.25b)$$

Величина ϵ представляет собой диссипативную функцию (см. § 4.6). Теплопроводность смеси λ определяется экспериментально и в (14.25b) считается известной величиной (она зависит от концентраций компонентов). Для газовых смесей λ можно найти по теоретическим формулам (см. § 1.3).

В уравнение (14.25b) входят энтальпия h и температура T , но h зависит от T , поэтому (14.25b) целесообразно преобразовать так, чтобы в него вошла только энтальпия. Это можно сделать следующим образом. Запишем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} h &= \operatorname{grad} \sum_{i=1}^n c_i h_i = \sum_{i=1}^n c_i \operatorname{grad} h_i + \sum_{i=1}^n h_i \operatorname{grad} c_i = \\ &= \sum_{i=1}^n c_{p_i} c_i \operatorname{grad} T + \sum_{i=1}^n h_i \operatorname{grad} c_i. \end{aligned}$$

Здесь $\sum_{i=1}^n c_{p_i} c_i = \bar{c}_p$ — «замороженная» теплоемкость смеси (она соответствует теплоемкости при неизменном составе смеси). При этом

$$\lambda \operatorname{grad} T = \frac{\lambda}{\bar{c}_p} \operatorname{grad} h - \frac{\lambda}{\bar{c}_p} \sum_{i=1}^n h_i \operatorname{grad} c_i.$$

Последнее соотношение следует подставить в (14.25b). Предварительно разобьем компоненты на две группы (легкие и тяжелые) и используем закон Фика: $j_i = -\rho D \operatorname{grad} c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Введем также для смеси *число Прандтля* и *число Льюиса* (последнее иногда называют числом Льюиса — Семенова):

$$\operatorname{Pr} = \frac{\mu \bar{c}_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}; \quad (14.26)$$

$$\operatorname{Le} = \frac{\rho D \bar{c}_p}{\lambda} = \frac{D}{a}. \quad (14.27)$$

После всех преобразований вместо (14.25b) получим следующее уравнение энергии.

$$\rho \frac{dh}{dt} = \operatorname{div} \left(\frac{\mu}{\operatorname{Pr}} \operatorname{grad} h \right) - \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^n h_i \rho D \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Le}} \right) \operatorname{grad} c_i \right] + \frac{dP}{dt} + \epsilon. \quad (14.28)$$

Число Льюиса можно представить в виде

$$\operatorname{Le} = \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{Pr}_D},$$

где диффузионное число Прандтля

$$\operatorname{Pr}_D = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{\nu}{D}. \quad (14.29)$$

В прикладных задачах тепломассообмена двумя последними слагаемыми в (14.28) можно пренебречь. Уравнение (14.28) при $\operatorname{Le} = 1$ значительно упрощается. В этом случае оно может быть записано в форме уравнения Фурье—Остроградского:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T). \quad (14.30)$$

Для газовых смесей $\nu \approx a \approx D$ и число $\operatorname{Le} \approx 1$. Для удобства анализа процесса тепломассообмена в жидких смесях уравнение (14.25a) с учетом того, что $q_R = 0$, преобразуют к виду

$$\rho \bar{c}_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho D \sum_{i=1}^n c_{p_i} \operatorname{grad} c_i \cdot \operatorname{grad} T. \quad (14.31)$$

Для бинарной смеси $\operatorname{grad} c_2 = -\operatorname{grad} c_1$ и (14.31) упрощается:

$$\rho \bar{c}_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho D (c_{p1} - c_{p2}) \operatorname{grad} c_1 \cdot \operatorname{grad} T. \quad (14.31a)$$

Для жидких смесей часто можно принять, что $c_{p1} \approx c_{p2}$. К тому же коэффициент диффузии D имеет малое значение. Поэтому второе слагаемое в правой части (14.31a) может быть исключено.

Уравнение (14.31) получается в результате следующих преобразований слагаемых, входящих в (14.25a). Величина $h = \sum_{i=1}^n c_i h_i$ и

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n c_i h_i = \rho \sum_{i=1}^n c_i \frac{dh_i}{dt} + \rho \sum_{i=1}^n h_i \frac{dc_i}{dt} = \rho \sum_{i=1}^n c_{p_i} c_i \frac{dT}{dt} + \sum_{i=1}^n h_i \rho \frac{dc_i}{dt} = \rho \bar{c}_p \frac{dT}{dt} + \sum_{i=1}^n h_i \rho \frac{dc_i}{dt}.$$

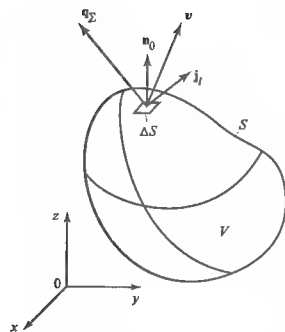


Рис. 14.3. К выводу уравнения энергии для контрольного объема V

В то же время

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sum_{i=1}^n h_i j_i &= \sum_{i=1}^n h_i \operatorname{div} j_i + \sum_{i=1}^n j_i \cdot \operatorname{grad} h_i = \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \operatorname{div} j_i + \rho D \sum_{i=1}^n c_{pi} \operatorname{grad} c_i \cdot \operatorname{grad} T. \end{aligned}$$

Преобразованные таким образом соотношения подставим в (14.25а), учтем уравнение диффузии (14.19а) при $\kappa_i = 0$ и в результате получим (14.31).

Уравнение баланса энергии для конечного контрольного объема V , ограниченного замкнутой поверхностью площадью S , можно получить интегрированием (14.25). С учетом формулы Остроградского—Гаусса получим

$$\int_S (\rho h v_n + q_{\Sigma n} + \sum_{i=1}^n h_i j_{in}) dS = - \int_V \frac{\partial \rho h}{\partial \tau} dV, \quad (14.32)$$

где v_n , $q_{\Sigma n}$ и j_{in} — проекции векторов v , q_{Σ} и j_i на направление внешней нормали n_0 (рис. 14.3).

Сумма слагаемых в скобках левой части (14.32) представляет собой проекцию вектора плотности полного потока энергии:

$$E = \rho h v + q_{\Sigma} + \sum_{i=1}^n h_i j_i.$$

Последнее соотношение справедливо для относительно малых скоростей движения смеси. В общем случае в формулу для определения E необходимо включить кинетическую энергию потока и работу вязких напряжений.

14.6. Уравнения баланса массы и энергии для межфазной границы

На практике часто встречаются случаи тепломассообмена в двухфазных системах (например, испарение, конденсация, сублимация и др.). При этом перенос вещества через граничную (межфазную поверхность) обусловлен фазовыми переходами. Уравнения, выведенные выше (см. § 14.3—14.5), справедливы для каждой фазы. На границе раздела фаз потоки вещества, энергии и импульса должны удовлетворять определенным условиям, иногда именуемым условиями совместности [47]. При этом используется собственная система отсчета координат, «привязанная» к данному участку или точке межфазной поверхности.

На межфазной границе выделим точку M (рис. 14.4) и вокруг нее опишем малую замкнутую поверхность. Эта поверхность будет ограничивать элементарный контрольный объем $\Delta V = 2\Delta S \Delta y$, охватывающий две фазы. Для определенности допустим, что одна фаза — жидкость, другая — газ. Характеристики первой фазы будем обозначать верхним индексом «один штрих», а второй фазы — индексом «два штриха».

Применительно к элементарному объему ΔV (14.20) будет иметь вид

$$2\Delta S \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} dy - J'_{iy} \Delta S + J''_{iy} \Delta S = 2\Delta S \int_{-\Delta y}^{\Delta y} \kappa_i dy,$$

где J'_{iy} и J''_{iy} — проекции вектора J_i на ось Oy для первой и второй фаз.

Устремляя Δy к нулю, получаем условие неразрывности потока массы i -го компонента при прохождении границы раздела фаз:

$$J'_{iy} = J''_{iy}. \quad (14.33)$$

Из (14.21) аналогично получаем условие неразрывности полного потока массы смеси:

$$J'_y = J''_y, \quad (14.33a)$$

которое представляет собой уравнение баланса массы смеси. Оно справедливо как при отсутствии, так и при наличии химических реакций.

В случае бинарной смеси $J'_{1y} + J'_{2y} = J'_y$ и $J''_{1y} + J''_{2y} = J''_y$. Тогда будем иметь два балансных уравнения. Одно — (14.33а), а другое имеет вид

$$J'_{1y} = J''_{1y}. \quad (14.33б)$$

Если один компонент (например, воздух, который практически не растворяется в воде) отсутствует в какой-либо фазе (в жидкости), то поток этого компонента не пересекает границу и межфазная поверхность называется *полупроницаемой*. Тогда $J''_{1y} = J''_y$, а $J'_{1y} = j'_{1y} + \rho'_1 = j''_{1y} + c''_1 J_{1y}$, откуда следует уравнение материального баланса для полупроницаемой границы в случае бинарной смеси:

$$J''_y = \frac{j'_{1y}}{1 - c'_1}. \quad (14.34)$$

Если задана массовая концентрация первого компонента (например, H_2O в случае паровоздушной смеси) и найдена плотность диффузионного

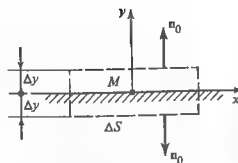


Рис. 14.4. Элементарный контрольный объем вблизи межфазной границы

потока массы, то по (14.34) можно рассчитать плотность полного потока массы, проходящего через межфазную границу. Значение j''_{1y} можно найти по закону Фика после того, как в результате решения дифференциальных уравнений теплообмена будет определено поле концентрации компонента. Однако решение этой задачи является сложным. Поэтому в инженерных расчетах применяются упрощенные методы, основанные на аналогии процессов тепло- и массообмена (см. § 14.8).

Уравнение энергетического баланса для межфазной границы записывается в виде

$$J'_y h' + \sum_{i=1}^n h'_i j'_{iy} + q'_y = J''_y h'' + \sum_{i=1}^n h''_i j''_{iy} + q''_y. \quad (14.35)$$

Уравнение (14.35) выводится из (14.25) таким же образом, как (14.33) — из (14.20). В (14.35) q'_y и q''_y — проекции вектора q на ось Oy в жидкой и газообразной фазах соответственно. Значения q'_y и q''_y рассчитываются по закону Фурье с учетом теплопроводности смеси в жидкой и газообразной фазах. Иногда (например, в процессах радиационно-конвективной сушки материалов) необходимо принимать во внимание результирующий поток излучения через межфазную границу. Тогда в правую часть (14.35) следует ввести $q''_{Ry} = E''_{\text{рез}y}$, где $E''_{\text{рез}y}$ — проекция вектора q_R на ось Oy ; $E''_{\text{рез}y} = E''_{\text{полл}} - E''_{\text{соб}}$ (здесь $E''_{\text{полл}}$ — плотность потока излучения, поглощенного межфазной поверхностью; $E''_{\text{соб}}$ — плотность потока собственного излучения поверхности в газообразную фазу). Значение $E''_{\text{полл}}$ можно найти, зная плотность потока падающего излучения со стороны газообразной фазы и поглощательную способность межфазной поверхности. В первом приближении можно принять, что $E''_{\text{полл}} = E''_{\text{пад}}$, а $E''_{\text{соб}} = \sigma_0 T_c^4$ (T_c — температура межфазной поверхности, $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴). При облучении Солнцем значение $E''_{\text{пад}}$ равно плотности потока солнечного излучения.

Для бинарной смеси уравнение (14.35) упрощается. Следует учесть, что $h = c_1 h_1 + c_2 h_2$ и $J_1 = j_1 + c_1 J$. Тогда из (14.35) получается уравнение

$$J'_{1y} h'_1 + J'_{2y} h'_2 + q'_y = J''_{1y} h''_1 + J''_{2y} h''_2 + q''_y. \quad (14.35a)$$

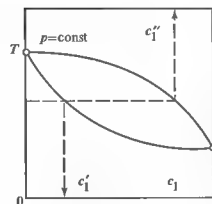
Обозначим $r_1 = h''_1 - h'_1$, $r_2 = h''_2 - h'_2$. Величины r_1 и r_2 представляют собой индивидуальные теплоты фазового перехода первого и второго компонентов смеси. С учетом этого (14.35a) запишется в виде

$$q'_y = J''_{1y} r_1 + J''_{2y} r_2 + q''_y. \quad (14.35б)$$

Рис. 14.5. Определение концентраций c'_1 и c''_1 бинарной смеси на поверхности раздела фаз

Для полупроницаемой границы $J''_{2y} = 0$, а в отсутствие теплообмена излучением будем иметь

$$q'_y = \frac{J''_{1y}}{1 - c''_1} r_1 + q''_y. \quad (14.35в)$$



Уравнения (14.35б) и (14.35в), в частности, используются для определения температуры межфазной границы. При этом в часто встречающемся случае низкой интенсивности фазовых переходов полагают, что скачок температуры на межфазной границе отсутствует и $T' = T'' = T_s(p'')$, причем $p'' = p'$ (лапласовым скачком давления пренебрегают). При не слишком высоком давлении для парогазовой смеси температура полупроницаемой межфазной поверхности равна температуре насыщения при парциальном давлении пара p'' , а массовая концентрация c'_1 легко определяется при известном значении p'' .

Если оба компонента пересекают границу и присутствуют в обеих фазах, то концентрации c'_1 и c''_1 определяются так, как показано на рис. 14.5.

14.7. Диффузионный пограничный слой.

Уравнения теории пограничного слоя при наличии массообмена

Понятие пограничного слоя, рассмотренное в § 5.1, применяется также при изучении процессов массообмена. Перенос массы какого-либо компонента смеси осуществляется под действием градиента концентрации этого компонента. В том случае, когда поперечная составляющая градиента концентрации много больше продольной составляющей (иначе, когда продольным переносом массы в продольном направлении можно пренебречь), область процесса переноса вещества называют *диффузионным пограничным слоем*. Обычно эта область наблюдается вблизи поверхности раздела фаз (случаи испарения, конденсации и др.). О диффузионном пограничном слое говорят также при рассмотрении процессов искусственно организованного вдува—отсоса инородного газа через пористую поверхность, омываемую потоком основного газа. Изучение процесса массообмена при вдувании или отсосе газа имеет самостоятельный интерес, так как таким образом можно, например, защитить поверхность тела от высокотемпературной внешней среды. При вдувании газа растет толщина пограничного слоя и уменьшается коэффициент теплоотдачи. При его отсосе наблюдается обратная картина. В то же время закономерности теплообмена, полученные для процессов вдува—отсоса, можно использовать для анализа

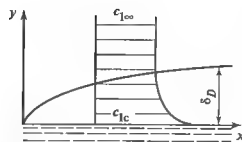


Рис. 14.6. К определению понятия диффузионного пограничного слоя

влияния поперечного потока массы на распределения скорости и температуры в задачах массопереноса, касающихся процессов испарения, конденсации и др.

Понятие диффузионного пограничного слоя поясним на примере обтекания воздухом влажной пластины (рис. 14.6). Концентрация паров воды на поверхности пластины равна c_{1c} , а в потоке воздуха — $c_{1\infty}$. В пределах тонкого слоя толщиной δ_D величина c_1 изменяется от c_{1c} до $c_1 = c_{1\infty}$ (обычно принимают $c_1 = 0,99c_{1\infty}$). Толщина δ_D и представляет собой толщину диффузионного пограничного слоя для первого компонента (паров H_2O).

При отсутствии химических реакций уравнение диффузии аналогично уравнению энергии (в форме Фурье—Остроградского). Поэтому так же, как это было сделано в § 5.1, можно оценить толщину δ_D : $\delta_D \sim l_0 / \sqrt{Pe_D}$, где l_0 — характерный размер тела (для пластины — ее длина); $Pe_D = Re Pr_D$ — диффузионное число Пекле. Толщина теплового пограничного слоя $\delta_t \sim l_0 / \sqrt{Re}$, а толщина динамического пограничного слоя $\delta \sim l_0 / \sqrt{Re}$.

Отсюда видно, что $\delta_D \sim \sqrt{\delta}$; $\delta_t \sim \sqrt{\delta}$ и $\delta \sim \sqrt{\nu}$. Таким образом, $\delta_D / \delta_t \sim \sqrt{Le}$, $\delta_D / \delta \sim 1 / \sqrt{Pr_D}$. Для газовых смесей число $Le = 1$ и число $Pr_D = 1$, поэтому $\delta_D = \delta_t$ и $\delta_D = \delta$.

В основе теории пограничного слоя лежит допущение, что толщины δ , δ_t и δ_D малы по сравнению с характерным размером тела l_0 . Оценки показывают, что это условие выполняется при больших числах Re , Pe и Pe_D . Тогда молекулярные переносы импульса, энергии и вещества существенны только в пограничном слое, а за его пределами ими можно пренебречь. Часто приближением теории пограничного слоя называют такой способ изучения явлений переноса, когда пренебрегают продольными диффузиями импульса, энергии и вещества и считают, что процессы переноса осуществляются только в поперечном направлении (в направлении, перпендикулярном к поверхности тела или межфазной границе).

Дифференциальные уравнения совместных процессов массо- и теплообмена слоя упрощаются, если используется приближение теории погра-

ничного слоя. Ограничимся рассмотрением стационарного плоского пограничного слоя (направим ось Ox вдоль поверхности, ось Oy перпендикулярно к ней). Тогда в приближении теории пограничного слоя уравнение диффузии будет иметь вид

$$\rho \left(v_x \frac{\partial c_1}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) + \kappa_1. \quad (14.36)$$

Для динамического пограничного слоя $\partial \rho / \partial y = 0$, а уравнение движения смеси и уравнение неразрывности записываются следующим образом:

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right); \quad (14.37)$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0. \quad (14.38)$$

Для пограничного слоя уравнение энергии получается в результате упрощения (14.28). Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^n h_i \rho D \left(1 - \frac{1}{Le} \right) \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + v_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (14.39)$$

Обычно два последних слагаемых в правой части (14.39) весьма малы по сравнению с другими слагаемыми и их исключают. Для течений газовых смесей с высокими скоростями вводят полную энтальпию h_0 (см. § 5.7) и уравнение энергии записывают в виде

$$\begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{\partial h_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^n h_i \rho D \left(1 - \frac{1}{Le} \right) \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial v_x^2}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (14.39a)$$

Несмотря на то, что уравнения теории пограничного слоя проще полных уравнений процессов теплообмена, их решение представляет собой сложную задачу. Оно возможно только с применением численных методов. Поэтому в инженерных расчетах в настоящее время используются приближенные методы, среди которых основным является метод аналогии процессов тепло- и массообмена. Наряду с этим применяются интегральные методы, например метод Кутателадзе—Леонтьева (см. § 6.6).

14.8. Коэффициент массоотдачи. Аналогия процессов переноса массы, теплоты и количества движения

Конвективный массообмен между движущейся средой и межфазной поверхностью называется *массоотдачей*. Ее интенсивность характеризуется *коэффициентом массоотдачи* β , который равен отношению плотности диффузионного потока массы данного компонента на границе раздела фаз [обозначается j_c , кг/(м²·с)] к разности массовых концентраций этого компонента в потоке среды и на поверхности раздела.

В данном параграфе мы будем рассматривать бинарную смесь, для которой достаточно определить поток массы одного компонента (поток массы второго находится из условия, что $j_1 + j_2 = 0$). Обычно индексом «1» обозначают характеристики того компонента смеси, массовый поток которого представляет наибольший интерес. В процессах испарения и конденсации этим потоком будет массовый поток пара, зная который, всегда можно найти массовый поток другого компонента (например, искомый конденсирующийся газ). Часто пар называют активным компонентом, а конденсирующийся газ (воздух) — пассивным. Газ, практически не растворяющийся в жидкости, также называется пассивным компонентом смеси.

По определению, коэффициент массоотдачи, кг/(м²·с),

$$\beta = \frac{j_{1c}}{\Delta c_1}, \quad (14.40)$$

где $\Delta c_1 = c_{1\infty} - c_{1c}$; здесь $c_{1\infty}$ и c_{1c} — массовые концентрации первого компонента вдали от границы раздела фаз и на ее поверхности.

При этом предполагается, что j_{1c} — проекция вектора j_1 на внутреннюю нормаль к поверхности раздела фаз (она направлена в сторону жидкости или твердого тела). На практике часто используется внешняя нормаль к межфазной поверхности, и тогда

$$j_{1c} = \beta(c_{1c} - c_{1\infty}). \quad (14.41)$$

Соотношение (14.41) аналогично закону Ньютона—Рихмана. Теоретически значение j_{1c} для концентрационной диффузии можно найти по закону Фика:

$$j_{1c} = -\rho D \left(\frac{\partial c_1}{\partial n} \right)_c, \quad (14.42)$$

где индекс «с» указывает на то, что производная берется в точке, лежащей на поверхности раздела фаз.

Если используется формула (14.41), то $\partial c_1 / \partial n$ — производная по направлению внешней нормали.

В случае газовой смеси вместо массовой концентрации компонента можно использовать его парциальное давление. Тогда коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциальных давлений, определяется следующим образом:

$$\beta_p = \frac{j_{1c}}{\Delta p}; \quad (14.43)$$

вместо (14.41) для расчета плотности диффузионного потока массы применяется формула

$$j_{1c} = \beta_p(p_{1c} - p_{1\infty}).$$

Парциальное давление и массовая концентрация однозначно связаны друг с другом, так как известно, что

$$\frac{p_1}{RT} = \frac{\rho c_1}{M_1}; \quad p = \rho RT \left(\frac{c_1}{M_1} + \frac{c_2}{M_2} \right).$$

В прикладных задачах массообмена коэффициент массоотдачи находят, используя аналогию процессов переноса массы, энергии и импульса. Для нахождения условий справедливости аналогии анализируют математическое описание процессов тепломассопереноса. При этом различают случаи малой (или умеренной) и высокой интенсивности массообмена.

Рассмотрим случай *малой интенсивности массообмена*. Он отличается тем, что поперечный поток массы вещества практически не оказывает влияния на течение смеси. Это условие выполняется, если во всей области потока концентрация активного компонента невелика (практически $c_1 < 0,1$) или слабо изменяется по нормали к межфазной поверхности (например, $c_{1c} - c_{1\infty} < 0,1$). Оценку малости искажения течения вследствие массообмена можно также сделать с помощью понятия *параметра проницаемости* поверхности:

$$b = \frac{2j_{1c}}{c_{j0}\rho_{\infty}v_{\infty}}, \quad (14.44)$$

где J_{1c} — плотность полного (диффузионного и конвективного) потока массы активного компонента на межфазной границе; c_{j0} — коэффициент трения, рассчитанный при условии, что поперечный поток массы отсутствует; ρ_{∞} и v_{∞} — плотность и скорость смеси вдали от поверхности.

Значение $b > 0$, поэтому в (14.44) J_{1c} — абсолютная величина плотности потока массы. Считается, что если $b < 0,1$, то влиянием поперечного потока вещества можно пренебречь.

Случай *массового массообмена*, когда влиянием процесса массопереноса на гидродинамические характеристики потока (скорость, давление) можно пренебречь, будем называть случаем «чистого» теплообмена. При малых разностях массовых концентраций активного компонента и малых разностях температур в потоке смеси уравнения гидродинамики в двух случаях («чистого» теплообмена и массообмена) ничем не отличаются друг от друга.

Тогда (если граничные условия для скорости подобны) распределение скорости в потоке смеси можно принять таким же, каким оно было бы при течении однородной среды (например, однокомпонентного газа). Важно подчеркнуть, что, по существу, мы говорим о трех случаях течения среды. Первый случай относится к «чистому» массообмену (изотермическое течение смеси компонентов). При этом требуется найти только потоки массы компонентов. Второй случай — «чистый» теплообмен. Он соответствует совместному процессу тепло- и массообмена (при этом массообмен не влияет на теплообмен). Третий случай — теплообмен без всякого массообмена, т.е. тот вид теплообмена, который мы рассматривали в предыдущих главах. Согласно принятым допущениям, для первых двух случаев вязкость смеси $\mu = \text{const}$. Предполагается, что и в третьем случае $\mu = \text{const}$. Свободная конвекция, возникающая из-за того, что равнодействующая сил тяжести и Архимеда отлична от нуля, в уравнении движения учитывается величиной $(\rho - \rho_0)g$ (см. § 14.4), которая в указанном третьем случае равна взятой со знаком «минус» величине $\beta(T - T_0)$, где β — коэффициент объемного расширения. Так как мы приняли, что изменения температуры и концентрации малы, то $\Delta\rho \ll \rho$ и $\Delta T \ll T$.

Уравнение энергии для третьего случая и уравнение диффузии при $\kappa_i = 0$ записываются аналогично. Входящие в оба уравнения компоненты скорости v_x и v_y описываются одними и теми же функциями. Если граничные условия для температуры и концентрации подобны, то будут подобными и решения двух уравнений. Это положение лежит в основе метода аналогий процессов тепло- и массообмена.

Пренебрегая в уравнении энергии для смеси (см. § 14.5) диффузионным переносом энергии, убеждаемся в том, что это уравнение во втором случае «чистого» теплообмена будет иметь такой же вид, как и в третьем случае.

Введем диффузионное число Нуссельта:

$$Nu_D = \frac{\beta l_0}{\rho D} = \frac{j_{1c}}{c_{1c} - c_{1\infty}} \frac{l_0}{\rho D}, \quad (14.45)$$

где j_{1c} — плотность диффузионного потока массы первого компонента на межфазной границе, причем

$$j_{1c} = -\rho D \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Для процесса конвективного теплообмена число Грасгофа

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T l_0^3}{\nu^2},$$

где $\Delta T = |T_c - T_\infty|$.

Для процесса массообмена вводится диффузионное число Грасгофа:

$$Gr_D = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g l_0^3}{\nu^2}, \quad (14.46)$$

где $\Delta\rho = |\rho_c - \rho_\infty|$; здесь ρ_c и ρ_∞ — плотности смеси на межфазной границе и вдали от нее.

Уравнения конвективного тепломассообмена можно привести к безразмерному виду (см. § 4.7) и получить следующие соотношения:

$$Nu_D = f(Re, Pr_D, Gr_D); \quad (14.47)$$

$$Nu = f(Re, Pr, Gr). \quad (14.47a)$$

Соотношение (14.47a) справедливо как для третьего из рассмотренных выше случаев, так и для второго. При выполнении условий аналогии вид функции f в соотношениях (14.47) и (14.47a) одинаков, в них число Рейнольдса одно и то же:

$$Re = \frac{v_\infty l_0}{\nu}, \quad (14.47b)$$

где v_∞ — скорость набегающего потока.

При вынужденной конвекции, когда влияние свободной конвекции пренебрежимо мало,

$$Nu_D = \varphi(Re, Pr_D); \quad (14.48)$$

$$Nu = \varphi(Re, Pr). \quad (14.48a)$$

Если зависимости (14.47a) или (14.48a) известны, то с их помощью можно рассчитать коэффициент массоотдачи. Для этого достаточно в формулах, справедливых для процесса теплообмена, заменить обычные числа Прандтля и Грасгофа на диффузионные. Так, например теплоотдача при продольном обтекании пластины в случае ламинарного пограничного слоя рассчитывается по формуле

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (14.49)$$

Для расчета аналогичного процесса массообмена будем иметь

$$Nu_{Dx} = 0,332 Re_x^{1/2} Pr_D^{1/3}. \quad (14.49a)$$

Если используется формула (14.49a), то при определении числа Рейнольдса по (14.47b) следует взять кинематическую вязкость смеси.

Если течение смеси турбулентное, то обычно принимается, что турбулентные числа Прандтля для процессов тепло- и массообмена равны. Поэтому соотношения (14.48) и (14.48a) справедливы как для ламинарных, так и для турбулентных течений.

Рассмотрим теперь случай, когда, кроме указанных выше условий, коэффициент диффузии, вязкость и температуропроводность равны, т.е. $Pr = 1$, $Pr_D = 1$ и $Le = 1$. Предположим также, что влиянием свободной конвекции можно пренебречь и справедливо приближение теории пограничного слоя, причем продольная составляющая градиента давления равна нулю ($dp/dx = 0$). Последнее условие выполняется при обтекании пластины.

Анализ уравнений пограничного слоя показывает, что уравнения движения, диффузии и энергии в этом случае отличаются только обозначениями величин. Если, например, в уравнении диффузии c_1 заменить на v_x , то оно совпадает с уравнением движения. При подобных граничных условиях (например, $c_{1c} = \text{const}$, $T_c = \text{const}$) распределения температуры, концентрации и скорости будут подобны, а в безразмерном виде тождественны, т.е.

$$\frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty} = \frac{c_1 - c_{1\infty}}{c_{1c} - c_{1\infty}} = \frac{v_x - v_\infty}{v_{xc} - v_\infty}. \quad (14.50)$$

Продифференцируем равенство (14.50) по y и затем положим $y = 0$. Так как

$$q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad j_{1c} = -\rho D \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad \sigma_c = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0},$$

то в результате получим

$$\frac{q_c}{\lambda(T_c - T_\infty)} = \frac{j_{1c}}{\rho D(c_{1c} - c_{1\infty})} = \frac{\sigma_c}{\mu v_{xc}}. \quad (14.50a)$$

Равенство (14.50a) умножим на λ и разделим на произведение $\rho \bar{c}_p v_\infty$. Учтем, что в нашем случае $Pr_D = 1$, $Pr = 1$. Введем число Стантона St , диффузионное число Стантона St_D и коэффициент трения c_{f0} :

$$St = \frac{\alpha}{\rho \bar{c}_p v_\infty} = \frac{q_c}{\rho \bar{c}_p v_\infty (T_c - T_\infty)};$$

$$St_D = \frac{\beta}{\rho v_\infty} = \frac{j_{1c}}{\rho v_\infty (c_{1c} - c_{1\infty})};$$

$$c_{f0} = \frac{2\sigma_c}{\rho v_\infty^2}.$$

Тогда вместо (14.50a) получим соотношение, называемое *тройной аналогией* между процессами переноса теплоты, вещества и импульса:

$$St = St_D = c_{f0}/2. \quad (14.51)$$

Следует подчеркнуть, что (14.51) справедливо при отсутствии влияния поперечного потока массы на характеристики процесса тепло-массопереноса.

Из (14.51) видно, что при условии справедливости тройной аналогии тепло- и массоотдачу можно рассчитывать, зная коэффициент трения c_{f0} . Соотношение (14.51) имеет место как для ламинарного, так и для турбулентного течения. Для ламинарного пограничного слоя при обтекании пластины $c_{f0} = 0,664 / \sqrt{Re_x}$.

Экспериментально и теоретически доказано, что тройную аналогию можно распространить на случай $Pr \neq 1$ и $Pr_D \neq 1$, записав вместо (14.51) следующее равенство:

$$St Pr^n = St_D Pr_D^n = c_{f0}/2. \quad (14.51a)$$

Для ламинарных течений $n \approx 2/3$, а для турбулентных $n \approx 0,6$.

Так как в основе тройной аналогии лежит допущение $dp/dx = 0$, то для течения с отрывом она непригодна.

Соотношение (14.51) часто называют *аналогией Рейнольдса*.

Идея об аналогии процессов переноса импульса и теплоты была высказана О. Рейнольдсом в 1874 г. при изучении им турбулентного течения жидкости в трубах. Аналогия Рейнольдса была рассмотрена выше (см. § 6.4). В. Нуссельт (1916 г.) распространил аналогию Рейнольдса на процессы массообмена.

Выведем соотношение (14.51), используя понятие *рейнольдсова потока*. Пусть m' — поток жидкости, направленный перпендикулярно к стенке, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Основной поток жидкости направлен вдоль стенки. Величина m' и представляет собой рейнольдсов поток. Пусть T_∞ , v_∞ и $c_{1\infty}$ — соответственно температура, скорость и массовая концентрация первого компонента смеси вдали от межфазной границы, а T_c , v_c и c_{1c} — то же на границе раздела фаз (обычно можно считать, что $v_c = 0$).

С помощью потока m' осуществляется процесс переноса теплоты, импульса и вещества, т.е. для этих трех процессов m' одно и то же. Основное свойство рейнольдсова потока состоит в том, что с его помощью одинаково записываются выражения для плотности теплового потока q_c , касательного напряжения σ_c и плотности диффузионного потока массы j_{1c} , причем

$$q_c = m' c_p (T_\infty - T_c), \quad (14.52)$$

$$\sigma_c = m' (v_\infty - v_c), \quad (14.52a)$$

$$j_{1c} = m' (c_{1\infty} - c_{1c}). \quad (14.52b)$$

Так как в трех уравнениях m' имеет одно и то же значение, то (полагая $v_c = 0$) будем иметь

$$m' = \frac{q_c}{c_p (T_\infty - T_c)} = \frac{\sigma_c}{v_\infty} = \frac{j_{1c}}{c_{1\infty} - c_{1c}}. \quad (14.53)$$

Разделив каждую составляющую равенства (14.53) на ρv_∞ , получим (14.51).

Рейнольдсов поток является фиктивным (воображаемым) потоком. Его смысл можно уяснить из рассмотрения примера переноса теплоты от жидкости к стенке. Из (14.52) видно, что m' — это такое количество жидкости, проходящее в единицу времени через единицу площади поверхности стенки, которое, будучи приведен-

ним в тепловое равновесие со стенкой, передает ей количество теплоты (в единицу времени в расчете на единицу площади поверхности), равное действительной плотности теплового потока. В случае $T_c > T_{\infty}$ нагретый реинольдсов поток выходит из стенки, приходит в равновесие с основным потоком, при этом передается такое количество теплоты, которое равно действительному.

Из (14.52) видно, что $m'c_p = \alpha$, где α — коэффициент теплоотдачи. В то же время, как это следует из (14.52), $m' = \beta$, где β — коэффициент массоотдачи. Таким образом, из аналогии Рейнольдса вытекает формула Льюиса:

$$\beta = \alpha / c_p$$

Модель реинольдсова потока использована в [43].

Рассмотрим теперь случай *высокой интенсивности массообмена*. Допустим, что число $Le = 1$ и смесь состоит из двух компонентов. Если в правой части (14.39) отбросить как несущественные два последних слагаемых, то уравнение энергии будет иметь такой же вид, как и для «чистого» теплообмена; причем оно будет аналогично уравнению диффузии (если $Le = 1$, то $Pr = Pr_D$).

В рассматриваемом случае плотность потока массы через граничную поверхность J_c может быть значительной, она считается величиной, заданной граничными условиями.

Если граничные условия для энтальпии и концентрации подобны, то при $Le = 1$ поля относительных энтальпий и относительных концентраций также подобны, т.е. в безразмерном виде они тождественны:

$$\frac{h - h_{\infty}}{h_c - h_{\infty}} = \frac{c_1 - c_{1\infty}}{c_{1c} - c_{1\infty}}. \quad (14.54)$$

Равенство (14.54) про дифференцируем по y и в полученном соотношении положим $y = 0$. Преобразуем производную $\partial h / \partial y$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (c_1 h_1 + c_2 h_2) = \bar{c}_p \frac{\partial T}{\partial y} + h_1 \frac{\partial c_1}{\partial y} + h_2 \frac{\partial c_2}{\partial y} = \\ &= -\frac{\bar{c}_p q}{\lambda} - \frac{1}{\rho D} j_1 (h_1 - h_2) = -\frac{1}{\rho D} [q + j_1 (h_1 - h_2)] = -\frac{e}{\rho D}, \end{aligned}$$

где $e = q + j_1 (h_1 - h_2)$ представляет собой плотность потока энергии, переносимой молекулярным путем; здесь q — плотность теплового потока, $j_1 (h_1 - h_2)$ определяет перенос энтальпии компонентов смеси вследствие диффузии.

Введем St_h — число Стантона:

$$St_h = \frac{e_c}{\rho_{\infty} v_{\infty} (h_c - h_{\infty})}, \quad (14.55)$$

где индекс «с», как обычно, указывает на то, что данная величина относится к поверхности раздела фаз.

С учетом математического описания совместных процессов тепло- и массообмена, записанного в безразмерном виде, из (14.54) после простых преобразований получаем

$$St_h = St_D = f[Re, Pr, J_c / (\rho_{\infty} v_{\infty})]. \quad (14.56)$$

Величина $J_c / (\rho_{\infty} v_{\infty})$ характеризует влияние поперечного потока вещества на тепло- и массоотдачу. Это влияние можно также учитывать с помощью параметра проницаемости b , который записывается в виде

$$b = \frac{J_c}{\rho_{\infty} v_{\infty}} \frac{1}{St_0}, \quad (14.57)$$

где St_0 — число Стантона, справедливое для случая $J_c = 0$ [его можно найти по формулам для «чистого» теплообмена (или «чистого» массообмена)].

От значения параметра b зависит отношение числа Стантона, учитывающего влияние поперечного потока массы, к числу St_0 . Это отношение обозначается

$$\Psi = \frac{St_h}{St_{h0}} = \frac{St_D}{St_{D0}}, \quad (14.58)$$

где $St_{h0} = St_{D0} = St_0$.

О характере зависимости $\Psi = \Psi(b)$ можно судить по графику, приведенному на рис. 14.7.

Для турбулентного пограничного слоя приближенное значение Ψ можно получить по формуле

$$\Psi = \frac{b}{e^b - 1},$$

а для нахождения более точных значений Ψ следует использовать метод Кутателадзе—Леонтьева [19]

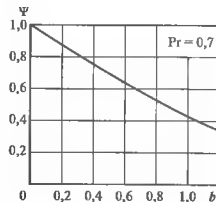


Рис. 14.7. Влияние поперечного потока вещества на теплообмен в условиях продольного обтекания пластины при ламинарном пограничном слое

Мы рассмотрели частный случай $Le = 1$. В другом частном случае $c_{p1} = c_{p2} = c_p$ уравнение энергии (14.31а) аналогично уравнению диффузии.

Из анализа математического описания процесса теплообмена в этом случае получаем:

$$St = f[Re, Pr, J_c / (\rho_{\infty} v_{\infty})]; \quad (14.59)$$

$$St_D = f[Re, Pr_D, J_c / (\rho_{\infty} v_{\infty})]. \quad (14.59a)$$

В (14.59) число Стантона определяет тепловой поток, отдаваемый (или подводимый) от поверхности за счет теплопроводности:

$$St = \frac{q_c}{\rho_{\infty} v_{\infty} c_p (T_c - T_{\infty})}.$$

Отличие последнего частного случая от ранее рассмотренного ($Le = 1$) состоит в том, что $Pr \neq Pr_D$.

В отличие от первого частного случая, который приблизительно соответствует газовой смеси, во втором случае, как это видно из (14.59) и (14.59a), расчет теплообмена необходимо проводить отдельно от расчета массообмена. Вид функций (14.59) и (14.59a) один и тот же. Способ учета влияния поперечного потока вещества остается таким же, как и в первом случае.

Если числа $Pr = 1$, $Pr_D = 1$, $dp/dx = 0$ и влиянием гравитационных сил можно пренебречь, то при высокой интенсивности массообмена существует *тройная аналогия*:

$$St = St_D = c_f/2, \quad (14.60)$$

где коэффициент трения находится с учетом влияния поперечного потока вещества:

$$c_f/2 = \psi(Re, J_c / (\rho_{\infty} v_{\infty})). \quad (14.60a)$$

Зависимость (14.60), как и приведенные ранее зависимости, справедлива для сходственных точек межфазной поверхности.

Глава пятнадцатая

МАССО- И ТЕПЛОБМЕН ПРИ ИСПАРЕНИИ, КОНДЕНСАЦИИ И ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЯХ

15.1. Стефанов поток массы

Если для некоторой части компонентов смеси межфазная поверхность является непроницаемой (например, какие-либо компоненты не конденсируются или не адсорбируются поверхностью), то это приводит к возникновению общего течения смеси в направлении, перпендикулярном к поверхности. Возникновение конвективного потока смеси в процессах массообмена, протекающих вблизи полупроницаемой поверхности (для одних компонентов проницаемая, для других — не проницаемая), впервые (1882 г.) было отмечено австрийским физиком Й. Стефаном, в связи с чем этот поток смеси называется *стефановым потоком*.

Обычно стефанов поток массы наблюдается в газовых смесях, например, в процессах конденсации пара из паровоздушной смеси или его испарения в парогазовую среду. Компонентом смеси, для которой межфазная поверхность не проницаема, является воздух, который практически не растворяется в воде.

Рассмотрим процесс испарения воды, находящейся на дне пробирки (рис. 15.1). Температура воды равна температуре окружающего воздуха ($T = \text{const}$). Над поверхностью воды присутствует смесь водяных паров с воздухом. Давление этой смеси в пробирке постоянно, однако парциальные давления водяных паров p_1 и воздуха p_2 по высоте пробирки изменя-

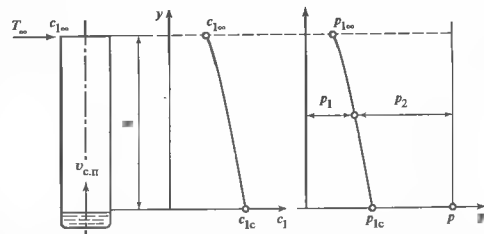


Рис. 15.1. Испарение воды, находящейся на дне пробирки

ются, причем $p_1 + p_2 + p = \text{const}$. Очевидно, что парциальное давление на поверхности воды $p_{1c} > p_{1\infty}$ ($p_{1\infty}$ — парциальное давление водяного пара в окружающем воздухе) и массовая концентрация $c_{1c} > c_{1\infty}$. Для воздуха — картина обратная (рис. 15.1).

Из-за наличия градиентов концентраций компонентов смеси при любом значении координаты y ($0 \leq y \leq h$) имеют место диффузионные потоки водяных паров и воздуха: $j_1 = -\rho D \, dc_1/dy$; $j_2 = -\rho D \, dc_2/dy$, причем j_1 и j_2 — проекции векторов $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$ на ось Oy . Так как $dc_2/dy > 0$, то $j_2 < 0$, т.е. диффузионный поток воздуха направлен к поверхности воды, которая для него не проницаема. В стационарном процессе испарения $dc_2/dt = 0$, т.е. при любом значении координаты y концентрация воздуха не зависит от времени. Это означает, что диффузионный поток воздуха к поверхности воды должен компенсироваться потоком смеси, направленным в противоположную сторону. Таким вторым потоком и является конвективный поток Стефана. Его скорость обозначим $v_{c,л}$. Тогда $J_2 = j_2 + \rho_2 v_{c,л} = 0$, откуда для скорости стефанового потока получаем

$$v_{c,л} = -\frac{j_2}{\rho_2} = \frac{j_1}{\rho_2}. \quad (15.1)$$

Так как $J_2 = 0$, то плотность потока смеси $J = J_1 = \text{const}$. Найдем J_1 и распределение концентрации по координате y . Учитывая (15.1) и то, что $J = \rho v$, $c_2 = \rho_2/\rho$, получаем

$$J_1 = \frac{j_1}{c_2} = \frac{j_1}{1 - c_1}. \quad (15.2)$$

Далее воспользуемся формулой (см. § 14.2)

$$j_1 = -m_1 m_2 \frac{n^2}{\rho} D \frac{d}{dy} \left(\frac{n_1}{n} \right). \quad (15.3)$$

Здесь отношение n_1/n представляет собой мольную долю первого компонента, причем она равна объемной доле r_1 [см. (14.8a)], т.е. $r_1 = p_1/p = n_1/n$. Теперь (15.3) подставим в (15.2) и учтем, что $\rho c_2 = \rho_2 = m_2 n_2$; $n^2/n_2 = n/(1 - n_1/n)$; $m_1 n = \rho_1 n_1 = p M_1/RT$. Тогда получим

$$J_1 = -\frac{p M_1}{RT} \frac{D}{1 - r_1} \frac{dr_1}{dy}. \quad (15.4)$$

В (15.4) разделим переменные и проинтегрируем первый раз от $y = 0$ до текущего значения y , а второй раз от $y = 0$ до $y = h$. В результате получим зависимости:

$$\frac{1 - r_1}{1 - r_{1c}} = e^{Ky}; \quad (15.5)$$

$$J_1 = \frac{p M_1 D}{RT h} \ln \frac{1 - r_{1\infty}}{1 - r_{1c}}, \quad (15.6)$$

где r_{1c} и $r_{1\infty}$ — мольные доли активного компонента на межфазной границе и вдали от нее; $K = J_1 RT / (p M_1 D)$.

Формула (15.6) называется *формулой Стефана*. Чтобы воспользоваться (15.5) для нахождения $r_1(y)$, предварительно по (15.6) надо рассчитать значение J_1 . Формулы (15.5) и (15.6) справедливы и для процесса конденсации парогазовой смеси. В этом случае $r_{1\infty} > r_{1c}$, $J_1 < 0$ и стефанов поток направлен к межфазной границе.

15.2. Массо- и теплообмен при испарении в парогазовую среду

В § 15.1 мы рассмотрели простой случай испарения при $T = \text{const}$. Если можно принять, что процесс массопереноса осуществляется только в направлении, перпендикулярном к межфазной поверхности (одномерная диффузия), то по формуле Стефана можно рассчитать скорость испарения. Моделью одномерной диффузии является испарение в пробирке. К этой модели также можно применить приближение теории пограничного слоя, согласно которому диффузионные переносы массы, теплоты и импульса в продольном направлении пренебрежимо малы по сравнению с переносами в поперечном направлении. Указанное допущение справедливо при малой толщине пограничного слоя. В формуле Стефана под толщиной пограничного слоя можно подразумевать расстояние h от поверхности воды до верхнего края пробирки (см. рис. 15.1). Чем меньше толщина пограничного слоя, тем больше плотность потока массы, проходящего через межфазную поверхность, и больше скорость испарения. Основная проблема, возникающая при использовании формулы Стефана, — нахождение толщины пограничного слоя δ .

Простой способ расчета толщины δ состоит в следующем. Сначала рассмотрим неподвижную пленку, через которую проходит тепловой поток q , Вт/м². Разность температур поверхностей пленки, ее толщина и теплопроводности соответственно равны ΔT , δ и λ . Тогда $q = \alpha \Delta T$, где $\alpha = \lambda/\delta$. Пусть теперь Δc — разность концентраций, а ρ , D и δ — соответственно плотность смеси, коэффициент диффузии и толщина неподвижной пленки в процессе диффузии, причем $J = \beta \Delta c$, где $\beta = \rho D/\delta$.

Процесс теплопроводности аналогичен процессу диффузии ($\delta' = \delta$), тогда $\beta = \alpha \rho D / \lambda$. Для газовых смесей число $Le = 1$. В этом случае получаем формулу Льюиса:

$$\beta = \frac{\alpha}{\bar{c}_p}, \quad (15.7)$$

так как $\beta = \alpha \rho D / \lambda = \alpha \rho D \bar{c}_p / (\lambda \bar{c}_p) = \alpha Le / \bar{c}_p$. Здесь $\bar{c}_p$ — теплоемкость смеси. При $Le = 1$ $\delta = \rho D / \beta = \rho D \bar{c}_p / \alpha = \lambda / \alpha$. Таким образом, зная коэффициент теплоотдачи, можно найти δ . Например, для сферической частицы диаметром d при условии, что перенос теплоты осуществляется теплопроводностью, $Nu = \alpha d / \lambda = 2$, откуда $\alpha = 2\lambda / d$ и $\delta = d/2$. Видно, что с уменьшением диаметра частицы (например, диаметра капли) уменьшается δ и, следовательно, возрастает интенсивность испарения.

На практике часто встречаются такие процессы испарения, в которых осуществляется подвод теплоты к границе раздела фаз, т.е. имеет место совместный процесс тепло- и массообмена. В частности, такие процессы происходят в градирнях ТЭС и АЭС, при сушке изделий, испарении капель воды в заключительной стадии кипения в трубах парогенераторов и др. В последнем из указанных случаев испарение воды осуществляется в поток собственного пара, т.е. имеет место тепломассообмен в однокомпонентной среде. Если над межфазной поверхностью присутствует нейтральный газ (например, воздух), то такая поверхность является полупроницаемой, и на интенсивность испарения влияет (часто незначительно) степенной поток массы.

Расчет совместных процессов тепло- и массообмена можно провести с помощью дифференциальных уравнений, которые приведены выше (см. гл. 14). Однако решение этих уравнений найти чрезвычайно сложно, особенно в том случае, когда поток, омывающий межфазную границу, турбулентный. Поэтому в инженерных расчетах прибегают к приближенному методу, в котором используются аналогия процессов переноса массы, энергии и импульса и уравнения материального и энергетического балансов для межфазной границы. На основе гипотезы о неподвижной пленке в ряде случаев массообмен можно рассчитать по формуле Стефана.

В качестве примера рассмотрим *адиабатное испарение* воды в паровоздушную среду. В этом процессе подвод теплоты со стороны воды к межфазной поверхности отсутствует. Задана температура потока среды T_{∞} , требуется найти температуру поверхности T_c и плотность потока массы пара воды J_{1c} . Индексом «с» мы обозначаем величины, которые соответст-

вуют межфазной границе. В нашем случае $J_{1c} = J_c$ (так как $J_{2c} = 0$) и справедливо соотношение (14.34), т.е.

$$J_c = \frac{j''_{1c}}{1 - c''_{1c}}.$$

Плотность диффузионного потока $j''_{1c} = \beta(c''_{1c} - c''_{1\infty})$. Величина $c''_{1\infty}$ полностью определяется температурой T_c , а $c_{1\infty}$ задано (известна влажность потока воздуха). В уравнении энергетического баланса (14.35в) положим $q''_y = 0$ и $q''_y = q_c = \alpha(T_c - T_{\infty})$. Так как для газовой смеси $Le \approx 1$, то в первом приближении можно использовать формулу (15.7), т.е. $\alpha = \beta \bar{c}_p$. Поскольку число $Nu \sim Pr^n$, то по аналогии $Nu_D \sim Pr_D^n$ и более точно $\alpha = \beta \bar{c}_p Le^{n-1}$. Показатель степени n зависит от режима течения среды. Для ламинарного режима $n = 1/3$, для турбулентного $n = 0,4$.

В результате уравнение (14.35в) принимает вид

$$\frac{c''_{1c} - c''_{1\infty}}{1 - c''_{1c}} = \frac{\bar{c}_p Le^{n-1}}{r_1} (T_{\infty} - T_c). \quad (15.8)$$

Из (15.8) можно определить температуру T_c . Видно, что при $Le = 1$ она не зависит от скорости потока среды. Уравнение (15.8) справедливо не только для воды, но и для других жидкостей. Температура адиабатного испарения T_c называется температурой «мокрого» термометра.

После того, как с помощью (15.8) определим температуру T_c , будет известно значение c_{1c} . Затем, найдя β по методу аналогии, можно определить значения j_{1c} и J_{1c} . Решение поставленной задачи на этом заканчивается. Аналогично решается задача в том случае, когда дополнительно задан тепловой поток q'_c . Однако в уравнении энергетического баланса необходимо рассчитывать и α , и β .

15.3. Массо- и теплообмен при конденсации из парогазовой смеси

Совместные процессы массо- и теплообмена осуществляются в подогревателях и конденсаторах паровых турбин на ТЭС и АЭС, в контактных теплообменниках промышленных предприятий и других случаях. Чаще всего процесс массообмена возникает из-за наличия в паре неконденсирующегося газа. Таким газом обычно является воздух, который проникает в теплообменник, работающий под разрежением. Конденсация геотермальной пара на ГеоТЭС происходит в присутствии смеси нейтральных газов.

В указанных случаях конденсация поддерживается в основном за счет отвода теплоты от межфазной границы в объем жидкости. Например, в конденсаторах паровых турбин конденсат образуется на наружной поверхности труб, а выделяющаяся теплота фазового перехода отводится через пленку конденсата охлаждающей жидкостью (водой), протекающей по трубам.

Возможна также конденсация при отсутствии отвода теплоты в объем жидкости (например, конденсация на каплях, находящихся в потоке пересыщенного пара, или конденсация пересыщенного пара на теплоизолированной поверхности). Совместные процессы тепло- и массообмена имеют место как при конденсации пересыщенного пара из парогазовой смеси, так и при конденсации чистого пересыщенного пара.

Особенностью конденсации смеси пара с нейтральными газами при ее течении в охлаждаемой трубе является то, что, чем дальше от входа в трубу, тем больше конденсация газов в потоке смеси.

Теоретическое решение задачи тепломассообмена при конденсации можно получить с помощью дифференциальных уравнений (см. гл. 14). Однако даже в простейших случаях (например, конденсация на вертикальной плоской стенке при ламинарном течении пленки) решение оказывается сложным [10]. В инженерных расчетах используется метод аналогии совместно с уравнениями материального и энергетического балансов.

При конденсации бинарной смеси концентрация газа c_{2c} у межфазной поверхности больше, чем вдали от нее ($c_{2c} > c_{2\infty}$). Поэтому газ диффундирует в сторону от поверхности конденсации, а стефанов поток массы смеси направлен к стенке. При конденсации скорость стефанова потока больше, чем при испарении, что объясняется наличием больших градиентов концентрации (или парциального давления) в первом случае. Таким образом, влияние поперечного потока вещества на характеристики тепломассопереноса при конденсации может быть более существенным, чем при испарении.

Важно отметить, что из-за снижения парциального давления пара вблизи поверхности конденсации температура поверхности пленки оказывается меньше, чем при конденсации чистого пара. Это является основной причиной уменьшения отводимого теплового потока и снижения интенсивности конденсации. Следовательно, чтобы воздух, попадающий в конденсаторы паровых турбин, не оказывал слишком сильно свое отрицательное влияние на теплоотдачу, его необходимо постоянно отводить из конденсатора.

Температура межфазной границы T_c в случае конденсации определяется из уравнения энергетического баланса:

$$\frac{\beta(c_{1\infty} - c_{1c})}{1 - c_{1c}} r_1 + q''_c = q'_c, \quad (15.9)$$

где q'_c , например, в случае ламинарного течения пленки может быть рассчитано по теории Нуссельта, а $q''_c = \alpha''(T_{\infty} - T_c)$, здесь T_{∞} — температура смеси вдали от поверхности (она равна температуре насыщения при парциальном давлении p_{100}). Коэффициент теплоотдачи α'' можно рассчитать, если известны условия движения потока смеси около межфазной границы. Для этого следует взять формулы, справедливые для конвективного теплообмена. При интенсивной конденсации необходимо вносить поправку, учитывающую влияние поперечного потока вещества. Как правило, значение q''_c можно рассчитать лишь приближенно.

Коэффициент массоотдачи β в соотношении (15.9) определяется с помощью аналогии процессов тепло- и массообмена.

Уравнение (15.9) справедливо для случая конденсации пересыщенного пара на каплях жидкости, но в этом уравнении следует учитывать, что $q'_c = 0$. В (15.9) q''_c представляет собой проекцию вектора q''_c на направление внутренней нормали к поверхности жидкости. Так как первое слагаемое в левой части (15.9) больше нуля, то $q''_c < 0$ и тепловой поток направлен в сторону пара.

15.4. Особенности процессов тепломассопереноса при химических реакциях

Напомним основные сведения о кинетике и термодинамике химических реакций. Химические реакции, протекающие в объеме смеси веществ, называются *гомогенными*, а реакции на межфазной границе — *гетерогенными*. Примером гомогенной реакции может служить горение капли жидкого топлива, а примером гетерогенной — горение частицы угля. Большинство химических реакций происходит при постоянном давлении, поэтому их тепловой эффект оценивают изменением энтальпии.

Химические реакции, при протекании которых происходит уменьшение энтальпии системы ($\Delta H < 0$) и во внешнюю среду выделяется теплота, называются *экзотермическими*. Реакции, в результате которых энтальпия возрастает ($\Delta H > 0$) и происходит поглощение теплоты, называются *эндотермическими*.

Скорость химической реакции представляет собой изменение концентрации вещества, прореагировавшего в единицу времени (т.е. она равна взятой со знаком «минус» частной производной от концентрации по времени). Скорость реакции — положительная величина. Она зависит от природы реагирующих веществ, а также от их концентраций, температуры, присутствия катализатора. Скорость гетерогенной реакции зависит от площади поверхности соприкосновения между реагирующими веществами.

Согласно *закону действующих масс*, скорость химической реакции при $T = \text{const}$ пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ. Пусть в ка-

кой-либо химической реакции A и B — реагенты, а $[A]$ и $[B]$ — их концентрации. Тогда скорость реакции

$$v = k[A]^{\nu_A}[B]^{\nu_B},$$

где ν_A и ν_B — постоянные числа, называемые показателями *порядка реакции* по реагентам A и B (для обратимой реакции ν_A и ν_B равны стехиометрическим коэффициентам); k — константа скорости реакции, которая определяется по формуле Аррениуса:

$$k = k_0 e^{-E/RT}. \quad (15.10)$$

где E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; k_0 — предэкспоненциальный множитель.

В обратимых реакциях скорость прямой реакции вначале имеет максимальное значение, а затем уменьшается вследствие уменьшения концентрации исходных веществ. Для обратной реакции все происходит наоборот. Состояние, в котором скорость обратной реакции становится равной скорости прямой реакции, называется *химическим равновесием*.

Предельный случай течения смеси химически реагирующих газов, когда скорости реакций настолько велики, что в каждой точке среды существует химическое равновесие, называется *химически равновесным потоком*, а пограничный слой при этом является равновесным пограничным слоем. Поток (а также пограничный слой) называется «замороженным», если скорости химических реакций настолько малы, что состав смеси в каждой точке среды определяется только процессами диффузии и конвекции.

Реальные процессы горения топлива включают в себя множество химических реакций. Для упрощения расчетов часто пользуются моделью *простой химической реакции*, включающей в себя три вещества: горючее, окислитель и продукт реакции. Например, при горении твердого топлива углерод C — горючее, кислород O_2 — окислитель, диоксид углерода CO_2 — продукт реакции. Процесс горения углерода зависит как от скорости химических реакций, так и от интенсивности подвода окислителя к поверхности реагирования.

Из (15.10) видно, что скорость реакции зависит от температуры, причем при относительно низкой температуре она оказывается меньше, чем скорость диффузии окислителя к поверхности реагирования. Тогда скорость горения в основном определяется кинетикой химической реакции на поверхности. С увеличением температуры скорость химической реакции резко возрастает до тех пор, пока не будет соизмерима со скоростью диффузии. При больших значениях температуры скорость химической реакции настолько велика, что процесс горения зависит в основном от поступления окислителя к поверхности реагирования. При этом окислитель незамедлительно вступает в реакцию с горючим, а концентрация его на поверхности близка к нулю.

Пусть $\tau_{\text{диф}}$ — характерное время протекания диффузионного процесса ($\tau_{\text{диф}} \sim \delta^2/D$, где δ — толщина диффузионного пограничного слоя), а τ_p — характерное время протекания химической реакции. Отношение $\tau_{\text{диф}}/\tau_p$ называется *числом Дамкеллера*. Оно используется при анализе потоков химически реагирующей смеси газов. Если число Дамкеллера много больше единицы, поток будет химически равновесным; если же оно очень мало, поток считается «замороженным». Для последнего случая в уравнении диффузии $x_i = 0$. В общем случае концентрации компонентов должны рассчитываться как с учетом диффузии, так и с учетом кинетики химических реакций.

Значение x_r , входящее в уравнение диффузии, можно определить, если известны скорости химических реакций:

$$x_i = M_i \sum_{\alpha=1}^r \nu_{i\alpha} v_{\alpha},$$

где M_i — молярная масса i -го компонента смеси ($i = 1, 2, \dots, N$, здесь N — число компонентов); r — число одновременно происходящих независимых реакций (при этом $\alpha = 1, 2, \dots, r$); v_{α} — скорость реакции; $\nu_{i\alpha}$ — стехиометрические коэффициенты (они отрицательны для исходных веществ и положительны для продуктов реакции при условии, что $v_{\alpha} > 0$).

Уравнение энергии (см. § 14.5) справедливо и при наличии в потоке химических реакций, но при этом необходимо учитывать *энthalпию образования* компонента h_i^0 , кДж/кг. В таблицах приводится стандартная энтальпия образования одного моля $H_i^0 = h_i^0 M_i$ из соответствующих простых веществ, называемых элементами. По определению, энтальпия образования простых веществ равна нулю. Стандартные условия соответствуют температуре $T_{\text{ст}} = 278,15 \text{ K}$ ($t_{\text{ст}} = 25^\circ \text{C}$) и давлению $p_{\text{ст}} = 0,101 \text{ МПа}$.

На рис. 15.2 показана схема горения капли жидкого топлива. Согласно модели простой химической реакции, в той зоне, где находятся пары топлива, отсутствует окислитель, а в зоне окислителя не содержатся пары топлива.

Для установившегося процесса гетерогенного горения количество окислителя, прореагировавшего на поверхности горючего, равно количеству окислителя, подводимому к поверхности путем диффузии. Для реакции первого порядка скорость горения, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, $j = k c_{\text{пов}}$, где k — константа скорости реакции, $c_{\text{пов}}$ — массовая концентрация окислителя на поверх-

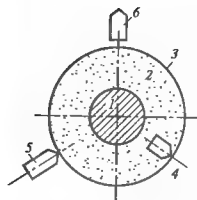


Рис. 15.2. Схема горения жидкого топлива
1, 2 — капля и пары топлива; 3 — зона горения (пламя); 4—6 — потоки соответственно паров топлива, окислителя и продуктов сгорания

ности реагирования. В то же время $j = \beta(c_{\infty} - c_{\text{пов}})$. Таким образом, выполняется равенство

$$j = kc_{\text{пов}} = \beta(c_{\infty} - c_{\text{пов}}),$$

из которого следует, что

$$j = \frac{c_{\infty}}{1/k + 1/\beta}.$$

Величины $1/k$ и $1/\beta$ представляют собой кинетическое и диффузионное сопротивления процессу горения.

15.5. Задачи с решениями

Задача 1. Найдите число Льюиса для влажного воздуха, температура которого $t = 20^\circ\text{C}$, давление $p = 0,101$ МПа, относительная влажность $\varphi = 0,7$.

Решение. Число Льюиса

$$\text{Le} = D/a,$$

где D — коэффициент диффузии; a — температуропроводность.

Коэффициент диффузии при $T_0 = 273$ К и $p_0 = 0,101$ МПа $D_0 = 0,216 \cdot 10^{-4}$ м²/с. При других значениях T и p коэффициент диффузии можно найти по формуле

$$D = D_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,8} \frac{p_0}{p}.$$

Для условий задачи имеем

$$D = 0,216 \cdot 10^{-4} \left(\frac{293}{273} \right)^{1,8} = 0,245 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Найдем температуропроводность воздуха. При $t = 20^\circ\text{C}$ давление насыщенного пара $p_s = 2336,8$ Па. Парциальное давление водяного пара¹

$$p_1 = \varphi p_s = 0,7 \cdot 2336,8 = 1635,8 \text{ Па}.$$

При $t = 20^\circ\text{C}$ и $p_1 = 1635,8$ Па плотность водяного пара $\rho_1 = 0,0121$ кг/м³. Парциальное давление воздуха

$$p_2 = p - p_1 = 101\,000 - 1635,8 = 98\,364 \text{ Па}.$$

При $t = 20^\circ\text{C}$ и $p_2 = 98\,364$ Па плотность воздуха $\rho_2 = 1,185$ кг/м³. Плотность влажного воздуха

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,0121 + 1,185 = 1,197 \text{ кг/м}^3$$

Массовая концентрация водяного пара

$$c_1 = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{0,0121}{1,197} = 0,0101.$$

Массовая концентрация воздуха

$$c_2 = \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{1,185}{1,197} = 0,9899.$$

Теплоемкость водяного пара $c_{p1} = 1,877$ кДж/(кг · К), а теплоемкость воздуха $c_{p2} = 1,005$ кДж/(кг · К). Теплоемкость влажного воздуха находим по формуле

$$c_p = c_{p1}c_1 + c_{p2}c_2 = 1,877 \cdot 0,0101 + 1,005 \cdot 0,9899 = 1,018 \text{ кДж/(кг · К)}.$$

Теплопроводность влажного воздуха

$$\lambda = \frac{\lambda_1 c_1}{c_1 + c_2 \psi_{12}} + \frac{\lambda_2 c_2}{c_2 + c_1 \psi_{21}},$$

где

$$\psi_{12} = \frac{M_1/M_2}{\sqrt{8(1 + M_1/M_2)^{1/2}}} \left[1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{1/4} \right]^2;$$

$$\psi_{21} = \frac{M_2/M_1}{\sqrt{8(1 + M_2/M_1)^{1/2}}} \left[1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{1/4} \right]^2.$$

Для водяного пара относительная молекулярная масса $M_1 = 18,014$, а для воздуха $M_2 = 28,97$. Динамическая вязкость водяного пара

¹ Индекс «1» здесь и в дальнейшем относится к активному компоненту смеси — водяному пару; индекс «2» — к пассивному компоненту — воздуху.

$\mu_1 = 9,745 \cdot 10^{-6}$ Па·с, а для воздуха $\mu_2 = 18,1 \cdot 10^{-6}$ Па·с. При этом $\psi_{12} = 0,575$; $\psi_{21} = 1,718$.

Теплопроводность водяного пара $\lambda_1 = 0,0185$ Вт/(м·К), а теплопроводность воздуха $\lambda_2 = 0,0259$ Вт/(м·К). Для влажного воздуха находим

$$\lambda = \frac{0,0185 \cdot 0,0101}{0,0101 + 0,9899 \cdot 0,575} + \frac{0,0259 \cdot 0,9899}{0,9899 + 0,0101 \cdot 1,718} = 0,0258 \text{ Вт/(м·К)}.$$

Температуропроводность

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{0,0258}{1,197 \cdot 1,018 \cdot 10^3} = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Число Льюиса

$$Le = \frac{0,245 \cdot 10^{-4}}{2,12 \cdot 10^{-5}} = 1,16.$$

Ответ. Число Льюиса $Le = 1,16$.

Задача 2. Плоское влажное изделие длиной $l_0 = 0,5$ м продольно омывается потоком сухого воздуха, для которого температура $t_{\infty} = 20$ °С, давление $p = 0,202$ МПа, скорость $v_{\infty} = 1$ м/с. Температура изделия постоянна по всей длине ($t_c = 20$ °С).

Найдите коэффициент массоотдачи при $x = l_0$.

Решение. Для нахождения коэффициента массоотдачи воспользуемся аналогией процессов тепло- и массообмена. Для процесса теплообмена при вынужденной конвекции жидкости

$$Nu = f(Re, Pr),$$

где $Nu = \alpha l_0 / \lambda$ — число Нуссельта; $Re = v_{\infty} l_0 / \nu$ — число Рейнольдса; $Pr = \nu / a$ — число Прандтля.

Коэффициент массоотдачи определяется соотношением¹

$$\beta = \frac{j_{1c}}{c_{1c} - c_{1\infty}},$$

где j_{1c} — плотность диффузионного потока массы водяного пара; c_{1c} и $c_{1\infty}$ — массовые концентрации водяного пара на поверхности и вдали от тела.

Для массообмена вводятся диффузионное число Нуссельта

$$Nu_D = \frac{\beta l_0}{\rho D}$$

и диффузионное число Прандтля

$$Pr_D = \nu / D.$$

Согласно аналогии, функциональная зависимость для числа Nu_D имеет вид

$$Nu_D = f(Re, Pr_D).$$

Найдем число Рейнольдса при $x = 0,5$ м с учетом зависимости коэффициента ν от давления

$$Re_x = \frac{v_{\infty} x}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,5 \cdot 2}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 6,64 \cdot 10^4.$$

Так как течение в пограничном слое ламинарное, то для процесса теплообмена

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3},$$

а для процесса массообмена

$$Nu_{Dx} = 0,332 Re_x^{1/2} Pr_D^{1/3}.$$

Коэффициент диффузии

$$D = 0,216 \cdot 10^{-4} \left(\frac{293}{273} \right)^{1,8} \frac{0,101}{0,202} = 0,123 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Диффузионное число Прандтля

$$Pr_D = \frac{15,06 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,123 \cdot 10^{-4}} = 0,61.$$

Диффузионное число Нуссельта

$$Nu_{Dx} = 0,332 (6,64 \cdot 10^4)^{1/2} \cdot 0,61^{1/3} = 72,55,$$

и коэффициент массоотдачи

$$\beta = Nu_{Dx} \frac{\rho D}{x} = 72,55 \frac{1,205 \cdot 2 \cdot 0,123 \cdot 10^{-4}}{0,5} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Ответ. Коэффициент массоотдачи $\beta = 4,3 \cdot 10^{-3}$ кг/(м²·с).

Задача 3. Найдите плотности диффузионного потока массы пара j_{1c} , полиго потока массы пара J_{1c} , теплового потока, подводимого к межфазной границе со стороны жидкой фазы, q'_c и теплового потока от межфазной границы в паровоздушную среду q''_c для условий задачи 2 с той лишь разницей, что температура изделия $t_c = 30$ °С. Найдите также скорость Stefanового потока массы $v_{c,п}$ на поверхности пластины.

Решение. При температуре 30°С $p_{1c} - p_s = 4241,7$ Па и $\rho_{1c} = 0,03$ кг/м³.

¹ Здесь и в дальнейшем индекс «с» относится к межфазной границе.

Парциальное давление воздуха

$$p_{2c} = p - p_{1c} = 202 - 4,24 = 197,76 \text{ кПа},$$

и его плотность

$$\rho_{2c} = 1,165 \frac{197,76}{101} = 2,281 \text{ кг/м}^3.$$

Плотность смеси

$$\rho_c = 2,281 + 0,03 = 2,311 \text{ кг/м}^3.$$

Массовая концентрация водяного пара

$$c_{1c} = \frac{\rho_{1c}}{\rho_c} = \frac{0,03}{2,311} = 0,01298.$$

В нашем случае $c_{1\infty} = 0$, $\beta = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$, а

$$j_{1c} = 4,3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,01298 = 5,581 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Плотность полного потока массы

$$J_{1c} = j_{1c} + \rho_{1c} v_{c,п},$$

где $v_{c,п}$ — скорость стефанового потока массы на межфазной границе.

Для полупроницаемой межфазной границы

$$J_{1c} = \frac{j_{1c}}{1 - c_{1c}} = \frac{5,581 \cdot 10^{-5}}{1 - 0,01298} = 5,654 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Находим коэффициент теплоотдачи α и q''_c по закону Ньютона—Рихмана:

$$\alpha = 0,332 \frac{2,59 \cdot 10^{-2}}{0,5} \cdot (6,64 \cdot 10^4)^{1/2} \cdot 0,703^{1/3} = 3,94 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)};$$

$$q''_c = \alpha(t_c - t_{\infty}) = 3,94(30 - 20) = 39,4 \text{ Вт/м}^2.$$

Для определения q'_c воспользуемся соотношением энергетического баланса для межфазной границы:

$$J_{1c} r_1 + q''_c = q'_c,$$

где r_1 — теплота парообразования.

При $t_s = 30^\circ \text{C}$ $r_1 = 2430,2 \text{ кДж/кг}$. Таким образом,

$$q'_c = 5,654 \cdot 10^{-5} \cdot 2430,2 \cdot 10^3 + 39,4 = 176,8 \text{ Вт/м}^2.$$

Скорость стефанового потока массы

$$v_{c,п} = \frac{5,654 \cdot 10^{-5} - 5,581 \cdot 10^{-5}}{0,03} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

$$\text{Ответ. } j_{1c} = 5,581 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}; J_{1c} = 5,654 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}; q'_c = 176,8 \text{ Вт/м}^2; q''_c = 39,4 \text{ Вт/м}^2; v_{c,п} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Задача 4. Капля воды находится во влажном воздухе. Парциальное давление водяного пара равно $7,01 \cdot 10^4 \text{ Па}$, а полное давление составляет $9,01 \cdot 10^4 \text{ Па}$. В данный момент времени диаметр капли $d = 2 \text{ мм}$, а ее температура $t_c = 86^\circ \text{C}$. Найдите плотность диффузионного потока j_{1c} , плотность полного потока J_{1c} , скорость стефанового потока $v_{c,п}$ а также плотность теплового потока q''_c на поверхности капли. Движением капли относительно воздуха пренебречь и считать, что $Le = 1$.

Решение. При давлении $7,01 \cdot 10^4 \text{ Па}$ $t_s = 90^\circ \text{C}$ и $\rho_{1\infty} = 0,423 \text{ кг/м}^3$. Плотность воздуха при давлении $2 \cdot 10^4 \text{ Па}$ и температуре 90°C $\rho_{2\infty} = 0,192 \text{ кг/м}^3$.

Таким образом, плотность смеси

$$\rho_{\infty} = \rho_{1\infty} + \rho_{2\infty} = 0,423 + 0,192 = 0,615 \text{ кг/м}^3.$$

Массовая концентрация водяного пара вдали от капли

$$c_{1\infty} = \frac{\rho_{1\infty}}{\rho_{\infty}} = \frac{0,423}{0,615} = 0,687.$$

Значение $c_{2\infty} = 1 - 0,687 = 0,313$. При $t_s = 86^\circ \text{C}$ $\rho_{1c} = 0,366 \text{ кг/м}^3$, а для воздуха $\rho_{2c} = 0,194 \text{ кг/м}^3$. Тогда

$$c_{1c} = \frac{\rho_{1c}}{\rho_c} = \frac{0,366}{0,366 + 0,194} = 0,654.$$

Найдем теплопроводность влажного воздуха. Предварительно определим $\psi_{12} = 0,573$ и $\psi_{21} = 1,730$. Из таблиц находим $\lambda_1 = 2,255 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\lambda_2 = 3,13 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Тогда получаем $\lambda = 1,992 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Коэффициент диффузии

$$D = 0,216 \cdot 10^{-4} \left(\frac{363}{273} \right)^{1,8} \frac{10,1 \cdot 10^4}{9,01 \cdot 10^4} = 0,404 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Для условий задачи $Nu - Nu_D = 2$. Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = 2 \frac{1,992 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} = 19,92 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)},$$

а коэффициент массоотдачи

$$\beta = 2 \frac{0,615 \cdot 0,404 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,0249 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Определяем искомые величины:

$$j_{1c} = \beta(c_{1\infty} - c_{1c}) = 0,0249(0,687 - 0,654) = 8,22 \cdot 10^{-4} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)};$$

$$J_{1c} = \frac{j_{1c}}{1 - c_{1c}} = \frac{8,22 \cdot 10^{-4}}{1 - 0,654} = 23,76 \cdot 10^{-4} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)};$$

$$v_{c,п} = \frac{J_{1c} - j_{1c}}{\rho_{1c}} = \frac{23,76 \cdot 10^{-4} - 8,22 \cdot 10^{-4}}{0,366} = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ м/с};$$

$$q_c'' = \alpha(t_{\infty} - t_c) = 19,92(90 - 86) = 79,69 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ. $j_{1c} = 8,22 \cdot 10^{-4} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}; J_{1c} = 23,76 \cdot 10^{-4} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}; v_{c,п} = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}; q_c'' = 79,7 \text{ Вт/м}^2.$

Задача 5. Термометр, обернутый влажной тканью, поперечно омывается потоком воздуха, параметры которого: $t_{\infty} = 20^\circ \text{C}$; $p = 0,101 \text{ МПа}$; $\phi = 70\%$. Найдите температуру термометра.

Решение. Процесс испарения влажной ткани в данном случае можно считать аднабтным, т.е. $q_c' = 0$. Тогда соотношение энергетического баланса будет иметь вид

$$J_{1c} r_1 + q_c'' = 0.$$

Найдем J_{1c} с учетом того, что $j_{1c} = \beta(c_{1c} - c_{1\infty})$, а $q_c'' = \alpha(t_c - t_{\infty})$. Получим

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{c_{1c} - c_{1\infty}}{1 - c_{1c}} r_1 = t_{\infty} - t_c.$$

При поперечном обтекании цилиндра $Nu = CRe^n Pr^m$, а $Nu_D = CRe^n Pr_D^m$, причём $m = 0,38$.

Тогда

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{c_p} Le^{1-m} = \frac{1}{c_p} Le^{0,62}.$$

В результате будем иметь следующее уравнение для нахождения t_c :

$$Le^{0,62} \frac{c_{1c} - c_{1\infty}}{1 - c_{1c}} = c_p \frac{t_{\infty} - t_c}{r_1}.$$

Для наших условий (см. задачу 1) $Le = 1,16$, $c_p = 1,018 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$, $c_{1\infty} = 0,0101$. Значения c_{1c} и r_1 однозначно определяются температурой t_c . Решая последнее уравнение графически, получаем: $t_c = 15,3^\circ \text{C}$.

Ответ. Температура термометра равна $15,3^\circ \text{C}$.

Задача 6. На вертикальной плоской стенке, температура которой $t_{ст} = 78^\circ \text{C}$, происходит пленочная конденсация водяного пара из паровоздушной смеси. Давление смеси равно $7 \cdot 10^4 \text{ Па}$, парциальное давление воздуха вдали от стенки составляет $2,264 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Паровоздушная смесь движется сверху вниз относительно пленки конденсата со скоростью 8 м/с . Пренебрегая динамическим воздействием потока смеси на стекающую пленку, найдите для сечения $x = 0,1 \text{ м}$ температуру поверхности пленки t_c , плотность отводимого стенкой теплового потока q_c' .

Решение. Найдем массовые концентрации водяного пара и воздуха вдали от стенки. Парциальное давление водяного пара $p_{1\infty} = p - p_{2\infty} = 7 \cdot 10^4 - 2,264 \cdot 10^4 = 4,736 \cdot 10^4 \text{ Па}$. При этом давлении $t_s = 80^\circ \text{C}$ и $\rho_{1\infty} = 0,293 \text{ кг/м}^3$. Для воздуха при $t = 80^\circ \text{C}$ и $p = 2,264 \cdot 10^4 \text{ Па}$ $\rho_{2\infty} = 0,224 \text{ кг/м}^3$. Плотность смеси $\rho_{\infty} = \rho_{1\infty} + \rho_{2\infty} = 0,293 + 0,224 = 0,517 \text{ кг/м}^3$. Вычислим массовые концентрации:

$$c_{1\infty} = \frac{0,293}{0,517} = 0,566;$$

$$c_{2\infty} = 1 - c_{1\infty} = 1 - 0,566 = 0,434.$$

Определим теплопроводности λ и вязкости μ для паровоздушной смеси при $t = 80^\circ \text{C}$.

Из таблиц находим:

$$\lambda_1 = 2,151 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad \mu_1 = 11,09 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с};$$

$$\lambda_2 = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad \mu_2 = 21,1 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Определим $\psi_{12} = 0,5676$; $\psi_{21} = 1,7435$. Значение $\lambda = 0,02426 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Значение μ рассчитаем по формуле

$$\mu = \frac{\mu_1 c_1}{c_1 + c_2 \psi_{12}} + \frac{\mu_2 c_2}{c_2 + c_1 \psi_{21}}.$$

После вычислений получим $\mu = 14,17 \cdot 10^{-6}$ Па·с.

Коэффициент диффузии

$$D = 0,216 \cdot 10^{-4} \left(\frac{353}{273} \right)^{1,8} \frac{0,101}{0,07} = 0,49 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Найдем теплоемкость смеси. Предварительно из таблиц получим $c_{p1} = 2,064$ кДж/(кг·К), $c_{p2} = 1,009$ кДж/(кг·К). Тогда $c_p = 1,606$ кДж/(кг·К).

Вычислим числа Pr и Pr_D:

$$\text{Pr} = \frac{14,17 \cdot 10^{-6} \cdot 1,606 \cdot 10^3}{2,426 \cdot 10^{-2}} = 0,937;$$

$$\text{Pr}_D = \frac{14,17 \cdot 10^{-6}}{0,517 \cdot 0,49 \cdot 10^{-4}} = 0,559.$$

Обтекание пленки паровоздушной смесью будем рассматривать так же, как продольное обтекание пластины. Найдем число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{0,517 \cdot 8 \cdot 0,1}{14,17 \cdot 10^{-6}} = 29\,209.$$

Рассчитаем коэффициенты α и β :

$$\alpha = 0,332 \frac{2,426 \cdot 10^{-2}}{0,1} 29\,209^{1/2} \cdot 0,937^{1/3} = 13,47 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\beta = 0,332 \frac{0,517 \cdot 0,49 \cdot 10^{-4}}{0,1} 29\,209^{1/2} \cdot 0,559^{1/3} = 1,185 \cdot 10^{-2} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Для нахождения температуры поверхности пленки воспользуемся соотношением энергетического баланса, в котором q'_c рассчитаем по теории Нуссельта:

$$q'_c = C(t_c - t_{\text{ст}})^{3/4},$$

где

$$C = \left(\frac{\lambda^3 r \rho g}{4 \nu x} \right)^{1/4} = \left(\frac{0,673^3 \cdot 2,64 \cdot 10^6 \cdot 972 \cdot 9,8}{4 \cdot 0,375 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1} \right)^{1/4} = 15\,035 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^{3/4}).$$

С учетом найденных значений C , α , β и c_{1c} уравнение баланса примет вид

$$\frac{0,0185(0,566 - c_{1c})r_1}{1 - c_{1c}} + 13,47(80 - t_c) = 15\,035(t_c - 78).$$

Значения c_{1c} и r_1 являются функциями температуры t_c , которая равна температуре насыщения при парциальном давлении пара p_{1c} . Решая последнее уравнение графически, находим $t_c = 78,1$ °С.

Плотность теплового потока

$$q'_c = 15\,035(78,1 - 78)^{3/4} = 1503,5 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ. Температура поверхности пленки $t_c = 78,1$ °С; $q'_c = 1503,5$ Вт/м².

Задача 7. Капля воды диаметром $d = 0,5$ мм попадает в поток перегретого пара. Температура капли равна 100 °С, для пара температура составляет 200 °С, а давление — 0,101 МПа. Оцените время испарения капли. Считайте, что относительная скорость движения капли равна нулю.

Решение. При температуре 200 °С и давлении 0,101 МПа плотность перегретого водяного пара $\rho_{\infty} = 0,46$ кг/м³, а плотность насыщенного пара $\rho_c = 0,598$ кг/м³. Находим молярные концентрации паров H₂O вблизи поверхности капли и вдали от нее:

$$C_c = \frac{\rho_c}{M} = \frac{0,598}{18} = 0,0332 \text{ кмоль/м}^3;$$

$$C_{\infty} = \frac{\rho_{\infty}}{M} = \frac{0,46}{18} = 0,0255 \text{ кмоль/м}^3.$$

Плотность диффузионного потока пара, кмоль/(м²·с), на поверхности капли

$$j_m = \beta_m(C_c - C_{\infty}),$$

где β_m — коэффициент массоотдачи, м/с.

В нашем случае диффузионное число Нуссельта $\text{Nu}_D = 2$, причем

$$\text{Nu}_D = \frac{\beta_m d}{D} = \frac{\beta_m}{D}.$$

Следовательно, коэффициент массоотдачи

$$\beta_m = 2 \frac{D}{d} = \frac{D}{r},$$

где r — текущий радиус капли.

Так как капля испаряется, то значение r со временем уменьшается.

Считаем, что температура капли во все время испарения равна 100 °С. Тогда разность концентраций $\Delta C = C_c - C_{\infty}$ будет постоянной.

Так как плотность диффузионного потока массы $j = j_m M$, то

$$j = \frac{M D}{r} \Delta C.$$

Запишем уравнение баланса массы для капли, плотность которой ρ' :

$$\frac{MD}{r} \Delta C 4\pi r^2 d\tau = -\rho' 4\pi r^2 dr.$$

Интегрированием последнего уравнения находим время испарения капли:

$$\tau = \frac{\rho' r_0^2}{2MD\Delta C},$$

где r_0 — начальный радиус капли.

Коэффициент диффузии D примем равным кинематической вязкости насыщенного пара при $t = 100^\circ\text{C}$. Тогда $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Подставляя известные величины в полученную формулу, находим

$$\tau = \frac{958,4(0,25 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 10^{-5}(0,0332 - 0,0255)} = 10 \text{ с}.$$

В диффузионном пограничном слое температура изменяется от 100 до 200°C . Коэффициент диффузии $D \sim T^{1,8}$. Мы приняли $T = 373 \text{ К}$. Среднее значение коэффициента диффузии в действительности будет больше значения, принятого нами, а время испарения — меньше. Кроме того, из-за наличия относительной скорости значение коэффициента массоотдачи больше того значения, которое использовано в расчете, что также приведет к уменьшению времени испарения.

Ответ. Приблизительно время испарения капли $\tau = 10 \text{ с}$.

Часть пятая ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Глава шестнадцатая

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

16.1. Общие сведения о тепловом излучении

Сопоставление процессов переноса теплоты за счет излучения и теплопроводности. Теплопроводность обусловлена движением микрочастиц тела; теплообмен излучением осуществляется посредством электромагнитных волн или фотонов. Теплопроводность в пустоте отсутствует. Теплообмен излучением между телами осуществляется как при наличии, так и в отсутствии вещественной среды. Если среда не поглощает излучение, то ее температура никак не влияет на процесс переноса теплоты. Например, можно поджечь деревянный предмет, сфокусировав солнечные лучи с помощью линзы, изготовленной из льда.

Тепловой поток через произвольную элементарную площадку, выделенную в неравномерно нагретом теле, полностью определяется вектором q , который, в свою очередь, зависит только от значения λ и $\text{grad } T$ в данной точке. Чтобы рассчитать интенсивность переноса теплоты в окрестности данной точки тела или среды в процессе теплообмена излучением, необходимо учесть энергию, переносимую всеми лучами, проходящими через данную точку. При этом на тепловое состояние любого малого элемента тела или среды непосредственно влияют все другие элементы излучающей системы. Таким образом, интегральным характером процесса теплообмен излучением отличается от теплопроводности.

Тепловое излучение. Известны различные виды излучения. Тепловое излучение — это излучение нагретых тел; оно определяется только температурой и свойствами этих тел. Чтобы атом начал излучать электромагнитные волны или фотоны, ему надо сообщить определенное количество энергии. В процессе излучения атом эту энергию теряет: она переходит в энергию электромагнитных волн. Для непрерывного излучения необходим приток энергии извне. При тепловом излучении потери энергии компенсируются за счет энергии теплового движения атомов или молекул, т.е. за счет внутренней энергии вещества. Таким образом, здесь имеет место постоянный переход внутренней энергии в энергию возбуждения атомов, а затем энергия возбуждения преобразуется в энергию электромагнитных волн или фотонов (энергию излучения). Чем выше температура, тем больше

ше энергия теплового движения частиц и, следовательно, больше энергия излучения. Согласно закону Стефана—Больцмана, энергия излучения абсолютно черного тела пропорциональна абсолютной температуре в четвертой степени. Ясно, что роль теплообмена излучением в процессах переноса теплоты возрастает с увеличением температуры тела или среды.

Излучение характеризуется длиной волны λ или частотой ν , причем эти две характеристики связаны зависимостью

$$\lambda \nu = c,$$

где c — скорость света.

Как известно, скорость света в данной среде зависит от коэффициента преломления n и связана со скоростью света в пустоте c_0 соотношением

$$c = c_0/n.$$

Частота излучения не зависит от физического состояния той среды, в которой распространяется излучение, а длина волны зависит.

Спектр излучения различных тел. Спектры излучения всех тел можно причислить к одному из трех типов: линейчатому, полосатому или сплошному.

Рассмотрим спектр излучения. Чтобы судить о спектре поглощения, вспомним из курса физики закон Кирхгофа в виде: всякое вещество поглощает те лучи, которые само может испускать (см. § 16.3).

Линейчатый спектр характерен для газов в атомарном состоянии, когда атомы практически не взаимодействуют друг с другом. Излучение таких газов в спектре дает линии очень узкой (но конечной) ширины. Используя квантово-механические представления, можно сказать, что линейчатый спектр излучения газов обусловлен переходом атома с одного энергетического уровня энергии на другой. Каждому газу присущ вполне определенный линейчатый спектр, состоящий из отдельных спектральных линий или групп. При больших давлениях атомы взаимодействуют друг с другом, поэтому спектральные линии расширяются. При очень высоких температурах атом газа распадается на положительные ионы и электроны, которые находятся в свободном состоянии и при своем ускоренном движении образуют сплошной спектр излучения.

Полосатый спектр — спектр излучения молекул. Это более сложный спектр, в котором каждая полоса состоит из множества линий. Энергия молекулы

$$E \approx E_{эл} + E_{кол} + E_{вращ}$$

где $E_{эл}$ — энергия движения электронов относительно ядер; $E_{кол}$ — энергия колебания ядер (периодическое изменение относительного положения ядер); $E_{вращ}$ — энергия вращения ядер (изменение ориентации молекул в пространстве).

Известно, что $E_{эл} \gg E_{кол} \gg E_{вращ}$. Расстояние между вращательными уровнями энергий гораздо меньше расстояния между колебательными, а в свою очередь, расстояние между колебательными уровнями гораздо меньше расстояния между электронными. Следовательно, наименьшую энергию надо затратить на возбуждение вращательного уровня энергии. Поскольку излучение — это переход с одного уровня энергии на другой, то сложный спектр излучения молекул объясняется многообразием переходов с одного энергетического уровня на другой. При таких переходах в спектре излучения появляются полосы, называемые колебательными, вращательными, электронно-колебательными, колебательно-вращательными и др. Колебательные и вращательные полосы наблюдаются у многоатомных молекул. Поэтому в инфракрасной и ближней видимой части спектра наиболее сильно излучают (и следовательно, поглощают) такие газы, как H_2O (пар) и CO_2 . Именно этим можно объяснить существенное поглощение атмосферой излучения Земли (парниковый эффект атмосферы). Энергия излучения газов H_2O (пара) и CO_2 составляет значительную часть энергии излучения продуктов сгорания топлив в топках паровых котлов.

Двухатомные газы с симметричными молекулами (O_2 , N_2) колебательных и вращательных полос не имеют, поэтому они не излучают энергию в инфракрасной области спектра. Объясняется это отсутствием у них дипольного момента. Несимметричные двухатомные молекулы (CO , NO) обладают дипольным моментом, поэтому имеют полосы излучения в инфракрасной области спектра, хотя интенсивность излучения в этих полосах гораздо меньше, чем для трехатомных газов CO_2 и H_2O (пар).

Сплошной спектр излучения характерен для жидких и твердых тел. В жидких и твердых телах, где частицы сильно взаимодействуют друг с другом, энергия каждой из них включает в себя и энергию ее взаимодействия с другими частицами, которая может иметь самые разнообразные значения. Поэтому вместо отдельных энергетических уровней характерных для газов, здесь образуются сплошные полосы возможных энергетических состояний. При этом значение квантов излучения может быть самым различным. В результате спектр излучения получается сплошным.

Поглощение излучения. Французским ученым П. Бугером (1698—1758 гг.) был установлен закон, согласно которому уменьшение интенсивности излучения при прохождении света через вещество происходит по закону экспоненты, т.е. интенсивность излучения на выходе из слоя поглощающего вещества в $e^{\alpha x}$ (x — толщина слоя) раз меньше, чем на входе в него. Коэффициент α называется *коэффициентом поглощения*, который зависит от длины волны и др. На опыте можно убедиться в том, что коэффициент α мал для газов и велик для металлов. Действительно, луч света, хотя и с большим ослаблением, проходит через толстый слой водяного пара (тумана), а даже через тонкую металлическую пластину не проходит.

Физически большой коэффициент поглощения металла объясняется тем, что в металлах из-за наличия свободных электронов, движущихся под действием электрического поля световой волны, возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением джоулевой теплоты. При этом энергия световой волны быстро уменьшается, превращаясь во внутреннюю энергию. Таким образом, в металлах, а также и во многих диэлектриках поглощение (а также и излучение) энергии происходит в пределах тонкого поверхностного слоя. Энергия излучения, исходящая от таких тел, пропорциональна площади поверхности. Газы, если они в данной области спектра не прозрачны для теплового излучения, поглощают и излучают во всем объеме. Поэтому энергия излучения газа пропорциональна занимаемому им объему. Поглощение или излучение газов называется объемным. Объемным оно будет также называться и в том случае, если газ содержит во взвешенном состоянии мелкие твердые частицы (например, частицы сажи, золы или кокса в продуктах сгорания топлива).

16.2. Интенсивность излучения и плотность потока излучения.

Вектор плотности потока излучения

Различают интегральные и спектральные (монохроматические) характеристики излучения. Интегральные характеристики соответствуют энергии излучения во всем спектре длин волн от 0 до ∞ , а спектральные — предельно узкому интервалу длин волн $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. И те, и другие характеристики будут рассматриваться применительно к поверхностному излучению, будь то поверхность твердого тела или поверхность газового объема.

Интегральные характеристики энергии излучения. Поток излучения — количество энергии излучения, переносимой в единицу времени через произвольную поверхность. Поток излучения обозначается Q , Вт. Этим понятием характеризуется как собственное излучение тела, которое зависит только от его температуры и радиационных свойств, так и падающее на произвольную поверхность излучение, поглощенное, отраженное и другие потоки излучения.

Плотность потока излучения (точнее, поверхностная плотность потока излучения) — поток излучения, проходящий через единицу площади элементарной площадки поверхности по всевозможным направлениям в пределах полусферического телесного угла $\omega = 2\pi$. Эта величина обозначается E , Вт/м². Если плотность потока излучения для всех точек поверхности F одинакова, то $Q = EF$, где F — площадь поверхности.

Интенсивность излучения — отношение потока излучения, распространяющегося в данном направлении в пределах элементарного телесного угла, к единице телесного угла и к единице площади поверхности, расположенной в данной точке перпендикулярно к направлению излучения. Интенсивность излучения обозначается I , Вт/(м² · ср). Интенсивность из-

лучения иначе называется *яркостью* излучения.

Рассмотрим элементарную площадку dF на поверхности площадью F (рис. 16.1). Пусть n — нормаль к площадке dF , а θ — угол между нормалью и произвольно выбранным направлением s . Через точку M в пределах полусферического телесного угла проходит бесчисленное множество лучей. Энергия всех этих лучей, переносимая в единицу времени, равна dQ . Малая часть этого излучения d^2Q в пределах элементарного телесного угла $d\omega$ распространяется в направлении s . По определению интенсивность излучения

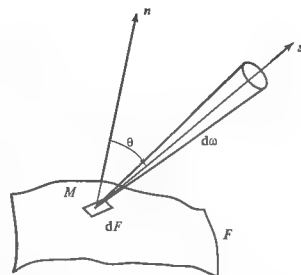


Рис. 16.1. К определению интенсивности излучения

$$I = \frac{d^2Q}{d\omega dF \cos \theta}. \quad (16.1)$$

Из трех рассмотренных характеристик излучения последняя наиболее детально характеризует излучение. Если известна функция $I = I(M, s)$, то

$$dQ = \int_{\omega=2\pi} d^2Q = \int_{\omega=2\pi} I d\omega \cos \theta dF,$$

откуда (с учетом того, что $E = dQ/dF$) следует формула

$$E = \int_{\omega=2\pi} I \cos \theta d\omega. \quad (16.2)$$

В теории теплообмена излучением используется закон Ламберта, согласно которому *интенсивность излучения в данной точке поверхности не зависит от направления*. Следствием этого утверждения является закон косинусов: $d^2Q \sim \cos \theta$. Другим важным следствием является соотношение

$$E = \pi I, \quad (16.3)$$

которое вытекает из (16.2) при условии $I = \text{const}$. Действительно, элементарный телесный угол (рис. 16.2)

$$d\omega = \frac{dF}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (16.4)$$

Подставив (16.4) в (16.2), получим

$$E = I \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi I.$$

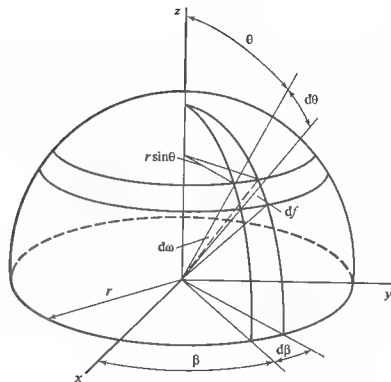


Рис. 16.2. К выводу формулы (16.3)

Интенсивность излучения диэлектриков постоянна в области $0 \leq \theta \leq \pi/6$ и уменьшается до нуля при $\theta > \pi/6$. Для металлов в диапазоне $0 \leq \theta \leq \pi/4$ интенсивность излучения практически постоянна, далее с ростом θ увеличивается и имеет максимум при значениях угла, близких к $\theta \approx \pi/2$. Для шероховатых поверхностей $I \approx \text{const}$.

Тела, для которых выполняется закон Ламберта как для собственного, так и для отраженного излучения, называются *диффузными*. Для диффузных тел расчет теплообмена излучением значительно проще, чем для реальных.

Спектральные характеристики энергии излучения. Спектральная интенсивность излучения I_λ — отношение интенсивности излучения, взятой в бесконечно малом интервале длин волн $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, к этому интервалу:

$$I_\lambda = \frac{dI_\lambda}{d\lambda}. \quad (16.5)$$

Если излучение характеризуется не длиной волны λ , а частотой ν , то спектральная интенсивность излучения

$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{d\nu}$$

Величины I_λ и I_ν связаны соотношением

$$I_\lambda = I_\nu \frac{c}{\lambda^2}. \quad (16.5a)$$

Из (16.5) следует, что

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda.$$

По определению спектральная плотность потока излучения

$$E_\lambda = \frac{dE_\lambda}{d\lambda}.$$

Интегральная и спектральная плотности потока излучения связаны между собой соотношением

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda. \quad (16.6)$$

Вектор плотности потока излучения. Этот вектор обозначается q_R и вводится для математического описания явления переноса энергии излучения. Вектор q_R указывает направление, в котором в данной точке пространства перенос энергии осуществляется с наибольшей интенсивностью. Численное значение q_R равно разности плотностей потоков излучения, падающих на различные стороны элементарной площадки, расположенной перпендикулярно к вектору q_R . Таким образом, вектор q_R характеризует плотность потока *резльтирующего* излучения. Зная q_R как функцию точки излучаемой области пространства, можно найти поток результирующего излучения через произвольную поверхность F :

$$Q = \int_F q_R n_0 dF. \quad (16.7)$$

Здесь n_0 — единичный вектор нормали к элементарной площадке. Если F — площадь замкнутой поверхности, то n_0 — вектор внешней нормали. В таком случае в (16.7) Q — поток энергии излучения, уходящей из объема, ограниченного поверхностью F .

Если в среде одновременно происходит перенос энергии посредством излучения и теплопроводности, то величиной, характеризующей в данной точке интенсивность этого переноса, будет вектор $q_\Sigma = q_R + q$, где $q = -\lambda \text{grad} T$.

Если контрольная поверхность F совпадает с граничной поверхностью системы твердых тел, то в (16.7) n_0 будет представлять собой внутреннюю нормаль к этой поверхности. Отсюда следует, что в случае непрозрачного тела *резльтирующий поток излучения есть разность между потоками поглощенного и собственного излучений*.

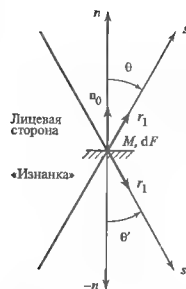


Рис. 16.3. К определению вектора плотности потока излучения

где вектор плотности потока излучения

$$\mathbf{q}_R(M) = \int_{\omega=4\pi} I(M, s) \mathbf{r}_1 d\omega. \quad (16.8)$$

Здесь $\mathbf{r}_1$ — единичный вектор, характеризующий направление луча s .

Мы доказали, что $E_{\text{рез}}(M)$ есть проекция $\mathbf{q}_R$ на направление вектора $\mathbf{n}_0$, перпендикулярного площадке dF .

Из (16.8) видно, что для определения $\mathbf{q}_R$ необходимо знать интенсивность всех лучей, проходящих через точку M .

16.3. Закон Кирхгофа

Равновесное излучение. Тепловое излучение — это единственный вид излучения, который может быть равновесным. Предположим, что какое-либо нагретое тело помещено в полость, ограниченную идеально отражающей оболочкой. В результате непрерывного обмена энергией между телом и излучением в конце концов наступит равновесие, т.е. тело в единицу времени будет поглощать ровно столько энергии, сколько и излучать. Другими словами, тело в единицу времени теряет какое-то количество своей энергии (она переходит в энергию излучения), и в ту же единицу времени эта энергия к нему возвращается. Тело эту энергию поглощает, и она снова превращается в энергию излучения. Следовательно, процесс излучения поддерживается за счет собственной энергии тела, которую оно получило каким-то образом (например, в процессе нагревания от источника теплоты) в начальный момент времени. Это и есть равновесное излучение. От-

метим, что рассмотренный пример соответствует равновесию между излучением и веществом.

$$E^+(M) = \int_{\omega=2\pi} I(M, s) \cos \theta d\omega;$$

$$E^-(M) = \int_{\omega=2\pi} I(M, s) \cos \theta' d\omega = \\ = - \int_{\omega=2\pi} I(M, s) \cos \theta d\omega.$$

По определению

$$E_{\text{рез}}(M) = E^+(M) - E^-(M) = \\ = \int_{\omega=4\pi} I(M, s) \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_0 d\omega = \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{n}_0,$$

метим, что рассмотренный пример соответствует равновесию между излучением и веществом.

Используя второй закон термодинамики (в изотермической системе самопроизвольно разность температур возникнуть не может), легко доказать, что излучение в полости не зависит ни от материала стенок полости, ни от физического состояния тел, которые в ней находятся. Таким образом, равновесное тепловое излучение имеет место в любой замкнутой изотермической системе тел. Энергия этого излучения зависит только от температуры.

Абсолютно черное тело. Кирхгофом впервые введено понятие абсолютно черного тела, которое ничего не отражает и не пропускает через себя, а полностью поглощает все падающее на него излучение независимо от его направления, спектрального состава и поляризации. Моделью абсолютно черного тела может служить маленькое отверстие в стенке замкнутой полости. Излучение, заполняющее эту полость, при условии, что температура стенки полости постоянная, является равновесным тепловым излучением. Следовательно, равновесное тепловое излучение — это излучение абсолютно черного тела. Излучение, выходящее из маленького отверстия в стенке полости (маленького потому, чтобы выход излучения не нарушил равновесия), представляет собой излучение абсолютно черного тела.

Формулировка закона Кирхгофа. Опираясь на второй закон термодинамики, для случая равновесного теплового излучения Кирхгоф установил закон, который формулируется так: «отношение спектральной плотности потока собственного излучения тела к его спектральной поглощательной способности¹ не зависит от природы тела» и является универсальной функцией длины волны и температуры, т.е.

$$\frac{E_{\lambda, \text{соб}}(\lambda, T)}{A_{\lambda}(\lambda, T)} = f(\lambda, T). \quad (16.9)$$

Для абсолютно черного тела $A_{\lambda}(\lambda, T) = 1$, откуда следует, что $f(\lambda, T)$ есть не что иное, как спектральная плотность потока излучения абсолютно черного тела, которую мы обозначим $E_{\lambda 0}$. Тогда закон Кирхгофа можно записать в виде

$$\frac{E_{\lambda, \text{соб}}(\lambda, T)}{A_{\lambda}(\lambda, T)} = E_{\lambda 0}(\lambda, T). \quad (16.10)$$

Таким образом, закон Кирхгофа устанавливает связь между собственным излучением любого тела и излучением абсолютно черного тела (равновесным излучением). Теперь изучение равновесного теплового излучения сводится к отысканию универсальной функции Кирхгофа $E_{\lambda 0}(\lambda, T)$.

¹ Под поглощательной способностью A понимается отношение потоков поглощенного и падающего излучений.

Как известно, полное решение этой задачи было найдено Планком в 1901 г. Этот год стал годом рождения квантовой физики.

Из закона Кирхгофа вытекают два следствия. Первое — из всех тел в природе наибольшей излучательной способностью обладает абсолютно черное тело. Второе — если тело в каком-то интервале длин волн не поглощает энергию излучения, то оно в этом интервале длин волн и не излучает ее.

Закон Кирхгофа можно записать и для интегрального излучения. Перепишем (16.10) в виде

$$E_{\lambda, \text{сб}}(\lambda, T) = A_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda, 0}(\lambda, T). \quad (16.11)$$

Теперь умножим левую и правую части на $d\lambda$ и проинтегрируем по λ от 0 до ∞ , затем разделим на E_0 — интегральную плотность потока излучения абсолютно черного тела:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{\lambda, 0} d\lambda.$$

В результате получим закон Кирхгофа в виде

$$\frac{E_{\text{сб}}}{A} = E_0 = f(T), \quad (16.12)$$

где A — интегральная поглощательная способность;

$$A = \frac{\int_0^{\infty} A_{\lambda} E_{\lambda, 0} d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda, 0} d\lambda}.$$

Локальное термодинамическое равновесие. В условиях равновесного теплового излучения собственный поток излучения любого тела можно определить по закону Кирхгофа, используя (16.10) и (16.12). На практике мы имеем дело с неравновесным тепловым излучением, т.е. с переносом энергии в неизоэнергетических системах. Возникает вопрос: имеет ли тогда закон Кирхгофа практическое значение? Оказывается закон Кирхгофа можно распространить и на неравновесное тепловое излучение. Для этого используется гипотеза локального термодинамического (статистического) равновесия. Смысл этой гипотезы сводится к допущению, что излучательная способность тела (или любого его элементарного объема) определяется только его температурой и физическими свойствами. Другими словами, при отсутствии термодинамического равновесия во всей системе тело испускает такие же лучи и той же интенсивности, которые имели бы место при равновесном тепловом излучении в системе тел, температура которых равна температуре данного тела. Но как излучает тело в условиях равнове-

сия, мы знаем (см. (16.11)). Теперь по формуле (16.11) мы можем найти $E_{\lambda, \text{сб}}$ по температуре тела и значению A_{λ} , которое, согласно указанной гипотезе, не зависит от того, какое излучение (равновесное или неравновесное) падает на это тело.

Физическую сущность гипотезы локального термодинамического равновесия можно пояснить на примере излучения газа. При равновесном тепловом излучении в любом элементарном объеме газа одинаковы в среднем распределения молекул по энергиям и энергии по уровням (вращательным, колебательным, электронным). Если в некоторой области пространства равновесие нарушается (например, газ охлаждается, и тогда он будет отдавать больше энергии, чем получать), то какое-то время некоторые молекулы будут иметь меньшую энергию, чем другие, однако благодаря их хаотическому движению (молекул много, они интенсивно обмениваются энергией друг с другом) произойдет восстановление равновесного распределения энергии, которое будет соответствовать другой температуре. Из сказанного должно быть ясно, что гипотеза локального термодинамического равновесия не оправдывается для сильно разреженных газов и в случае высокоинтенсивных процессов теплообмена, протекающих с большой скоростью.

16.4. Законы излучения абсолютно черного тела

Закон Планка. Используя статистические методы и гипотезу о квантовом характере теплового излучения, Планк вывел формулу для спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела:

$$E_{\nu, 0}(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c_0} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (16.13)$$

где $h = 6,6262 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; $k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; $c_0 = 2,9979 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в пустоте.

Используя (16.5а), $E_{\nu}(\nu, T)$ можно заменить на $E_{\lambda}(\lambda, T)$ и вместо (16.13) получить

$$E_{\lambda, 0}(\lambda, T) = \frac{2\pi c_0^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1}. \quad (16.13а)$$

Изменение $E_{\lambda, 0}$ в зависимости от λ и T показано на рис. 16.4.

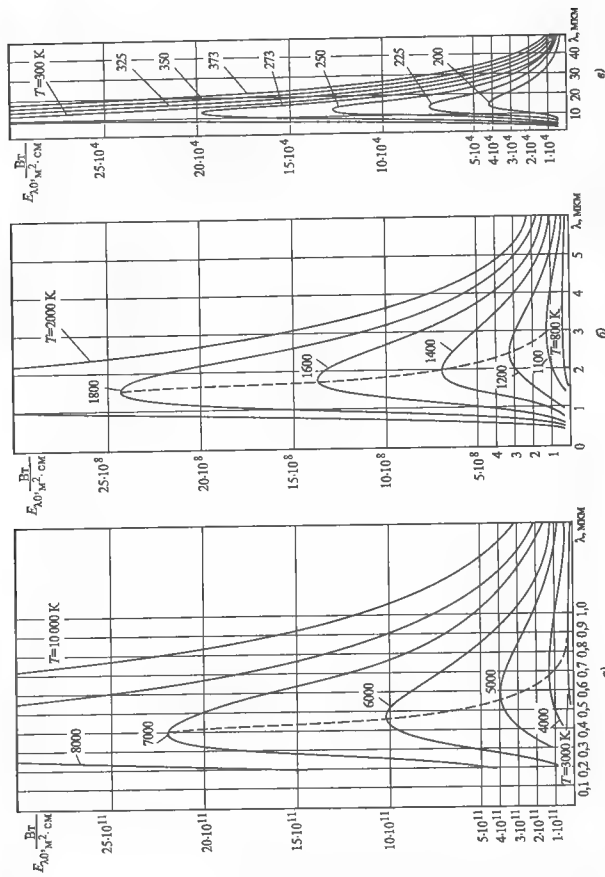


Рис. 16.4. Распределение энергии в спектре излучения абсолютно черного тела в различных интервалах изменения температуры
 а — $T = 3000 \dots 1000$ К; б — $T = 800 \dots 2000$ К; в — $T = 200 \dots 300$ К

Закон Рэлея—Джинса. Если $h\nu \ll kT$ (энергия кванта очень мала по сравнению с энергией теплового движения kT), то с учетом того, что при этом

$$e^{h\nu/(kT)} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

формула Планка переходит в формулу Рэлея—Джинса:

$$E_{\nu 0} = \frac{2\pi\nu^2}{c_0} kT,$$

которая была выведена с использованием методов классической физики. Закон Рэлея—Джинса можно записать в другом виде:

$$E_{\lambda 0} = \frac{c_1}{c_2} \frac{T^5}{(\lambda T)^4} = \frac{c_1}{c_2} \frac{T}{\lambda^4},$$

где $c_1 = 2\pi h c_0^2 = 3,74183 \cdot 10^{-16}$ Вт $\cdot$ м²; $c_2 = hc_0/k = 1,43879 \cdot 10^{-2}$ м $\cdot$ К.

При $\lambda = \text{const}$ значение $E_{\lambda 0}$ линейно возрастает с увеличением T .

Закон излучения Вина. Если $h\nu \gg kT$ (или $hc_0 \gg kT\lambda$), то $e^{c_2/(\lambda T)} \gg 1$ и в знаменателе (16.13а) можно отбросить единицу. Умножая и деля правую часть (16.13а) на T^5 , получаем закон излучения Вина:

$$E_{\lambda 0} = \frac{c_1 T^5}{(\lambda T)^5} e^{-c_2/(\lambda T)}. \quad (16.14)$$

При $\lambda T < 3000$ мкм $\cdot$ К значения $E_{\lambda 0}$, вычисленные по (16.13а) и (16.14), отличаются друг от друга не более чем на 1 %.

Закон смещения Вина. Чтобы установить зависимость от температуры длины волны λ_{max} , при которой функция $E_{\lambda 0}(\lambda, T)$ достигает максимального значения, найдем производную от $E_{\lambda 0}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial E_{\lambda 0}}{\partial \lambda} = \frac{2\pi c_0^2 h}{\lambda^6} \left(\frac{\frac{hc_0}{kT\lambda} e^{\frac{hc_0}{kT\lambda}}}{e^{\frac{hc_0}{kT\lambda}} - 1} - 5 \right) = 0.$$

Если обозначить

$$x = \frac{hc_0}{kT\lambda_{\text{max}}}, \quad (16.15)$$

то в результате получим уравнение

$$xe^x - 5(e^x - 1) = 0. \quad (16.16)$$

Решая это трансцендентное уравнение, получаем $x = 4,965$. Подставим найденное значение x в (16.15). После вычислений получим

$$\lambda_{\max} T = 2898 \text{ мкм} \cdot \text{К}. \quad (16.17)$$

Формула (16.17) носит название закона смещения Вина (значение величины $\lambda_{\max}$ смещается в сторону более коротких длин волн с ростом T).

Закон Стефана—Больцмана. Австрийский физик Й. Стефан в 1879 г. экспериментально и Л. Больцман в 1884 г. теоретически¹ установили закон, которому подчиняется интегральное излучение абсолютно черного тела:

$$E_0(T) = \sigma_0 T^4. \quad (16.18)$$

Этот закон можно вывести из формулы Планка (16.13). Обозначим $x = hv/(kT)$.

Тогда

$$dx = \frac{h}{kT} dv; \quad dv = \frac{kT}{h} dx.$$

Используя (16.6) и (16.13), получаем

$$E_0 = \left(\frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right) T^4.$$

Из таблиц интегралов

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Тогда

$$\sigma_0 = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}.$$

С учетом значений всех констант получим $\sigma_0 = 5,668 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

16.5. Поглощательная и отражательная способности тел. Степень черноты

Поглощательная способность A — это отношение потока излучения, поглощенного телом, к потоку излучения, падающему на него, т.е.

$$A = E_{\text{погл}} / E_{\text{пад}}.$$

¹ Л. Больцман рассматривал цикл Карно, который совершается тепловым двигателем, приводимым в движение за счет давления излучения.

Отражательная способность R — отношение потока излучения, отраженного поверхностью тела, к потоку излучения, падающему на эту поверхность, т.е.

$$R = E_{\text{отр}} / E_{\text{пад}}.$$

Пропускательная способность D — отношение потока излучения, пропущенного телом, к потоку излучения, падающему на поверхность этого тела, т.е.

$$D = E_{\text{проп}} / E_{\text{пад}}$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$A + R + D = 1. \quad (16.19)$$

Поглощательная, отражательная и пропускательная способности тел, относящиеся к монохроматическому излучению, т.е. к излучению, соответствующему узкому интервалу длин волн, называются спектральными и обозначаются A_λ , R_λ , D_λ . Таким образом, имеем

$$A_\lambda = E_{\lambda \text{ погл}} / E_{\lambda \text{ пад}}; \quad R_\lambda = E_{\lambda \text{ отр}} / E_{\lambda \text{ пад}}; \quad D_\lambda = E_{\lambda \text{ проп}} / E_{\lambda \text{ пад}}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$A_\lambda + R_\lambda + D_\lambda = 1. \quad (16.20)$$

Рассмотрим частные случаи (16.19) и (16.20)

Пусть $D_\lambda = 1$ и $D = 1$. Это значит, что тело (среда) полностью пропускает тепловое излучение. Среда, для которой $D_\lambda = 1$ для всех длин волн, называется прозрачной.

Пусть $D_\lambda = 0$ и $D = 0$. Тогда $A_\lambda + R_\lambda = 1$ и $A + R = 1$. Этот случай характерен для металлов и многих диэлектриков. Для абсолютно черного тела $A_\lambda = 1$ и $A = 1$.

Сделаем замечание, касающееся понятия поглощательной способности. Спектральная поглощательная способность является действительной характеристикой поверхности тела (в том смысле, что она не зависит от падающего излучения), в то время как интегральная поглощательная способность зависит от спектрального состава падающего на поверхность излучения, так как

$$A = \frac{\int_0^\infty E_{\lambda \text{ погл}} d\lambda}{\int_0^\infty E_{\lambda \text{ пад}} d\lambda} = \frac{\int_0^\infty A_\lambda E_{\lambda \text{ пад}} d\lambda}{\int_0^\infty E_{\lambda \text{ пад}} d\lambda}. \quad (16.21)$$

Поэтому величина A является неопределенной характеристикой до тех пор, пока не сказано, какое тело является источником падающего излучения.

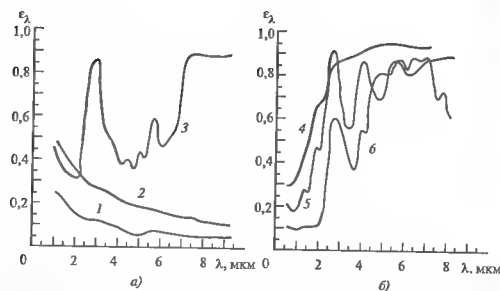


Рис. 16.5. Зависимость ϵ_λ от длины волны для различных материалов
а — алюминий (1 — полированный, 2 — промышленный, 3 — анодированный); б — диэлектрики (4 — белая эмаль, 5 — гипс, 6 — шпат)

В случае равновесного теплового излучения падающим является излучение абсолютно черного тела, температура которого равна температуре данного тела.

Если спектральная поглощательная способность тела не зависит от длины волны падающего излучения, то из (16.21) следует, что $A_\lambda = A$. Такое тело называется *серым*. Серое тело при данной температуре имеет непрерывное распределение энергии в спектре собственного излучения, подобное распределению энергии в спектре абсолютно черного тела при той же температуре. Вообще говоря, реальные тела не являются серыми (рис. 16.5), поэтому серое тело — это теоретическая модель, которая вводится для облегчения расчета теплообмена излучением между телами.

Степень черноты. Отношение плотности потока собственного излучения данного тела $E_{\text{соб}}$ к плотности потока излучения абсолютно черного тела E_0 называется *степенью черноты*:

$$\epsilon = E_{\text{соб}} / E_0.$$

Аналогично вводится понятие спектральной степени черноты ϵ_λ .

Из закона Кирхгофа следует, что

$$\epsilon_\lambda = A_\lambda = E_{\lambda \text{соб}} / E_{\lambda 0}. \quad (16.22)$$

Следовательно, в условиях равновесного теплового излучения (излучения в изотермической системе тел) степень черноты и поглощательная способность равны друг другу. На основании гипотезы о локальном термодинамическом равновесии (16.22) распространяется и на неизолированную излучающую систему.

Для интегрального излучения равенство $\epsilon = A$ выполняется только для равновесного теплового излучения, так как

$$\epsilon = \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda E_{\lambda 0} d\lambda}{\int_0^\infty E_{\lambda 0} d\lambda},$$

и в общем случае $E_{\lambda 0} \neq E_{\lambda \text{пад}}$.

Для серого тела $\epsilon_\lambda = A_\lambda = \text{const}$, поэтому равенство $\epsilon = A$ справедливо и для неравновесного теплового излучения.

Следует отметить, что радиационные свойства поверхностей реальных тел зависят не только от длины волны (рис. 16.5), но от направления излучения. Последнее также влияет на отражательную способность. Опыты показывают, что в зависимости от длины волны падающего излучения поверхность металла может быть близка либо к диффузно, либо к зеркально отражающей поверхности. Увеличение шероховатости приводит к приближенно диффузному отражению при малых длинах волн.

Так как для реальных тел A_λ зависит от λ , то интегральная поглощательная способность A зависит от температуры источника падающего излучения (рис. 16.6).

Значения интегральной степени черноты некоторых металлов приведены в табл. 16.1, а неметаллов — в табл. 16.2.

Из таблиц видно, что для чистых полированных металлических поверхностей значения ϵ малы. Шероховатость, загрязненность, наличие оксидных пленок на поверхности приводят к увеличению ϵ . С повышением температуры значение ϵ для металлов увеличивается. Это объясняется тем, что с ростом T доля энергии излучения, приходящаяся на короткие длины волн, возрастает и

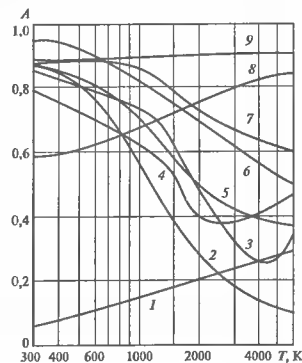


Рис. 16.6. Интегральная поглощательная способность поверхности при комнатной температуре по отношению к излучению черного или серого тела при температуре T

1 — алюминий; 2 — шпат; 3 — дерево; 4 — пробка; 5 — асбест; 6 — фарфор; 7 — цемент; 8 — графит; 9 — черепица

Таблица 16.1. Значения интегральной степени черноты металлов

Металл, состояние поверхности	Температура, °С	Степень черноты ϵ
Алюминий:		
полированный	200—600	0,04—0,06
технический листовой	100	0,09
сильно окисленный	100—500	0,2—0,33
Железо:		
слиток	40	0,70—0,80
окисленное	40—250	0,57—0,66
Золото чистое, хорошо отполированное	100—600	0,02—0,035
Латунь:		
полированная	40	0,03—0,07
окисленная	40—250	0,46—0,56
Медь:		
полированная	100	0,02
сильно окисленная	40	0,76
Серебро:		
полированное или осажденное	40—550	0,01—0,03
окисленное	40—550	0,02—0,04
Сталь:		
полированная	40—250	0,07—0,10
прокат	40	0,66
окисленная при 600 °С	250	0,79
нержавеющая полированная	40	0,07—0,17
Хром полированный	40—250	0,08—0,27

Таблица 16.2. Значения интегральной степени черноты неметаллов

Материал, состояние поверхности	Температура, °С	Степень черноты ϵ
Асбест:		
лист	40	0,96
асбоцемент	40	0,96
асбокартон	40	0,93—0,95
Бетон грубый	40	0,94
Бумага:		
белая	40	0,95—0,98
цветная	40	0,92—0,94
Вода (слой толщиной 1 мм и более)	40	0,96
Глина огнеупорная	100	0,91
Кирпич:		
красный грубый	40	0,93
огнеупорный шамотный	1000	0,59—0,75
магнезитовый	1000	0,38

увеличивается ϵ_λ с уменьшением λ . Кроме того, для металлов ϵ_λ возрастает при повышении T .

Для диэлектриков характерны высокие значения ϵ в инфракрасной области спектра.

16.6. Задачи с решениями

Задача 1. Найдите плотность потока солнечного излучения $E_{\text{с}}$ вблизи Земли за пределами атмосферы. Известно, что излучение поверхности Солнца близко к излучению абсолютно черного тела при $T = 6000$ К, расстояние от Земли до Солнца $l = 149,5 \cdot 10^6$ км, а диаметр Солнца $D = 1,391 \cdot 10^6$ км.

Решение. Поток энергии излучения Солнца

$$Q = \sigma_0 T^4 \pi D^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6000^4 \pi (1,391 \cdot 10^9)^2 = 4,46 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

Так как поток солнечной энергии равномерно распределен по поверхности сферы радиусом l , то искомая величина

$$E_{\text{с}} = \frac{Q}{4\pi l^2} = \frac{4,46 \cdot 10^{26}}{4\pi (1,495 \cdot 10^{11})^2} = 1,59 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ. $E_{\text{с}} = 1,59 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

Задача 2. Найдите температуру серого излучающего тела, если $\lambda_{\text{max}} = 1,6$ мкм.

Решение. Для серого тела спектр излучения подобен спектру излучения абсолютно черного тела, поэтому справедлив закон смещения Вина.

Тогда

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2898}{1,6} = 1811 \text{ К.}$$

Ответ. $T = 1811 \text{ К.}$

Задача 3. Чему равна степень черноты серого тела и значение $E_{\text{соеб}}$ при температуре $T = 800$ К, если $E_{\text{пад}} = 60 \text{ кВт/м}^2$, $E_{\text{погл}} = 48 \text{ кВт/м}^2$?

Решение. Поглощательная способность данного тела

$$A = \frac{48}{60} = 0,8.$$

Степень черноты $\epsilon = A$, а

$$E_{\text{соеб}} = \epsilon \sigma_0 T^4 = 0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 800^4 = 1,86 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ. $\epsilon = 0,8$; $E_{\text{соеб}} = 1,86 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$.

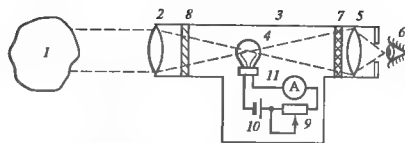


Рис. 16.7. Схема оптического пирометра

1 — объект измерения; 2 — объектив; 3 — корпус прибора; 4 — пирометрическая лампа; 5 — окуляр; 6 — наблюдатель; 7 — красный светофильтр; 8 — поглощающее стекло; 9 — реостат; 10 — источник питания; 11 — измерительный прибор

Задача 4. На рис. 16.7 показана схема пирометра — прибора для измерения высоких температур. Нить лампы пирометра нагревается до такой температуры, при которой ее яркость совпадает с яркостью данного тела. Степень черноты тела при $\lambda = 0,65$ мкм $\epsilon_\lambda = 0,8$. Чему равна температура тела, если по шкале прибора, отградуированной по излучению абсолютно черного источника, $T = 1900$ К?

Решение. В нашем случае $\lambda T = 0,65 \cdot 1900 = 1235$ мкм · К. Так как $\lambda T < 3000$ мкм · К, то можно воспользоваться законом излучения Вина. Яркость излучения данного тела при температуре T' совпадает с яркостью излучения абсолютно черного тела при температуре T , поэтому справедливо равенство

$$\epsilon_\lambda e^{-c_2/(\lambda T')} = e^{-c_2/(\lambda T)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} + \frac{\lambda}{c_2} \ln \epsilon_\lambda = \frac{1}{1900} + \frac{0,65 \cdot 10^{-6}}{1,43879 \cdot 10^{-2}} \ln 0,8 = 6,203 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1},$$

а $T' = 1612$ К.

Ответ. Температура тела равна 1612 К.

Задача 5. В пустыне на подложке из теплоизоляционного материала находится слой воды толщиной $\delta = 2$ мм. К моменту наступления темноты температура воды $T_1 = 300$ К. Такая же температура воздуха сохраняется в течение ночи. Проанализируйте изменение температуры воды ночью.

Решение. Можно принять, что степень черноты воды $\epsilon = 0,96$ (см. табл. 16.2). Потери теплоты за счет излучения воды в единицу времени в расчете на единицу площади поверхности в начальный момент времени $q'_{\text{изл}} = \epsilon \sigma_0 T_1^4 = 0,96 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4 = 441 \text{ Вт/м}^2$.

Потери теплоты приведут к уменьшению температуры воды и к возникновению свободной конвекции воздуха около поверхности воды. Коэффици-

циент теплоотдачи при свободной конвекции воздуха около горизонтальной холодной поверхности можно найти по формуле П.М. Брдлика, приведенной в [34]:

$$Nu_x = 0,0826 Ra_x^{1/3}.$$

Полагая температуру поверхности воды $T_c = 273$ К, для воздуха имеем:

$$\lambda = 0,0244 \text{ Вт/(м · К)}; \nu = 13,28 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \beta = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}; Pr = 0,707.$$

При этом $\alpha = 3,17 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Когда температура воды станет равной 273 К, плотность подводимого к ее поверхности теплового потока

$$q''_{\text{конв}} = 3,17 \cdot 27 = 85,6 \text{ Вт/м}^2$$

(в начальный момент времени $q'_{\text{конв}} = 0$), а плотность отводимого потока за счет излучения

$$q''_{\text{изл}} = 0,96 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 273^4 = 302 \text{ Вт/м}^2.$$

Приблизненно считаем, что в среднем за период охлаждения воды от 27 до 0 °С $q_{\text{изл}} = 0,5(441 + 302) = 371,5 \text{ Вт/м}^2$, а $q_{\text{конв}} = 0,5 \cdot 85,6 = 42,8 \text{ Вт/м}^2$. Время охлаждения воды найдем из уравнения теплового баланса, полагая для воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 4,19 \text{ кДж/кг}$:

$$\tau_{\text{охл}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 4190 \cdot 27}{371,5 - 42,8} = 688 \text{ с} = 11,5 \text{ мин.}$$

Следовательно, через 11,5 мин после наступления ночи вода начнет замерзать. Далее находим время замерзания воды (теплота плавления равна $34 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$):

$$\tau_{\text{зам}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 3,4 \cdot 10^5}{302 - 85,6} = 3142 \text{ с} = 0,87 \text{ ч.}$$

Ответ. В течение 11,5 мин вода будет охлаждаться до 0 °С, а через 1,06 ч вода замерзнет.

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ТЕЛАМИ,
РАЗДЕЛЕННЫМИ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДОЙ17.1. Два метода изучения процессов теплообмена излучением.
Классификация потоков излучения

Теплообмен излучением (иногда используется термин «лучистый теплообмен») включает в себя несколько одновременно протекающих процессов. Первый процесс — испускание излучения. Возникновение излучения происходит за счет превращения внутренней энергии тела в энергию электромагнитных волн или фотонов (энергию излучения). Второй процесс — распространение энергии излучения в пространстве. Третий процесс — поглощение излучения. В этом процессе энергия излучения превращается во внутреннюю энергию тела. Все реальные тела лишь частично поглощают падающую энергию. Часть непоглощенной энергии пропускается через тело и отражается от его поверхности. Далее мы будем считать, что пропускательная способность тел равна нулю. Тогда последним (четвертым) процессом будет отражение излучения. Отраженная энергия распространяется в окружающее пространство. Конечным результатом рассмотренных процессов является передача энергии от более нагретых тел к менее нагретым. Расчет количества энергии, передаваемой от одних тел к другим, и составляет предмет теории теплообмена излучением.

Метод многократных отражений. Исторически первым методом исследования теплообмена излучением был метод, предложенный Христиансеном (1883 г.). Позже (1916 г.) этот метод использовал Нуссельт. Обобщение метода многократных отражений на случай произвольной системы частично поглощающих и частично отражающих тел было дано Ю.А. Суриновым (см. § 17.7).

Сущность метода заключается в регистрации последовательных актов поглощений и отражений энергии излучения, испускаемой телом, и в подсчете количества поглощенной (или отраженной) энергии. Результирующий поток излучения находится как разность между поглощенным и собственным потоками излучения данного тела. С помощью указанного метода достаточно просто можно рассчитать значение плотности результирующего потока излучения $E_{\text{рез}}$ лишь в простейших излучающих системах: две параллельные пластины, две концентрические сферы и два коаксиальных цилиндра. В произвольной системе тел непосредственный учет многократ-

ных актов отражений—поглощений сводится к сложной задаче нахождения сумм бесконечных функциональных рядов.

Метод полных потоков излучения. Значительно проще решается задача лучистого теплообмена, если за основу взять полный поток излучения, который складывается из собственного и отраженного потоков излучений. Полный поток, исходящий от поверхности тела, называется *эффективным* потоком излучения. Падающий на данное тело поток излучения представляет собой эффективные потоки излучения, исходящие от других тел, а результирующий — разность между падающим и эффективным потоками излучения тела.

Метод полных потоков для решения задач теплоэнергетики впервые использовал О.Е. Власов (1929 г.). Этот метод лежит в основе современной теории теплообмена излучением между телами, разделенными прозрачной средой. Расчет лучистого теплообмена по этому методу сводится к нахождению решения интегральных уравнений (см. § 17.6).

Классификация потоков излучений. Рассмотрим замкнутую систему серых, диффузно излучающих и диффузно отражающих тел (рис. 17.1). Для произвольной площадки dF_M поверхности излучающей системы можно записать следующие формулы для потоков излучений:

поток собственного излучения

$$E_{\text{соб}} = AE_0; \quad (17.1)$$

поток поглощенного излучения

$$E_{\text{полг}} = AE_{\text{пад}}; \quad (17.2)$$

поток отраженного излучения

$$E_{\text{отр}} = RE_{\text{пад}} = (1 - A)E_{\text{пад}}; \quad (17.3)$$

поток эффективного излучения

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}} = AE_0 + (1 - A)E_{\text{пад}}; \quad (17.4)$$

поток результирующего излучения

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{полг}} - E_{\text{соб}} = A(E_{\text{пад}} - E_0); \quad (17.5)$$

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{пад}} - E_{\text{эф}}; \quad (17.5a)$$

поток падающего излучения (определяется интегралом от интенсивности падающего излучения)

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{пад}}(M) = \int_{\omega=2\pi} I_{\text{пад}}(M, s) \cos \theta_M d\omega. \quad (17.6)$$

Если известны два каких-либо потока излучения, то остальные че-

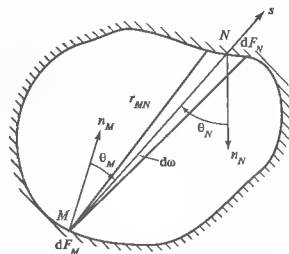


Рис. 17.1. Замкнутая излучающая система тел

тыре находятся элементарно по формулам, приведенным в классификации. Если тела несерые, классификация потоков справедлива для монохроматического излучения.

С использованием (17.5а) выразим $E_{\text{пад}}$:

$$E_{\text{пад}} - E_{\text{рез}} + E_{\text{эф}}$$

и в таком виде подставим в (17.5). В результате получим

$$E_{\text{рез}} = \frac{A}{R}(E_{\text{эф}} - E_0). \quad (17.7)$$

Формулу (17.7) Г.Л. Поляк (1935 г.) положил в основу расчета теплообмена излучением методом «сальдо». Эту формулу часто называют формулой Поляка. Метод «сальдо» (метод результирующих потоков) является разновидностью метода полных потоков.

17.2. Лучистый теплообмен между двумя безграничными пластинами

Серые пластины. Пусть даны две безграничные (расстояние между пластинами много меньше их размеров) изотермические пластины, разделенные прозрачной средой. Температура и поглощательная способность первой составляют T_1 и A_1 , второй — T_2 и A_2 . Требуется найти $E_{\text{рез1}}$ и $E_{\text{рез2}}$.

Рассмотрим решение задачи методом многократных отражений. Ввиду безграничности пластин локальные потоки излучения одинаковы для всех точек отдельно взятой пластины. Будем характеризовать их плотностью потока излучения E . Схема последовательного затухания пучка лучей, входящих из первой пластины, показана на рис. 17.2.

Плотность потока излучения, падающего на первую пластину, состоит из двух частей:

$$E_{\text{пад1}} = E_{\text{пад1-1}} + E_{\text{пад1-2}},$$

где $E_{\text{пад1-1}}$ и $E_{\text{пад1-2}}$ — соответственно плотности потоков излучения от первой пластины на первую и от второй на первую (с учетом многократных отражений от двух пластин).

Схема расчета $E_{\text{пад1-1}}$ показана на рис. 17.2.

На этом рисунке $E_1 = E_{\text{сб1}}$. После первого акта отражения на первую пластину падает энергия излучения, равная $R_2 E_1$; после второго акта отражения — энергия излучения, равная $R_1 R_2^2 E_1$ и т.д.

С каждым последующим актом отражения (вследствие того, что часть энергии поглощает-

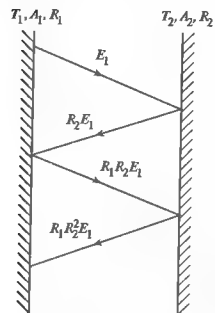


Рис. 17.2. К выводу формулы (17.8)

ся) значение падающего потока уменьшается. Путем суммирования потоков излучения, падающих на первую пластину в процессе всех актов отражений, получаем

$$E_{\text{пад1-1}} = E_{\text{сб1}} R_2 [1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots]; \quad (17.8)$$

$$E_{\text{пад1-2}} = E_{\text{сб2}} [1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots]. \quad (17.8a)$$

Числовые ряды в скобках (17.8) и (17.8a) — бесконечно убывающие геометрические прогрессии.

Обозначим

$$\Phi_{11} = \frac{E_{\text{пад1-1}}}{E_{\text{сб1}}}; \quad \Phi_{12} = \frac{E_{\text{пад1-2}}}{E_{\text{сб2}}}.$$

Тогда, учитывая формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$\Phi_{11} = \frac{R_2}{1 - R_1 R_2}; \quad \Phi_{12} = \frac{1}{1 - R_1 R_2}.$$

Далее находим $E_{\text{рез1}}$ по формуле (17.5):

$$E_{\text{рез1}} = A_1 (E_{\text{сб1}} \Phi_{11} + E_{\text{сб2}} \Phi_{12}) - A_1 E_{01} = \frac{A_1 A_2 (E_{02} - E_{01})}{1 - R_1 R_2}.$$

Учтем, что $R_1 = 1 - A_1$ и $R_2 = 1 - A_2$. Тогда получим

$$E_{\text{рез1}} = \frac{E_{02} - E_{01}}{1/A_1 + 1/A_2 - 1} = \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_1^4)}{1/A_1 + 1/A_2 - 1}. \quad (17.9)$$

Формула (17.9) называется первой формулой Християнсена—Нуссельта. Заметим, что, согласно закону сохранения энергии,

$$E_{\text{рез1}} = -E_{\text{рез2}}.$$

Формулу (17.9) можно вывести и методом «сальдо». Из (17.7) вытекает, что

$$E_{\text{эф1}} = \frac{R_1}{A_1} E_{\text{рез1}} + E_{01}; \quad (17.10)$$

$$E_{\text{эф2}} = \frac{R_2}{A_2} E_{\text{рез2}} + E_{02}. \quad (17.10a)$$

Результирующий поток излучения

$$E_{\text{рез1}} = E_{\text{эф2}} - E_{\text{эф1}} = -\frac{R_2}{A_2} E_{\text{рез1}} + E_{02} - \frac{R_1}{A_1} E_{\text{рез1}} - E_{01}.$$

Решая последнее уравнение относительно $E_{\text{рез1}}$ и учитывая, что $R = 1 - A$, получаем

$$E_{\text{рез1}} = \frac{E_{02} - E_{01}}{1/A_1 + 1/A_2 - 1}.$$

Несерые пластины. Для несерых пластин в (17.9) следует заменить интегральные характеристики на монокроматические. Тогда

$$E_{\lambda \text{рез1}} = \frac{E_{\lambda 02} - E_{\lambda 01}}{1/A_{\lambda 1} + 1/A_{\lambda 2} - 1}.$$

Интегральный поток результирующего излучения находим путем интегрирования по всем длинам волн от 0 до ∞ :

$$E_{\text{рез1}} = \int_0^\infty \frac{E_{\lambda 02} d\lambda}{1/A_{\lambda 1} + 1/A_{\lambda 2} - 1} - \int_0^\infty \frac{E_{\lambda 01} d\lambda}{1/A_{\lambda 1} + 1/A_{\lambda 2} - 1}, \quad (17.11)$$

где $E_{\lambda 01}$ и $E_{\lambda 02}$ определяются по (16.13а) соответственно при T_1 и T_2 .

Две пластины с экранами между ними. Рассмотрим сначала случай, когда между двумя данными пластинами находится еще одна пластина толщиной δ с теплопроводностью λ . Если в последней пластине нет внутренних источников или стоков теплоты, тогда в установившемся состоянии теплота, полученная излучением от первой пластины, будет передаваться теплопроводностью от одной поверхности к другой, а затем излучением ко второй пластине. Согласно закону сохранения энергии $E_{31} - E_{32} = q$, где E_{31} и E_{32} — результирующие потоки излучения для одной и другой поверхностей экрана; q — тепловой поток в пластине; причем

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{31} - T_{32}).$$

Здесь T_{31} и T_{32} — температуры поверхностей, обращенных к первой и второй пластинам. Если термическим сопротивлением можно пренебречь, то $T_{31} - T_{32} = T_3$. Тогда можно записать следующие два уравнения для $E_{\text{рез1}}$:

$$E_{\text{рез1}} = \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_3^4)}{1/A_1 + 1/A_{31} - 1};$$

$$E_{\text{рез2}} = \frac{\sigma_0 (T_3^4 - T_2^4)}{1/A_{32} + 1/A_2 - 1}.$$

Примем, что поглощательная способность двух сторон пластины одинакова: $A_{31} = A_{32} = A_3$. Тогда преобразовывая написанные уравнения так, что-

бы в правой части остались только температуры, а затем складывая их, приходим к формуле

$$E_{\text{рез1}} = \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_1^4)}{1/A_1 + 1/A_2 - 1 + (2/A_3 - 1)}.$$

Если между пластинами расположено n одинаковых экранов, то таким же образом можно вывести формулу

$$E_{\text{рез1}} = \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_1^4)}{1/A_1 + 1/A_2 - 1 + (2/A_3 - 1)n}. \quad (17.12)$$

Роль экранов сводится к уменьшению значения результирующего потока излучения. Уменьшение будет тем больше, чем меньше поглощательная способность экранов (больше их отражательная способность).

17.3. Лучистый теплообмен в системе, состоящей из двух концентрических сфер или двух коаксиальных цилиндров

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 17.3. Требуется найти $Q_{\text{рез1}}$ и $Q_{\text{рез2}}$.

Сначала рассмотрим случай, когда поверхности данных тел серые, а затем — несерые.

Серые тела. Выведем формулу для $Q_{\text{рез1}}$ методом «сальдо». Предварительно заметим, что $Q_{\text{рез2}} = -Q_{\text{рез1}}$.

Формулы (17.10) и (17.10а) с заменой плотности потока излучения E на поток излучения Q запишем применительно к первому и второму телам:

$$Q_{\text{эф1}} = \frac{R_1}{A_1} Q_{\text{рез1}} + E_{01} F_1; \quad (17.13)$$

$$Q_{\text{эф2}} = \frac{R_2}{A_2} Q_{\text{рез2}} + E_{02} F_2. \quad (17.13а)$$

В нашем случае падающий на первое тело поток излучения (в отличие от двух пластин) представляет только часть потока эффективного излучения второго тела, так что

$$Q_{\text{пад1}} = \varphi_{21} Q_{\text{эф2}},$$

где величина φ_{21} учитывает ту долю излучения второго тела, которая попадает на первое.

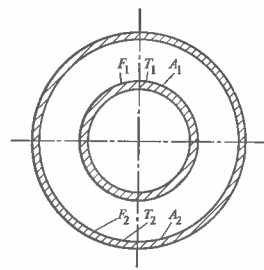


Рис. 17.3. Излучающая система, составленная из двух концентрических сфер или двух коаксиальных цилиндров

Тогда

$$Q_{\text{рез1}} = Q_{\text{пад1}} - Q_{\text{эф1}} = \Phi_{21} Q_{\text{эф2}} - Q_{\text{эф1}}.$$

Умножим (17.13а) на Φ_{21} и затем из полученного выражения вычтем (17.13). После простейших преобразований получим

$$Q_{\text{рез1}} = \frac{\Phi_{21} E_{02} F_2 - E_{01} F_1}{\frac{R_1}{A_1} + \Phi_{21} \frac{R_2}{A_2} - 1}. \quad (17.14)$$

Уравнение (17.14) применим для случая, когда $T_1 = T_2$ (равновесное тепловое излучение). При этом $Q_{\text{рез1}} = 0$, откуда следует $\Phi_{21} F_2 = F_1$.

Окончательно получаем

$$Q_{\text{рез1}} = \frac{(E_{02} - E_{01}) F_1}{\frac{1}{A_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}. \quad (17.15)$$

Формула (17.15) называется второй формулой Христиансена—Нуссельта. В частном случае $F_1 = F_2$ (17.15) переходит в (17.9).

Если $F_1 \ll F_2$, то

$$Q_{\text{рез1}} = A_1 (E_{02} - E_{01}) F_1 = A_1 \sigma_0 (T_2^4 - T_1^4) F_1. \quad (17.16)$$

Несерые тела. Как и в случае двух пластин, формула (17.15) будет справедлива для монохроматических характеристик. Для интегрального излучения она записывается аналогично (17.11).

Проанализируем случай, когда $F_1 \ll F_2$. Запишем

$$Q_{\lambda \text{рез1}} = A_{\lambda 1} (E_{\lambda 02} - E_{\lambda 01}) F_1.$$

Умножив последнее уравнение на $d\lambda$ и проинтегрировав по λ от 0 до ∞ , получим

$$Q_{\text{рез1}} = \sigma_0 (A_{12} T_2^4 - \epsilon_1 T_1^4) F_1, \quad (17.17)$$

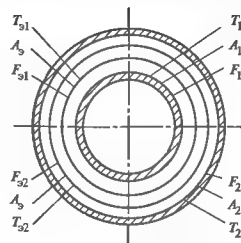
где ϵ_1 — степень черноты первого (внутреннего) тела;

$$\epsilon_1 = \frac{\int_0^\infty \epsilon_{\lambda 1} E_{\lambda 01} d\lambda}{E_{01}};$$

A_{12} — поглощательная способность первого тела по отношению к падающему излучению от абсолютно черного тела, имеющего температуру T_2 ;

$$A_{12} = \frac{\int_0^\infty \lambda_{\lambda 1} E_{\lambda 02} d\lambda}{E_{02}}.$$

рис. 17.4. Излучающая система с двумя экранами между сферами или цилиндрами



Теплообмен излучением при наличии экранов. Рассматриваемая излучающая система показана на рис. 17.4. Таким же образом, как и в § 17.2, можно вывести следующую формулу для n экранов с одинаковыми поглощательными способностями A_3 :

$$Q_{\text{рез1}} = \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_1^4) F_1}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \frac{F_1}{F_2} + \left(\frac{2}{A_3} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{F_1}{F_{3i}}}. \quad (17.18)$$

17.4. Угловые коэффициенты излучения

В случае теплообмена излучением между двумя безграничными пластинами (см. § 17.2) поток собственного или отраженного излучения от одной пластины целиком попадает на вторую. Однако, если излучающая система состоит из нескольких тел, произвольно расположенных в пространстве, то только часть потока излучения от одного тела попадает на другое. Доля потока излучения от одного тела, попадающая на другое, зависит от формы и размеров этих тел, их взаимного расположения и расстояния между ними, т.е. от геометрических особенностей системы. Для учета той части потока излучения от поверхности одного тела (или элементарной площадки), которая попадает на поверхность другого тела, используют понятие — *угловой коэффициент излучения*. Когда рассматривают поток излучения от элементарной площадки, находящейся на поверхности одного тела, на всю поверхность другого тела, угловой коэффициент излучения называется *локальным*, а когда — от всей поверхности одного тела на всю поверхность другого, угловой коэффициент излучения называется *средним*.

Угловые коэффициенты излучения характеризуют только геометрические особенности излучающей системы, т.е. ими учитывается только «прямое» попадание энергии излучения от одного тела на другое, а попадание посредством отражения от других тел никак не учитывается. Поэтому далее при выводе выражений для угловых коэффициентов излучения для простоты будем полагать, что тела, которые участвуют в теплообмене излучением, являются абсолютно черными.

Локальный угловой коэффициент излучения. В излучающей системе произвольно выберем два тела с площадями поверхностей F_i и F_k

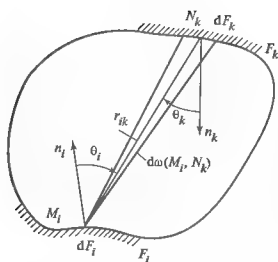


Рис. 17.5. К определению угловых коэффициентов излучения

где $\varphi(M_i, F_k)$ — локальный угловой коэффициент излучения, который зависит от места расположения точки M_i на поверхности F_i , а также от формы, размеров F_k и расположения этой поверхности в пространстве.

Величина $dQ(M_i)$ в (17.19) в общем случае, когда температура изменяется по поверхности F_i , является функцией точки M_i . При этом

$$dQ(M_i) = E_0(M_i) dF_i.$$

Числитель в (17.19) запишем в виде

$$dQ(M_i, F_k) = \int_{\omega(M_i, F_k)} d^2Q(M_i, N_k),$$

где интеграл берется по телесному углу $\omega(M_i, F_k)$, в пределах которого поверхность F_k видна из точки M_i . На основании определения интенсивности излучения будем иметь

$$d^2Q(M_i, N_k) = I_0(M_i) \cos \theta_i d\omega(M_i, N_k) dF_i.$$

Учтем, что по определению телесного угла

$$d\omega(M_i, N_k) = \frac{dF_k \cos \theta_k}{r_{ik}^2},$$

а по закону Ламберта

$$I_0(M_i) = \frac{E_0(M_i)}{\pi}.$$

С учетом приведенных формул после преобразований получим выражение для локального углового коэффициента излучения в виде

(рис. 17.5). Пусть M_i — произвольная точка на первой поверхности; dF_i — элементарная площадка, внутри которой находится эта точка; N_k и dF_k — точка и элементарная площадка, соответствующие второй поверхности.

Локальным угловым коэффициентом излучения называется отношение потока излучения от dF_i на F_k к потоку собственного полусферического излучения, выходящего с dF_i . По определению можно записать

$$\varphi(M_i, F_k) = \frac{dQ(M_i, F_k)}{dQ(M_i)}, \quad (17.19)$$

$$\varphi(M_i, F_k) = \int_{F_k} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_k}{\pi r_{ik}^2} dF_k. \quad (17.20)$$

Под знаком интеграла в (17.20) стоит функция двух точек (геометрическая функция), которую обозначим

$$K(M_i, N_k) = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_k}{\pi r_{ik}^2}. \quad (17.21)$$

Эта функция является симметричной, так как, если поменять местами точки M_i и N_k , значение ее не изменится. Следовательно,

$$K(M_i, N_k) = K(N_k, M_i).$$

Таким образом, локальный угловой коэффициент излучения $\varphi(M_i, F_k)$ представляет собой интеграл по поверхности от геометрической функции двух точек $K(M_i, N_k)$, т.е.

$$\varphi(M_i, F_k) = \int_{F_k} K(M_i, N_k) dF_k. \quad (17.22)$$

Средний угловой коэффициент излучения. Аналитическое выражение для средних коэффициентов излучения можно вывести только при допущении, что поверхности тел излучающей системы являются изотермическими.

Средний угловой коэффициент излучения (обозначается φ_{ik}) есть отношение потока излучения от поверхности F_i на поверхность F_k к полному потоку собственного полусферического излучения, выходящему с F_i , т.е.

$$\varphi_{ik} = \frac{Q_{ik}}{Q_i}. \quad (17.23)$$

Запишем Q_{ik} и Q_i в следующем виде:

$$Q_{ik} = \int_{F_i} dQ(M_i, F_k) = E_{0i} \int_{F_i} \varphi(M_i, F_k) dF_i;$$

$$Q_i = E_0 F_i$$

Тогда окончательно получим

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \varphi(M_i, F_k) dF_i = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_k} K(M_i, N_k) dF_k dF_i. \quad (17.24)$$

Свойства угловых коэффициентов излучения. Свойство взаимности состоит в том, что для любой произвольно взятой пары тел с поверхностями F_i и F_k имеет место равенство

$$\varphi_{ik} F_i = \varphi_{ki} F_k. \quad (17.25)$$

Это свойство вытекает из (17.24). Можно записать, что

$$\varphi_{ik} F_i = \int_{F_i F_k} K(M_i, N_k) dF_i,$$

$$\varphi_{ki} F_k = \int_{F_k F_i} K(N_k, M_i) dF_k.$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, равны и левые.

Свойство замкнутости можно записать как для средних, так и для локальных угловых коэффициентов излучения. Формулируется оно следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{ik} = 1; \quad (17.26)$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi(M_i, F_k) = 1, \quad (17.26a)$$

где n — число тел, образующих замкнутую систему.

Чтобы убедиться, что, например, равенство (17.26) действительно имеет место, запишем

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{ik} = \sum_{k=1}^n \frac{Q_{ik}}{Q_i} = \frac{\sum_{k=1}^n Q_{ik}}{Q_i} = 1.$$

Методы определения угловых коэффициентов излучения. Угловые коэффициенты излучения можно найти, используя (17.20) и (17.24). При этом задача сводится к вычислению интегралов. Этот метод называется методом непосредственного интегрирования. Для иллюстрации этого метода рассмотрим следующий пример. Пусть имеются элементарная площадка dF_1 на поверхности некоторого тела и круг с площадью поверхности F_2 (рис. 17.6). Направление центральной нормали к кругу совпадает с направлением нормали к dF_1 . Радиус круга равен r_0 , а расстояние между dF_1 и F_2 — h .

Локальный угловой коэффициент излучения

$$\varphi(M_1, F_2) = \int_{F_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dF_2,$$

$$\text{где } dF_2 = R dR d\varphi = r \sin \theta_1 \frac{dr}{\sin \theta_1} d\varphi = r dr d\varphi.$$

Далее учтем, что $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = h/r$.

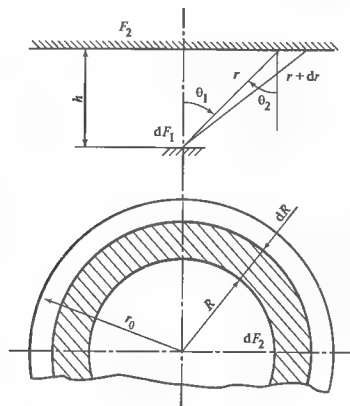


Рис. 17.6. К выводу формулы (17.27)

Тогда

$$\varphi(M_1, F_2) = h^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{r=h}^{\sqrt{r_0^2+h^2}} \frac{dr}{r^3} = \frac{r_0^2}{h^2 + r_0^2}. \quad (17.27)$$

В частном случае $r_0 \rightarrow \infty$ (F_2 — площадь безграничной плоской пластины) $\varphi(M_1, F_2) = 1$.

Для поверхностей, бесконечно протяженных в одном направлении (в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа (рис. 17.7)), локальный угловой коэффициент излучения $\varphi(M_1, F_2)$ рассчитывается по формуле

$$\varphi(M_1, F_2) = \frac{1}{2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2).$$

Средний угловой коэффициент излучения в этом случае можно легко определить по методу натянутых нитей. Применительно к схеме, приведенной на рис. 17.7, б, следует рассмотреть пересекающиеся нити с длинами AC и BD , а также непересекающиеся нити с длинами AD и BC .

Тогда

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2AB} [(AC + BD) - (AD + BC)], \quad (17.28)$$

где AB — длина стороны, соответствующей поверхности F_1 .

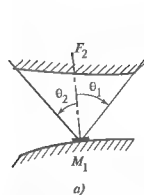


Рис. 17.7. К определению локального (а) и среднего (б) угловых коэффициентов излучения для двух поверхностей большой протяженности в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа

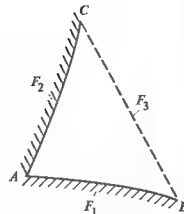
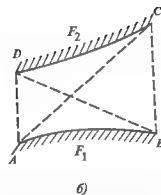


Рис. 17.8. К определению углового коэффициента излучения по формуле (17.28а)

Если длина одной из непересекающихся нитей (например, AD) равна нулю (рис. 17.8), то вместо (17.28) будем иметь

$$\Phi_{12} = \frac{F_1 + F_2 - F_3}{2F_1}. \quad (17.28a)$$

Аналогичные выражения получаются для Φ_{13} , Φ_{23} и т.д.

Следует отметить, что в настоящее время имеется большая база данных по угловым коэффициентам излучения [4, 9, 42].

Приведем некоторые формулы для таких излучающих систем, которые часто встречаются на практике.

1. Два параллельных круга с одинаковыми радиусами r , с центрами на одной общей нормали к их плоскостям и расстоянием h между ними:

$$\Phi_{12} = \frac{1}{2} \left(Z - \sqrt{Z^2 - 4} \right), \quad (17.29)$$

где $Z = 1 + (1 + X^2)Y^2$; здесь $X = r/h$; $Y = h/r$.

2. Два квадрата со стороной a , расположенные в параллельных плоскостях друг против друга на расстоянии h :

$$\Phi_{12} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\sqrt{a^2 + h^2} \arctg \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} - 2\frac{h}{a} \arctg \frac{a}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \ln \frac{(a^2 + h^2)^2}{h^2(2a^2 + h^2)} \right]. \quad (17.30)$$

3. Неограниченная плоскость (тело 1) и однородный пучок труб (тело 2), параллельный плоскости:

$$\Phi_{12} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{s} \right)^2} + \frac{d}{s} \sqrt{\left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1}; \quad (17.31)$$

$$\Phi_{21} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{s}{d} - \sqrt{\left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1} + \arctg \sqrt{\left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1} \right], \quad (17.31a)$$

где d — диаметр труб; s — шаг между ними (расстояние между осями).

17.5. Расчет теплообмена излучением в произвольной системе тел. Зональный метод

Рассмотрим два случая:

а) все тела, образующие произвольную замкнутую систему, абсолютно черные;

б) тела произвольной замкнутой системы серые, диффузно излучающие и диффузно отражающие.

Система абсолютно черных тел. Пусть дана замкнутая система из абсолютно черных тел с площадями изотермических поверхностей $F_1, F_2, \dots, F_n$ (рис. 17.9). Требуется найти $Q_{\text{рез}i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Так как тела абсолютно черные, то поглощенное каждым телом излучение равно падающему. Поток излучения, падающий от k -го тела на i -е, равен $Q_{0k}\Phi_{ki}$. Следовательно,

$$Q_{\text{полг}i} = Q_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n Q_{0k}\Phi_{ki}.$$

Поток результирующего излучения

$$Q_{\text{рез}i} = Q_{\text{полг}i} - Q_{\text{соб}i} = \sum_{k=1}^n Q_{0k}\Phi_{ki} - Q_{0i}. \quad (17.32)$$

С учетом того, что $\sum_{i=1}^n \Phi_{ki} = 1$, уравнению (17.32) можно придать вид

$$Q_{\text{рез}i} = \sum_{k=1}^n (Q_{0k} - Q_{0i})\Phi_{ki}.$$

Таким образом, для нахождения $Q_{\text{рез}i}$ надо знать средние угловые коэффициенты излучения данной излучающей системы.

Если значения Φ_{ki} найдены, то значения $Q_{\text{рез}i}$ при заданных температурах тел определяются по следующей формуле:

$$Q_{\text{рез}i} = \sigma_0 \sum_{k=1}^n T_k^4 F_k \Phi_{ki} - \sigma_0 T_i^4 F_i.$$

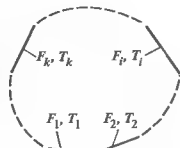


Рис. 17.9. К расчету теплообмена излучением в произвольной системе тел

Система серых, диффузно излучающих и диффузно отражающих тел. В этом случае поток излучения, падающий от k -го тела на i -е, представляет собой часть потока эффективного излучения k -го тела. Запишем выражение для $Q_{\text{пад}i}$ в виде

$$Q_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n Q_{\text{эф}k} \Phi_{ki}. \quad (17.33)$$

Как мы увидим дальше, выражение (17.33) является точным лишь при определенном условии, в общем же случае оно приближенное.

С учетом (17.4) и (17.33) получим следующую систему n линейных алгебраических уравнений для $Q_{\text{эф}i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$Q_{\text{эф}i} - R_i \sum_{k=1}^n Q_{\text{эф}k} \Phi_{ki} = Q_{\text{соб}i}, \quad (17.34)$$

где R_i — отражательная способность i -го тела, постоянная для всех точек поверхности.

Систему уравнений вида (17.34) можно записать и для $E_{\text{эф}i}$, если каждый член i -го уравнения разделить на F_i и учесть, что $\Phi_{ki} F_k = \Phi_{ik} F_i$. При этом будем иметь

$$E_{\text{эф}i} - R_i \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \Phi_{ik} = E_{\text{соб}i}. \quad (17.34a)$$

Поток результирующего излучения $Q_{\text{рез}i}$ или плотность потока $E_{\text{рез}i}$ находятся по формулам Поляка:

$$Q_{\text{рез}i} = \frac{A_i}{R_i} (Q_{\text{эф}i} - Q_{0i}); \quad (17.35)$$

$$E_{\text{рез}i} = \frac{A_i}{R_i} (E_{\text{эф}i} - E_{0i}), \quad (17.35a)$$

где $Q_{\text{эф}i}$ и $E_{\text{эф}i}$ считаются теперь известными величинами, найденными в результате решения системы (17.34) или (17.34a).

Если $Q_{\text{эф}i}$ и $E_{\text{эф}i}$ выразим из (17.35) и (17.35a) и подставим в (17.34) или (17.34a), то получим систему уравнений для определения $Q_{\text{рез}i}$ или $E_{\text{рез}i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\frac{1}{A_i} Q_{\text{рез}i} - \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{A_k} Q_{\text{рез}k} \Phi_{ki} = \sum_{k=1}^n Q_{0k} \Phi_{ki} - Q_{0i}; \quad (17.36)$$

$$\frac{1}{A_i} E_{\text{рез}i} - \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{A_k} E_{\text{рез}k} \Phi_{ik} = \sum_{k=1}^n E_{0k} \Phi_{ik} - E_{0i}. \quad (17.36a)$$

Выше рассматривался случай, когда для каждого тела была известна температура его поверхности. Но задача может быть поставлена так, что температура считается заданной величиной лишь для некоторых тел, а для других известной величиной является поток результирующего излучения. Такая постановка задачи называется *смешанной*. Обобщим системы (17.34) и (17.34a) на случай смешанной постановки задачи.

Запишем два выражения: первое по определению эффективного излучения, а второе по определению результирующего излучения:

$$Q_{\text{эф}i} - R_i Q_{\text{пад}i} = Q_{\text{соб}i}; \quad (17.37)$$

$$Q_{\text{эф}i} - Q_{\text{пад}i} = -Q_{\text{рез}i}. \quad (17.37a)$$

Введем обобщенные характеристики R_i^* и Q_i^* :

$$R_i^* = \begin{cases} R_i & \text{для тел с заданной температурой } T_i; \\ 1 & \text{для тел с заданным потоком } Q_{\text{рез}i}; \end{cases}$$

$$Q_i^* = \begin{cases} Q_{\text{соб}i} & \text{для тел с заданной температурой } T_i; \\ -Q_{\text{рез}i} & \text{для тел с заданным потоком } Q_{\text{рез}i}. \end{cases}$$

Тогда вместо (17.37) и (17.37a) можно рассматривать одно обобщенное уравнение

$$Q_{\text{эф}i} - R_i^* Q_{\text{пад}i} = Q_i^*. \quad (17.38)$$

Подставив в (17.38) (17.33), получим систему уравнений для нахождения $Q_{\text{эф}i}$, обобщенную на случай смешанной постановки задачи:

$$Q_{\text{эф}i} - R_i^* \sum_{k=1}^n Q_{\text{эф}k} \Phi_{ki} = Q_i^*. \quad (17.39)$$

Аналогично можно получить систему

$$E_{\text{эф}i} - R_i^* \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \Phi_{ik} = E_i^*. \quad (17.40)$$

Рассмотрим теперь вопрос о степени точности выражения (17.33), положенного в основу расчета теплообмена излучением в данной системе тел. На основании понятия локального углового коэффициента излучения (см. (17.19)) запишем элементарный поток излучения от dF_k на поверхность F_i в виде

$$dQ(N_k, F_i) = E_{\text{эф}}(N_k) \Phi(N_k, F_i) dF_k.$$

Поток излучения от F_k на F_i

$$Q_{ki} = \int_{F_k} E_{\text{эф}}(N_k) \varphi(N_k, F_i) dF_k. \quad (17.41)$$

Если $\varphi(N_k, F_i)$ не зависит от положения точки на поверхности F_k , т.е.

$$\varphi(N_k, F_i) = \text{const} = \varphi_{ki}$$

то

$$Q_{ki} = \varphi_{ki} \int_{F_k} E_{\text{эф}}(N_k) dF_k,$$

или

$$Q_{ki} = Q_{\text{эф}ki} \varphi_{ki}.$$

Суммируя излучения от всех поверхностей на F_i , получаем (17.33). Таким образом, можно записать условие, при котором выражение (17.33) является точным: локальный угловой коэффициент излучения должен быть равен среднему для любой пары зон ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$). Если это равенство не выполняется, то использование (17.33) для расчета теплообмена излучением обеспечивает лишь приближенное решение задачи. Степень точности зависит от отражательной способности тел. Чем меньше отражательная способность, тем более точным будет решение. Действительно, в частном случае абсолютно черных изотермических тел $E_{\text{эф}}(N_k) = E_{0k} = \text{const}$, тогда из (17.41) вытекает, что

$$Q_{ki} = E_{0k} \int_{F_k} \varphi(N_k, F_i) dF_k = Q_{0k} \varphi_{ki}.$$

Для $Q_{\text{пад}i}$ будем иметь формулу

$$Q_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n Q_{0k} \varphi_{ki},$$

которая совпадает с (17.33) при замене $Q_{\text{эф}k}$ на Q_{0k} .

Метод расчета теплообмена излучением, когда поверхность излучающей системы разбивается на конечное число зон с постоянными оптическими (поглощательной и отражательной способностью) и энергетическими (температурой или плотностью потока результирующего излучения) характеристиками, называется *зональным*. Точность расчета в общем случае будет тем выше, чем больше число зон. В некоторых частных случаях нет необходимости разбивать излучающую систему на большое число зон. Для двух параллельных пластин больших размеров, двух концентрических сфер или двух коаксиальных цилиндров выполняется равенство локальных и средних угловых коэффициентов излучения, поэтому можно считать, что

система состоит из двух зон. Однако, если сферы неконцентричны или цилиндры некоаксиальны, то разбиение на две зоны (например, первая зона — внутренняя сфера, вторая — наружная сфера) может дать лишь приближенные значения результирующих потоков излучения.

17.6. Теоретическое обоснование зонального метода.

Интегральные уравнения теории теплообмена излучением

Интегральные уравнения излучения. Пусть имеется произвольная излучающая система тел (см. рис. 17.1). На одной части поверхности F этой системы задана температура как функция точки M , а на другой — плотность потока результирующего излучения тоже как функция точки M . Будем называть $T(M)$ и $E_{\text{рез}}(M)$ энергетическими характеристиками системы. Таким образом, ставится задача с непрерывным распределением энергетических характеристик по поверхности системы. Кроме этого, в основу анализа положим также непрерывное распределение оптических характеристик $R(M)$ и $A(M)$.

Локальные плотности потоков излучения $E_{\text{отр}}(M)$, $E_{\text{эф}}(M)$, $E_{\text{рез}}(M)$ являются функциями $E_{\text{пад}}(M)$, причем

$$E_{\text{пад}}(M) = \int_{\omega=2\pi} I_{\text{пад}}(M, s) \cos \theta_M d\omega(M, N). \quad (17.42)$$

Вывод интегрального уравнения для $E_{\text{эф}}(M)$. Так как среда прозрачна для излучения, а каждая элементарная площадка dF_M излучает и отражает диффузно, то

$$I_{\text{пад}}(M, s) = I_{\text{эф}}(N) = \frac{E_{\text{эф}}(N)}{\pi}. \quad (17.43)$$

Элементарный телесный угол

$$d\omega(M, N) = \frac{dF_N \cos \theta_N}{r_{MN}^2}. \quad (17.44)$$

Подставляя (17.43) и (17.44) в (17.42), получаем

$$E_{\text{пад}}(M) = \int_F E_{\text{эф}}(N) K(M, N) dF_N, \quad (17.45)$$

где $K(M, N)$ — геометрическая функция точек;

$$K(M, N) = \frac{\cos \theta_M \cos \theta_N}{\pi r_{MN}^2}.$$

Запишем выражение для $E_{\text{эф}}(M)$ двумя способами:

$$E_{\text{эф}}(M) = E_{\text{соб}}(M) + R(M) E_{\text{пад}}(M); \quad (17.46)$$

$$E_{\text{эф}}(M) = -E_{\text{рез}}(M) + E_{\text{пад}}(M). \quad (17.46a)$$

Два уравнения (17.46) и (17.46a) можно записать в виде одного обобщенного:

$$E_{\text{эф}}(M) = E^*(M) + R^* E_{\text{пад}}(M), \quad (17.47)$$

где $E^*(M)$ и R^* — обобщенные энергетические и оптические характеристики системы;
 $E^*(M) = \begin{cases} E_{\text{сое}}(M) & \text{для той части поверхности, для которой задана температура } T(M); \\ -E_{\text{рез}}(M) & \text{для той части поверхности, для которой задано } E_{\text{рез}}(M); \end{cases}$

$$R^*(M) = \begin{cases} R(M) & \text{в первом случае;} \\ 1 & \text{во втором случае.} \end{cases}$$

Подставляя (17.45) в (17.47), получаем интегральное уравнение для $E_{\text{эф}}(M)$:

$$E_{\text{эф}}(M) - R^*(M) \int_F E_{\text{эф}}(N) K(M, N) dF_N = E^*(M), \quad (17.48)$$

которое для заданной геометрической системы позволяет найти поле $E_{\text{эф}}(M)$ при заданных полях энергетических $E(M)$ и оптических $R(M)$ характеристик системы.

Уравнение (17.48) называется интегральным потому, что неизвестная функция $E_{\text{эф}}(M)$ находится здесь под знаком интеграла. Оно является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода.

Зональный метод. Уравнение (17.48) служит для теоретического обоснования зонального метода расчета теплообмена излучением, сущность которого состоит в следующем. Поверхность излучающей системы разбивается на конечное число зон (см. рис. 17.9) таким образом, что в пределах каждой зоны энергетические и оптические характеристики постоянны, т.е.

$$E^*(M_i) = E_i^*; \quad R^*(M_i) = R_i^*. \quad (17.49)$$

Интеграл в (17.48) представляется в виде суммы интегралов

$$\int_F E_{\text{эф}}(N) K(M, N) dF_N = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\text{эф}}(N_k) K(M, N_k) dF_k.$$

После этого мы получаем систему интегральных уравнений

$$E_{\text{эф}}(M_i) - R_i^* \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\text{эф}}(N_k) K(M_i, N_k) dF_k = E_i^*(M_i). \quad (17.50)$$

Умножая почленно (17.50) на dF_i и интегрируя по F_i вместо системы уравнений для локальных потоков излучения $E_{\text{эф}}(M_i)$ получаем

$$E_{\text{эф}i} F_i - R_i^* \sum_{k=1}^n \iint_{F_k} E_{\text{эф}}(N_k) K(M_i, N_k) dF_k dF_i = E_i^* F_i. \quad (17.51)$$

Далее учтем, что

$$\iint_{F_i F_k} E_{\text{эф}}(N_k) K(M_i, N_k) dF_k dF_i = \int_{F_k} E_{\text{эф}}(N_k) \int_{F_i} K(N_k, M_i) dF_i dF_k.$$

Внутренний интеграл в последнем выражении — локальный угловой коэффициент излучения

$$\varphi(N_k, F_i) = \int_{F_i} K(N_k, M_i) dF_i$$

Допустим, что для любой пары зон локальный угловой коэффициент излучения равен среднему, т.е.

$$\varphi(N_k, F_i) = \varphi_{ki}.$$

Тогда вместо системы интегральных уравнений (17.51) будем иметь систему линейных алгебраических уравнений:

$$Q_{\text{эф}i} - R_i^* \sum_{k=1}^n Q_{\text{эф}k} \varphi_{ki} = E_i^* F_i. \quad (17.52)$$

Разделим (17.52) на F_i и учтем свойство взаимности угловых коэффициентов излучения. Тогда будем иметь систему уравнений для нахождения средних плотностей потоков излучения:

$$E_{\text{эф}i} - R_i^* \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \varphi_{ik} = E_i^*. \quad (17.53)$$

Решая (17.52) или (17.53), определяем $Q_{\text{эф}i}$ или $E_{\text{эф}i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), после чего находим $E_{\text{рез}i}$ для зон с заданной температурой:

$$E_{\text{рез}i} = \frac{A_i}{R_i} (E_{\text{эф}i} - E_{0i})$$

и E_{0i} для зон с заданным значением $E_{\text{рез}i}$

Зная E_{0i} , находим T_i как

$$T_i = 4 \sqrt{\frac{E_{0i}}{\sigma_0}}.$$

Таким образом, в основе зонального метода лежит допущение о равенстве локальных и средних угловых коэффициентов излучения. В общем случае это равенство выполняется тем точнее, чем меньше поверхность зоны (больше число зон).

17.7. Метод Суринова

Ю.А. Суринов ввел в рассмотрение локальный и средний разрешающие угловые коэффициенты излучения. От обычных (геометрических) угловых коэффициентов излучения они отличаются тем, что при их определении учитываются многократные отражения излучения от поверхности системы.

Разрешающие угловые коэффициенты излучения. Локальный разрешающий угловой коэффициент излучения есть отношение потока излучения, падающего от элементарной площадки поверхности одного тела на поверхность другого с учетом многократных отражений в системе, к потоку собственного излучения, выходящему с элементарной площадки первого тела по всевозможным направлениям в пределах полусферического телесного угла.

Локальный разрешающий угловой коэффициент излучения при фиксированной площади поверхности F_k k -го тела является функцией точки M_i на поверхности i -го тела и обозначается так:

$$\Phi(M_i, F_k).$$

Средний разрешающий угловой коэффициент излучения

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \Phi(M_i, F_k) dF_i.$$

Угловые коэффициенты $\Phi(M_i, F_k)$ ($i = 1, 2, \dots, n$, где n — число зон, на которые разбивается граничная поверхность системы) находятся в результате решения системы линейных алгебраических уравнений, для смешанной постановки задачи имеющей вид

$$\Phi(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n R_j^* \Phi(M_i, F_j) \varphi_{jk} = \Phi(M_i, F_k), \quad (17.54)$$

где $\Phi(M_i, F_k)$ и φ_{jk} — геометрические угловые коэффициенты (см. § 17.4).

Аналогично записывается система уравнений для средних обобщенных разрешающих угловых коэффициентов излучения:

$$\Phi_{ik} - \sum_{j=1}^n R_j^* \Phi_{ij} \varphi_{jk} = \Phi_{ik}. \quad (17.55)$$

Определение локальных и средних энергетических характеристик зон по методу Суринова. Локальная и средняя плотности потока падающего излучения находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{пад}}(M_i) &= \sum_{k=1}^n E_k^* \Phi(M_i, F_k); \\ E_{\text{пад}i} &= \sum_{k=1}^n E_k^* \Phi_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (17.56)$$

Для зон с заданной температурой формулы для определения $E_{\text{рез}}(M_i)$ или $E_{\text{рез}i}$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{рез}}(M_i) &= A_i [E_{\text{пад}}(M_i) - E_{0i}]; \\ E_{\text{рез}i} &= A_i (E_{\text{пад}i} - E_{0i}). \end{aligned} \right\} \quad (17.57)$$

Для зон с заданным $E_{\text{рез}}$ сначала находится $E_0(M_i)$, а затем температура $T(M_i)$:

$$E_0(M_i) = E_{\text{пад}}(M_i) - \frac{1}{A_i} E_{\text{рез}i};$$

$$T(M_i) = 4 \sqrt{\frac{E_0(M_i)}{\sigma_0}}$$

Для теоретического обоснования этого зонального метода Ю.А. Суринов методом итераций построил решение интегрального уравнения (17.48), которое выражается через резольвенту — разрешающее ядро интегрального уравнения. В свою очередь, резольвента также должна находиться в результате решения интегрального уравнения. Система уравнений (17.54) — это аппроксимация интегрального уравнения для резольвенты, которая справедлива при условии, что геометрические угловые коэффициенты, взятые для любой пары зон, равны средним. Однако это условие должно выполняться только для тех угловых коэффициентов, которые в (17.54) стоят под знаком суммы.

Отметим, что по существу метод Суринова является обобщением метода многократных отражений Христиансена—Нуссельта для произвольной системы диффузно излучающих и диффузно отражающих тел.

Пример применения метода Суринова. Для иллюстрации метода Суринова выведем первую формулу Христиансена—Нуссельта (см. § 17.2).

В нашем случае локальные и средние угловые коэффициенты (геометрические и разрешающие) равны друг другу. С использованием (17.55) запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} - R_1 \Phi_{11} \Phi_{11} - R_2 \Phi_{12} \Phi_{21} &= \Phi_{11}; \\ \Phi_{12} - R_1 \Phi_{11} \Phi_{12} - R_2 \Phi_{12} \Phi_{22} &= \Phi_{12}. \end{aligned}$$

У нас $\Phi_{11} = \Phi_{22} = 0$, $\Phi_{12} = \Phi_{21} = 1$. Решая эту простую систему, находим¹

$$\Phi_{11} = \frac{R_2}{1 - R_1 R_2}; \quad \Phi_{12} = \frac{1}{1 - R_1 R_2}.$$

Теперь обратимся к (17.56) и (17.57). Учтем, что $E_1^* = A_1 E_{01}$ и $E_2^* = A_2 E_{02}$. Тогда

$$E_{\text{рез}1} = A_1 \left(\frac{A_1 R_2 E_{01}}{1 - R_1 R_2} + \frac{A_2 E_{02}}{1 - R_1 R_2} \right) - A_1 E_{01}.$$

После простых преобразований получим

$$E_{\text{рез}1} = \frac{A_1 A_2 (E_{02} - E_{01})}{1 - R_1 R_2} = \frac{E_{02} - E_{01}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}.$$

Первая формула Христиансена—Нуссельта выведена.

¹ В § 17.2 Φ_{11} и Φ_{12} определялись по методу Христиансена—Нуссельта.

17.8. Задачи с решениями

Задача 1. По трубе перемещается горячий воздух. Температура воздуха измеряется термопреобразователем, помещенным в трубку (чехол) с наружным диаметром $d = 3$ мм (рис. 17.10). Термопреобразователь зарегистрировал температуру $T_{\tau} = 773$ К. Температура стенки трубы $T_c = 723$ К. Оцените погрешность измерения температуры воздуха за счет теплообмена излучением, приняв для чехла термопреобразователя $\epsilon = 0,8$, а коэффициент теплоотдачи от воздуха к чехлу $\alpha = 100$ Вт/(м² · К).

Решение. Для установившегося состояния справедливо уравнение теплового баланса: количество теплоты, передаваемое излучением от чехла термопреобразователя к стенке трубы, равно количеству теплоты, получаемому чехлом за счет конвективного теплообмена. Для расчета $Q_{изл}$ — первой составляющей уравнения теплового баланса воспользуемся формулой (17.16), полагая $Q_{изл} = -Q_{резл}$, а $A_1 = \epsilon$. Вторая составляющая $Q_{конв} = \alpha F_1(T_{\tau} - T_{\tau})$, где F_1 — площадь поверхности чехла термопреобразователя; T_{τ} — температура воздуха.

Из уравнения теплового баланса следует, что

$$T_{\tau} - T_{\tau} = \frac{\epsilon}{\alpha} \sigma_0 (T_{\tau}^4 - T_c^4) = \frac{0,8}{100} 5,67 \cdot 10^{-8} (773^4 - 723^4) = 38 \text{ К}.$$

Истинная температура $T_{\tau} = 773 + 38 = 811$ К.

Ответ. Погрешность измерения равна 38 К, а температура воздуха составляет 811 К.

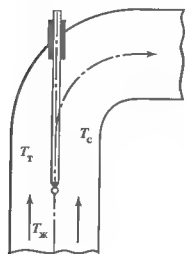
Задача 2. Как изменится погрешность измерения температуры воздуха в задаче 1, если между чехлом термопреобразователя и стенкой трубы соосно с чехлом поместить цилиндрический тонкостенный экран диаметром $d_3 = 5$ мм с отражательной способностью $R_3 = 0,8$?

Решение. Напишем уравнение теплового баланса для чехла:

$$\alpha(T_{\tau} - T_{\tau}) = \frac{\sigma_0(T_{\tau}^4 - T_c^4)}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{d}{d_3}(\frac{1}{\epsilon_3} - 1)},$$

где $\epsilon_3 = 1 - R_3 = 0,2$; T_3 — неизвестная температура экрана.

Рис. 17.10. К расчету погрешности измерения температуры газа из-за теплообмена излучением между чехлом термопреобразователя и стенкой трубы



Второе уравнение получим, составив баланс теплоты для экрана:

$$2\alpha d_3(T_{\tau} - T_3) + \frac{\sigma_0 d(T_{\tau}^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{d}{d_3}(\frac{1}{\epsilon_3} - 1)} = \epsilon_3 d_3 \sigma_0 (T_{\tau}^4 - T_c^4).$$

Считаем, что $T_{\tau} = 811$ К. Подставив в написанные уравнения исходные данные, получим $T_{\tau} = 806$ К. Погрешность измерения $T_{\tau} - T_{\tau} = 5$ К.

Ответ. Для экранированного термопреобразователя погрешность измерения равна 5 К.

Задача 3. Выполните расчет теплообмена излучением между поверхностями плоской ребристой стенки (рис. 17.11). Размер ребер, перпендикулярных к плоскости чертежа, значительно больше l . Температура стенки (та же, что и температура основания ребра) равна 373 К, а температура воздуха на стороне ребристой стенки составляет 293 К. Вдоль ребра температура изменяется по закону:

$$T = 293 + 80 \frac{\text{ch}[15,8(l-x)]}{\text{ch}(15,8l)},$$

где x — координата, отсчитываемая от основания ребра, м; $l = 0,08$ м. Размер $a = 0,04$ м. Степень черноты поверхности ребер и несребренной поверхности стенки $\epsilon = 0,8$.

Проанализируйте также влияние расстояния между ребрами на результирующий поток излучения.

Решение. Длину ребра l разобьем на три равных части и замкнем межреберное пространство условной поверхностью 4 (рис. 17.11). В результате получим излучающую систему, состоящую из восьми зон. Для зоны 4

$$T_4 = 293 \text{ К}; \quad A_4 = 1.$$

По формуле, приведенной в условии задачи, находим средние температуры зон: $T_1 = T_7 = 361,9$ К; $T_2 = T_6 = 344,7$ К; $T_3 = T_5 = 336,9$ К. Угловые коэффициенты излучения Φ_{jk} находим методом натянутых нитей

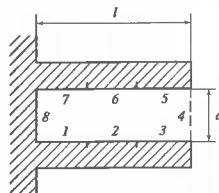


Рис. 17.11. К зональному методу расчета теплообмена излучением между поверхностями ребристой стенки

(см. § 17.4). Совокупность рассчитанных значений φ_{ik} оформляем в виде матрицы:

$$\varphi_{ik} = \begin{pmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0729 & 0,0784 & 0,1972 & 0,3028 & 0,3486 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1514 & 0,1972 & 0,3028 & 0,1972 & 0,1514 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3486 & 0,3028 & 0,1972 & 0,0784 & 0,0729 \\ 0,0486 & 0,1009 & 0,2324 & 0,0000 & 0,2324 & 0,1009 & 0,0486 & 0,2361 \\ 0,0784 & 0,1972 & 0,3028 & 0,3486 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0729 \\ 0,1972 & 0,3028 & 0,1972 & 0,1514 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1514 \\ 0,3028 & 0,1972 & 0,0784 & 0,0729 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3486 \\ 0,2324 & 0,1009 & 0,0486 & 0,2361 & 0,0486 & 0,1009 & 0,2324 & 0,0000 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения $E_{\phi i}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) воспользуемся (17.34а). Матрица A коэффициентов системы восьми уравнений и столбец B известных величин в правых частях этих уравнений будут иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0146 & -0,0157 & -0,0394 & -0,0606 & -0,0697 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & -0,0303 & -0,0394 & -0,0606 & -0,0394 & -0,0303 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & -0,0697 & -0,0606 & -0,0394 & -0,0157 & -0,0146 \\ -0,0005 & -0,0010 & -0,0023 & 1,0000 & -0,0023 & -0,0010 & -0,0005 & -0,0024 \\ -0,0157 & -0,0394 & -0,0606 & -0,0697 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0146 \\ -0,0394 & -0,0606 & -0,0394 & -0,0303 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & -0,0303 \\ -0,0606 & -0,0394 & -0,0157 & -0,0146 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & -0,0697 \\ -0,0465 & -0,0202 & -0,0097 & -0,0472 & -0,0097 & -0,0202 & -0,0465 & 1,0000 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 778,537 \\ 640,782 \\ 584,122 \\ 414,551 \\ 584,122 \\ 640,782 \\ 778,537 \\ 879,441 \end{pmatrix}.$$

Таблица 17.1. Зависимость $E_{\text{рез}}$, Вт/м², для различных зон от a/l в задаче 4

Номер зоны	a/l				
	0,1	0,25	0,5	0,8	1,0
1	-11,33	30,45	-62,09	-93,20	-109,41
2	8,95	7,78	-6,11	-22,15	-30,36
3	-26,24	-42,31	-45,47	-41,57	-39,00
4	330,36	364,99	410,00	444,25	459,54
5	-26,24	-42,31	-45,47	-41,57	-39,00
6	8,95	7,78	-6,11	-22,15	-30,36
7	-11,33	-30,45	-62,09	93,20	-109,41
8	139,58	191,72	-258,45	-313,48	-340,35

Систему уравнений решаем в среде Mathcad: $E_{\text{эф}} = A^{-1}B$. Значения $E_{\text{рез}}$ вычисляем по (17.7). В результате получаем

$$E_{\text{эф}} = \begin{pmatrix} 957,648 \\ 799,452 \\ 718,786 \\ 422,880 \\ 718,786 \\ 799,452 \\ 957,648 \\ 1034,690 \end{pmatrix}; \quad E_{\text{рез}} = \begin{pmatrix} -62,090 \\ -6,105 \\ -45,467 \\ 409,997 \\ -45,467 \\ -6,105 \\ -62,090 \\ -258,448 \end{pmatrix}.$$

Аналогично решаем задачу для другого значения a (значение a изменяем от 0,008 до 0,08 м). Результаты вычислений сводим в табл. 17.1.

ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА
В СИСТЕМЕ ТЕЛ, ЗАПОЛНЕННОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ
И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

18.1. Поглощательная способность и степень черноты среды

В парогенераторах, котлах-утилизаторах, нагревательных печах и других технических устройствах в объеме излучающих газов, как правило, наблюдается неоднородное температурное поле.

В этом случае для расчета потоков излучения используется объемно-зонный метод [4, 9], согласно которому топка котла или какая-либо другая камера разбивается на конечное число объемов (зон) с постоянной температурой газа. Если же распределение температуры газа не задано, то его находят с помощью уравнения теплового баланса. Тогда расчет усложняется, и его выполнение требует больших затрат времени.

В инженерных расчетах часто упрощают действительную картину распределения температуры газа и считают, что она постоянна во всем объеме камеры. Эта модель оправдана в том случае, когда газ хорошо перемешан, температура в основной его массе изменяется мало, а резкое изменение наступает только в пристенной области камеры. Если толщина пристенного слоя мала, его излучением можно пренебречь и приближенно принять, что температура газов $T_g = \text{const}$.

В модели изотермической среды используются понятия, называемые поглощательной способностью и степенью черноты среды.

Поглощательная способность среды — это отношение потока излучения, поглощенного средой, к потоку излучения, падающему на среду. Рассмотрим элементарный слой среды толщиной ds (рис. 18.1). Пусть $I_v(P)$ — спектральная интенсивность излучения в точке P в направлении луча s . На выходе из элементарного слоя интенсивность излучения меньше, чем на входе, и равна $I_v(P) + dI_v(P)$. Согласно закону Бугера,

$$dI_v(P) = -\alpha_v(P)I_v(P)ds, \quad (18.1)$$

где $\alpha_v(P)$ — спектральный коэффициент поглощения среды, м^{-1} , который в общем случае зависит от частоты ν и координат точки P .

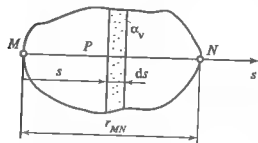


Рис. 18.1. К закону Бугера

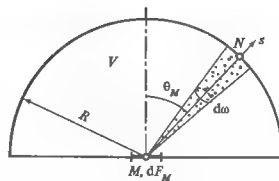
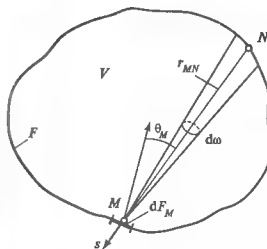


Рис. 18.3. Полусферический объем среды

Рис. 18.2. К определению поглощательной способности среды

Формулу (18.1) можно записать в виде

$$\frac{dI_v(P)}{ds} = -\alpha_v(P)I_v(P). \quad (18.1a)$$

Из (18.1a) интегрированием находим (рис. 18.1):

$$I_v(N) = I_v(M)e^{-h_v}, \quad (18.2)$$

$$h_v = \int_0^{r_{MN}} \alpha_v(P) ds.$$

Соотношение (18.2) представляет собой закон Бугера в интегральной форме. Если можно считать, что коэффициент поглощения не зависит от координат точки, то $h_v = \alpha_v r_{MN}$. Величина h_v называется *оптической толщиной* слоя. Для *серой* среды коэффициент поглощения не зависит от частоты ν . Тогда $h_v = h = \alpha r_{MN}$ и

$$I(N) = I(M)e^{-h}. \quad (18.2a)$$

Доля поглощенного средой излучения в слое толщиной r_{MN} равна $A(M, N)$:

$$A(M, N) = \frac{I(M) - I(N)}{I(M)} = 1 - e^{-h_{MN}}. \quad (18.3)$$

Локальная поглощательная способность $A(M, V)$ — это отношение потока излучения, поглощенного средой в объеме V , к потоку излучения, падающему на среду от элементарной площадки dF_M (рис. 18.2):

$$A(M, V) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=2\pi} \left(1 - e^{-h_{MN}}\right) \cos \theta_M d\omega. \quad (18.4)$$

Для полусферического объема (рис. 18.3) с площадкой dF_M в центре оснoвания полусферы

$$A(M, V) = 1 - e^{-h_{MN}}, \quad (18.5)$$

где h_{MN} равно радиусу полусферы ($h_{MN} = R$).

Средняя поглощательная способность среды $A(F, V)$ — это отношение потока излучения, поглощенного средой в объеме V , к потоку излучения, падающему на среду от поверхности F :

$$A(F, V) = \frac{1}{F} \int_F A(M, V) dF_M, \quad (18.6)$$

где F — площадь полной граничной поверхности излучающей системы или ее части (например, поверхности отдельно взятого тела, входящего в систему).

При записи выражений (18.4)–(18.6) учитывалось, что граничная поверхность абсолютно черная.

Степень черноты среды — это отношение потока собственного излучения среды, падающего на граничную поверхность, к потоку излучения абсолютно черного тела, имеющего ту же температуру что и среда, падающего на ту же поверхность.

На основании закона Кирхгофа для локальной $\epsilon(M, V)$ и средней $\epsilon(F, V)$ степеней черноты среды с учетом (18.4) и (18.6) получим

$$\epsilon(M, V) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=2\pi} \left(1 - e^{-h_{MN}}\right) \cos \theta_M d\omega; \quad (18.7)$$

$$\epsilon(F, V) = \frac{1}{F} \int_F \epsilon(M, V) dF_M. \quad (18.8)$$

Для слабопоглощающей среды $h_{MN} \rightarrow 0$ и $1 - e^{-h_{MN}} \approx h_{MN}$. Тогда для полусферы $\epsilon(M, V) \approx h_{MN} = \alpha R$. Пусть теперь $l_{\text{эф}}$ — длина, равная радиусу полусферы, при которой средняя степень черноты среды в произвольном объеме V

$$\epsilon(F, V) \approx \epsilon(M, V) \approx \alpha l_{\text{эф}}.$$

Величина $l_{\text{эф}}$ называется эффективной длиной луча. Докажем, что

$$l_{\text{эф}} = \frac{4V}{F}. \quad (18.9)$$

Обратимся к рис. 18.4. Пусть r_{MP} — расстояние между точками M и P ; $d\omega(P, M)$ — элементарный телесный угол с вершиной в точке P , опирающийся на площадку dF_M ; $dF_P = dF_P ds$ — элементарный объем среды. Так

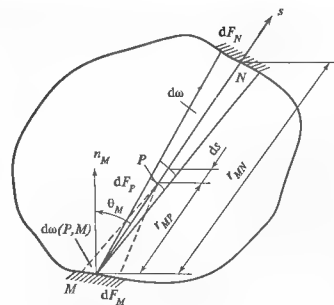


Рис. 18.4. К выводу формулы (18.9)

как $d\omega(P, M) = \frac{dF_M}{r_{MP}^2}$ и $dF_M \cos \theta_M = r_{MP}^2 d\omega(P, M)$, то $\cos \theta_M d\omega dF_M = d\omega(P, M) dF_P$. Кроме того, для слабопоглощающей среды в подынте-

гральном выражении (18.7) $1 - e^{-h_{MN}} \approx h_{MN} = \alpha r_{MN} = \alpha \int ds$.

Тогда

$$\epsilon(F, V) = \frac{\alpha}{\pi F} \int_F \int_{\omega=2\pi} \int_0 \cos \theta_M dF_M d\omega ds = \frac{\alpha}{\pi F} \int_{\omega=4\pi} d\omega(P, M) \int_V dV_P = \alpha \frac{4V}{F}.$$

Соотношение (18.9) доказано. В практических расчетах в формулу (18.9) вводится поправочный коэффициент 0,9, учитывающий тот факт, что излучение одних элементов среды частично поглощается другими элементами. При этом

$$l_{\text{эф}} = 3,6 \frac{V}{F}. \quad (18.9a)$$

Формулу (18.9) можно вывести проще, если рассмотреть термодинамическое равновесие в среде и учесть закон Бугера. Излучаемая в единицу времени в направлении s энергия, Вт/м² (отнесенная к единице телесного угла и к единице объема) в соответствии с (18.1a) равна αI_0 , а излучаемая по всем возможным направлениям в пределах $\omega = 4\pi$ энергия составляет $4\pi \alpha I_0 = 4\alpha E_0$. Величина $4\alpha E_0 dV$ представляет собой энергию, излучаемую элементом среды объемом dV . В случае слабопогло-

щающей среды эта энергия поступает к граничной поверхности F . Объем V состоит из бесчисленного множества элементов dV . Таким образом, излучаемая средой на поверхность F энергия равна $4\alpha E_0 V$. По определению степень черноты среды

$$\epsilon_r = \frac{4\alpha E_0 V}{E_0 F} = \alpha \frac{4V}{F}$$

В то же время $\epsilon_r = 1 - e^{-\alpha l_{\text{эф}}} = \alpha l_{\text{эф}}$. Отсюда следует формула (18.9).

В продуктах сгорания природного газа, мазута и твердого топлива излучающими компонентами являются сажиный углерод, частицы золы и кокса (эти компоненты дают сплошной спектр излучения), а также газы H_2O , CO_2 , CO и др. Наибольший вклад в энергию излучения газов вносят H_2O и CO_2 . Спектр излучения газов — полосатый (см. § 16.1). На рис. 18.5 показан спектр поглощения CO_2 при температурах газа 300 К (сплошные линии) и 830 К (пунктирные линии). Из рисунка видно, что в области спектра длин волн от 1,9 до 15 мкм CO_2 обладает четырьмя полосами поглощения. В инфракрасной области спектра для H_2O (пара) имеют место шесть полос поглощения, соответствующих длинам волн 1,14; 1,38; 1,87; 2,7; 6,3 и 20 мкм. Наиболее важную роль в излучении CO_2 играет полоса, соответствующая длине волны 4,3 мкм, а в излучении H_2O — полосы, соответствующие длинам волн 6,3 и 2,7 мкм. В промежутках между полосами поглощения газы являются практически прозрачными средами. В топочных газах в этих промежутках излучают энергию твердые компоненты продуктов сгорания, имеющие сплошной спектр поглощения и излучения.

Степень черноты газа зависит от его парциального давления, толщины излучающего слоя, температуры и полного давления смеси газов p . Влияние парциального давления и толщины слоя объясняется тем, что от этих

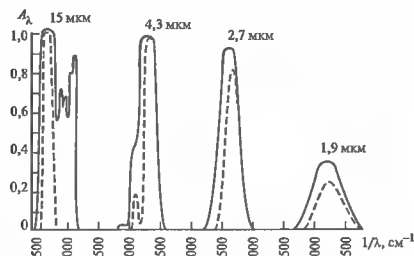


Рис. 18.5. Спектральная поглощательная способность CO_2

величин зависит число молекул газа, находящихся на пути луча. С повышением полного давления происходит уширение полос поглощения.

Из опытных данных следует, что ϵ_{CO_2} — интегральная степень черноты CO_2 при атмосферном давлении $p = 0,101$ МПа зависит от произведения $p_{\text{CO}_2} l_{\text{эф}}$ (p_{CO_2} — парциальное давление CO_2) и температуры газа. В инженерных расчетах ϵ_{CO_2} определяется по номограммам (рис. 18.6).

Степень черноты H_2O (пара) $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ зависит не только от температуры и произведения $p_{\text{H}_2\text{O}} l_{\text{эф}}$, но и от отдельно взятых значений $p_{\text{H}_2\text{O}}$ и p . В практических расчетах по номограммам (рис. 18.7) находят $\epsilon'_{\text{H}_2\text{O}}$ и вводят поправочный коэффициент $\beta_{\text{H}_2\text{O}}$ (рис. 18.8), т.е.

$$\epsilon_{\text{H}_2\text{O}} = \epsilon'_{\text{H}_2\text{O}} \beta_{\text{H}_2\text{O}},$$

где $\epsilon'_{\text{H}_2\text{O}}$ при $p = 0,101$ МПа определяется по рис. 18.7.

Если давление $p > 0,101$ МПа в расчет $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ и ϵ_{CO_2} вводятся дополнительные поправки (см., например, [4]).

При расчете излучения смеси газов CO_2 и H_2O следует учитывать тот факт, что полосы поглощения этих газов частично перекрывают друг друга. Тогда

$$\epsilon_{\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}} = \epsilon_{\text{CO}_2} + \epsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\epsilon,$$

где $\Delta\epsilon = \epsilon_{\text{CO}_2} \epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$.

Интегральные поглощательные способности A_{CO_2} и $A_{\text{H}_2\text{O}}$ находятся также с помощью номограмм (рис. 18.6—18.8). Пусть T_r и $T_{\text{ст}}$ — температуры газа и стенки. Если $T_r = T_{\text{ст}}$, то $A_{\text{CO}_2} = \epsilon_{\text{CO}_2}$ и $A_{\text{H}_2\text{O}} = \epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$. Для нахождения A_{CO_2} и $A_{\text{H}_2\text{O}}$ в случае, когда $T_r \neq T_{\text{ст}}$, предварительно вычисляют приведенные значения парциальных давлений CO_2 и H_2O :

$$\tilde{p}_{\text{CO}_2} = p_{\text{CO}_2} \frac{T_{\text{ст}}}{T_r}; \quad \tilde{p}_{\text{H}_2\text{O}} = p_{\text{H}_2\text{O}} \frac{T_{\text{ст}}}{T_r}.$$

Затем по номограммам находят $\tilde{\epsilon}_{\text{CO}_2}$ и $\tilde{\epsilon}_{\text{H}_2\text{O}}$ в зависимости от произведений $\tilde{p}_{\text{CO}_2} l$, $\tilde{p}_{\text{H}_2\text{O}} l$ и $T_{\text{ст}}$.

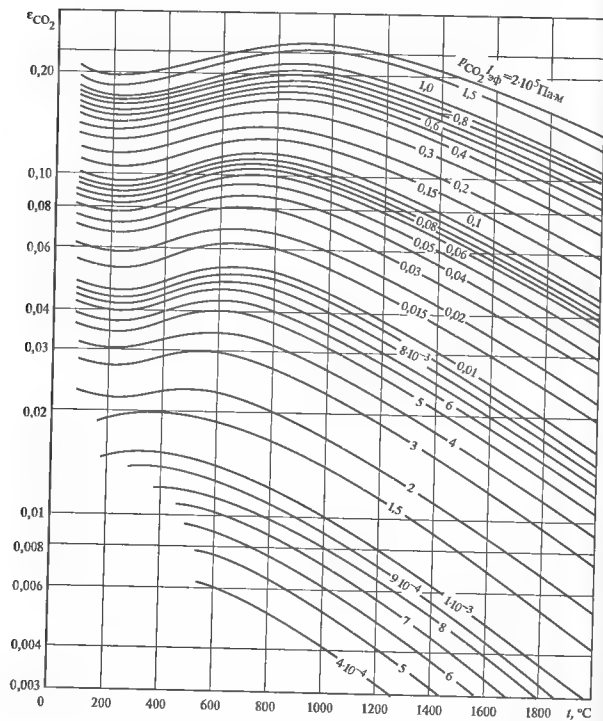


Рис. 18.6. Зависимость ϵ_{CO_2} от температуры газа при различных значениях $p_{\text{CO}_2} l_{\phi}$

Окончательно принимают:

$$A_{\text{CO}_2}(T_r, T_{\text{ст}}) = \left(\frac{T_r}{T_{\text{ст}}} \right)^{0.65} \bar{\epsilon}_{\text{CO}_2}(\tilde{p}_{\text{CO}_2} l, T_{\text{ст}});$$

$$A_{\text{H}_2\text{O}}(T_r, T_{\text{ст}}) = \left(\frac{T_r}{T_{\text{ст}}} \right)^{0.45} \bar{\epsilon}_{\text{H}_2\text{O}}(\tilde{p}_{\text{H}_2\text{O}} l, T_{\text{ст}}).$$

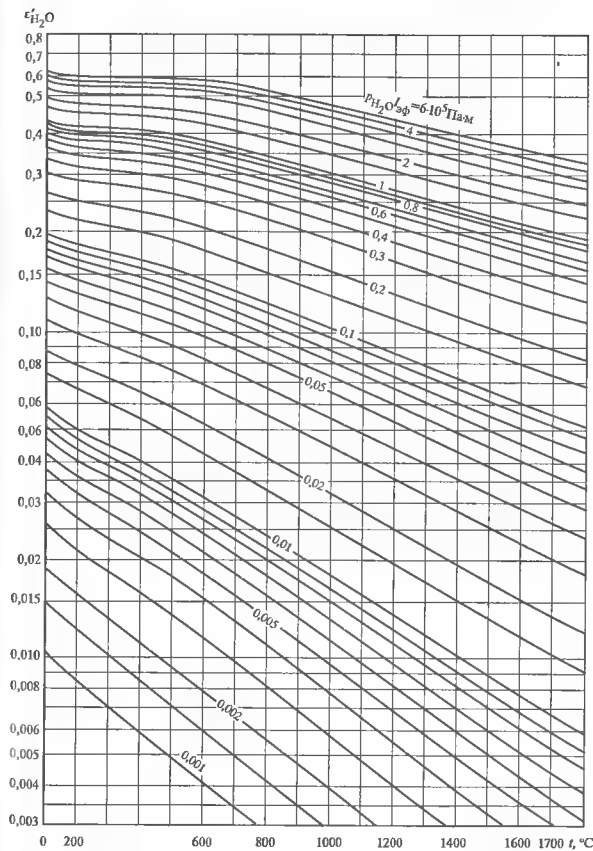


Рис. 18.7. Зависимость $\epsilon'_{\text{H}_2\text{O}}$ от температуры газа при различных значениях $p_{\text{H}_2\text{O}} l_{\phi}$

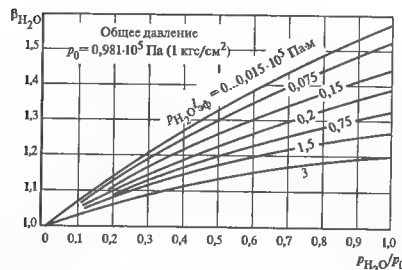


Рис. 18.8. Поправочный коэффициент $\beta_{\text{H}_2\text{O}}$ для определения степени черноты $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$

Для смеси CO_2 и H_2O

$$A_{\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}} = A_{\text{CO}_2} + A_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta A,$$

где $\Delta A = A_{\text{CO}_2} A_{\text{H}_2\text{O}}$.

18.2. Расчет теплообмена излучением в системе типа «газ в черной оболочке»

Пусть температура граничной поверхности системы равна $T_{\text{ст}}$, площадь этой поверхности — $F_{\text{ст}}$, а температура газа — $T_{\text{г}}$. Задана средняя степень черноты газа $\epsilon_{\text{г}}$ и его поглощательная способность $A_{\text{г}}$, причем

$$\epsilon_{\text{г}} = \epsilon_{\text{г}}(T_{\text{г}}) = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon_{\text{vr}}(\nu, T_{\text{г}}) E_{\text{v0}}(\nu, T_{\text{г}}) d\nu}{\int_0^{\infty} E_{\text{v0}}(\nu, T_{\text{г}}) d\nu};$$

$$A_{\text{г}} = A_{\text{г}}(T_{\text{г}}, T_{\text{ст}}) = \frac{\int_0^{\infty} A_{\text{vr}}(\nu, T_{\text{г}}) E_{\text{v0}}(\nu, T_{\text{ст}}) d\nu}{\int_0^{\infty} E_{\text{v0}}(\nu, T_{\text{ст}}) d\nu}.$$

Для серой среды $\epsilon_{\text{vr}} = A_{\text{vr}}$ и $\epsilon_{\text{г}} = A_{\text{г}}$. Для несерой среды выполняется только первое равенство, а в подынтегральных выражениях числителей $\epsilon_{\text{vr}}(\nu, T_{\text{г}}) = A_{\text{vr}}(\nu, T_{\text{г}})$.

Поток излучения, поглощенный газом,

$$Q_{\text{погл.г}} = A_{\text{г}} Q_{\text{пад.г}} = A_{\text{г}} F_{\text{ст}} \sigma_0 T_{\text{ст}}^4.$$

Поток собственного излучения газа

$$Q_{\text{соб.г}} = \epsilon_{\text{г}} F_{\text{ст}} \sigma_0 T_{\text{г}}^4.$$

Поток результирующего излучения

$$Q_{\text{рез.г}} = Q_{\text{погл.г}} - Q_{\text{соб.г}} = \sigma_0 F_{\text{ст}} (A_{\text{г}} T_{\text{ст}}^4 - \epsilon_{\text{г}} T_{\text{г}}^4). \quad (18.10)$$

Для оболочки $Q_{\text{рез.ст}} = -Q_{\text{рез.г}}$. Степень черноты $\epsilon_{\text{г}}$ и поглощательная способность $A_{\text{г}}$ для CO_2 и H_2O определяются в соответствии с § 18.1. Если принимается модель серого газа, то $\epsilon_{\text{г}} = A_{\text{г}}$ и

$$\epsilon_{\text{г}} = 1 - e^{-\alpha l_{\text{эф}}},$$

где α — коэффициент поглощения; $l_{\text{эф}}$ — эффективная длина луча (см. § 18.1).

Величина $Q_{\text{рез.ст}}$ равна изменению энтальпии входящего и выходящего из оболочки газа.

В общем случае следует учитывать конвективный теплообмен между газом и оболочкой. Тогда изменение энтальпии газа равно сумме $Q_{\text{рез.ст}}$ и $Q_{\text{конв}}$, где $Q_{\text{конв}} = \alpha_{\text{конв}} (T_{\text{г}} - T_{\text{ст}}) F_{\text{ст}}$ ($\alpha_{\text{конв}}$ — коэффициент теплоотдачи).

Важно подчеркнуть, что рассмотренный метод расчета потока результирующего излучения может привести к неправильному результату, если оптическая толщина $\alpha l_{\text{эф}}$ велика, а в объеме газа имеет место неоднородное распределение температуры. Тогда холодные слои газа, примыкающие к поверхности оболочки, будут интенсивно поглощать излучение, исходящее из центральной части объема, и значение $Q_{\text{рез.ст}}$ будет зависеть от температуры этих слоев и $T_{\text{ст}}$. Так как указанные температуры мало отличаются друг от друга, то возможен случай, когда $Q_{\text{рез.ст}} \approx 0$ («заспирание» излучения).

Отметим еще, что средняя плотность потока результирующего излучения для поверхности оболочки

$$E_{\text{рез.ст}} = \sigma_0 (\epsilon_{\text{г}} T_{\text{г}}^4 - A_{\text{г}} T_{\text{ст}}^4). \quad (18.10a)$$

Если оболочка представляет собой сферу, то локальные значения $E_{\text{рез}}$ совпадают со средними, так как в этом случае равны друг другу локальные и средние степени черноты среды. В общем же случае последнее условие не выполняется, поэтому $E_{\text{рез}} = E_{\text{рез}}(M)$, где M — точка на поверхности оболочки. Нетрудно доказать, что

$$E_{\text{рез}}(M) = \sigma_0 [\epsilon_{\text{г}}(M, V) T_{\text{г}}^4 - A_{\text{г}}(M, V) T_{\text{ст}}^4]. \quad (18.10b)$$

Для серого газа $\epsilon_r(M, V) = A_r(M, V)$. В некоторых простейших случаях (например, излучение газа, заключенного в камеру цилиндрической формы, падающее на центр основания цилиндра) можно получить простое выражение для локальной степени черноты (см. § 18.3).

18.3. Обобщенные угловые коэффициенты излучения

Угловые коэффициенты излучения для прозрачной среды рассматривались выше (см. § 17.4). Обобщенные угловые коэффициенты излучения отличаются тем, что в них учитывается ослабление интенсивности излучения поглощающей средой.

Разобьем граничную поверхность излучающей системы на конечное число зон. Будем считать, что граничная поверхность — абсолютно черная. Пусть M_i и N_k — точки на поверхностях i -й и k -й зон (см. § 17.4). Для прозрачной среды интенсивность излучения, выходящего из площадки dF_i , равна интенсивности излучения, достигающего площадки dF_k : $I(N_k) = I(M_i)$. В случае поглощающей среды на основании закона Бугера можно записать:

$$I(N_k) = I(M_i) e^{-\alpha r_{ik}},$$

где α — коэффициент поглощения (для серой среды α не зависит от длины волны); $I(M_i) = E_0(M_i)/\pi$.

Формулы для определения обобщенных угловых коэффициентов излучения можно вывести так же, как и формулы § 17.4. Они будут отличаться от формул для обычных (геометрических) угловых коэффициентов только

наличием множителя $e^{-\alpha r_{ik}}$ в подынтегральных функциях.

Локальный обобщенный угловой коэффициент излучения — это отношение потока излучения от dF_i , падающего на поверхность F_k , с учетом ослабления излучения средой, к потоку собственного полусферического излучения, выходящего из dF_i :

$$\psi(M_i, F_k) = \int_{F_k} e^{-\alpha r_{ik}} K(M_i, N_k) dF_k. \quad (18.11)$$

Средний обобщенный угловой коэффициент излучения — это отношение потока излучения от dF_i , падающего на поверхность F_k с учетом ослабления излучения средой, к потоку собственного полусферического излучения, выходящего из F_i :

$$\psi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \psi(M_i, F_k) dF_i; \quad (18.12)$$

$$\psi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_k} e^{-\alpha r_{ik}} K(M_i, N_k) dF_k dF_i. \quad (18.12a)$$

Свойство взаимности записывается так же, как и для обычных угловых коэффициентов излучения:

$$\psi_{ik} F_i = \psi_{ki} F_k. \quad (18.13)$$

Свойство замкнутости имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n \psi_{ik} + A(F_i, V) = 1; \quad (18.14)$$

$$\sum_{k=1}^n \psi(M_i, F_k) + A(M_i, V) = 1. \quad (18.14a)$$

Здесь $A(M_i, V)$ — локальная, а $A(F_i, V)$ — средняя поглощательные способности. Последняя величина относится к излучению, падающему на средю от поверхности зоны F_i .

Обобщенные угловые коэффициенты излучения находят аналитическим или численным интегрированием выражений (18.12) и (18.12a). Таким же способом, как и в примере, рассмотренном выше (см. § 17.4), можно рассчитать $\psi(M_1, F_2)$ и $\psi(M_1, F_3)$ — угловые коэффициенты излучения элементарной площадки dF_1 в центре нижнего основания цилиндра (рис. 18.9), падающего на верхнее основание площадью F_2 и на боковую поверхность площадью F_3 :

$$\psi(M_1, F_2) = 2h^2 \int_{r=h}^{\sqrt{h^2+r_0^2}} e^{-\alpha r} \frac{dr}{r^3}; \quad (18.15)$$

$$\psi(M_1, F_3) = 2r_0^2 \int_{r=r_0}^{\sqrt{h^2+r_0^2}} e^{-\alpha r} \frac{dr}{r^3}. \quad (18.15a)$$

Преобразуем формулу (18.15). Введем $\mu = \cos \theta = h/r$. Тогда $dr = -h d\mu/\mu^2$, $\alpha r = \alpha h/\mu$ и

$$\psi(M_1, F_2) = 2 \int_{\mu_0}^1 e^{-\alpha h/\mu} \mu d\mu, \quad (18.15b)$$

где $\mu_0 = h/\sqrt{h^2+r_0^2}$.

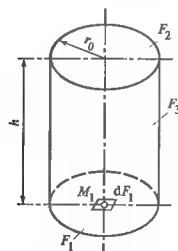


Рис. 18.9. К нахождению обобщенных угловых коэффициентов излучения $\psi(M_1, F_2)$ и $\psi(M_2, F_3)$

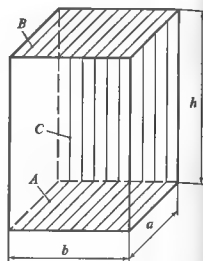


Рис. 18.10. К нахождению обобщенных угловых коэффициентов излучения ψ_{AB} и ψ_{AC} в камере, имеющей форму параллелепипеда

В частном случае двух безграничных пластин ($h \ll r_0$)

$$\psi_{12} = \psi(M_1, F_2) = 2E_3(\alpha h). \quad (18.16)$$

Значения $E_3(x)$ приведены ниже (см. табл. 19.1). Угловые коэффициенты $\psi(M_1, F_2)$ и $\psi(M_1, F_3)$ можно найти с помощью функции $E_3(x)$. Например, после преобразования (18.15б) получаем

$$\psi(M_1, F_2) = 2E_3(\alpha h) - \frac{2h^2}{h^2 + r_0^2} E_3(\alpha \sqrt{h^2 + r_0^2}).$$

Соответствующие преобразования (18.15а) дают

$$\psi(M_1, F_3) = 2E_3(\alpha r_0) - \frac{2r_0^2}{h^2 + r_0^2} E_3(\alpha \sqrt{h^2 + r_0^2}).$$

Из (18.14а) следует, что

$$A(M_1, V) = 1 - \psi(M_1, F_2) - \psi(M_1, F_3) = 1 - 2E_3(\alpha h) - 2E_3(\alpha r_0) + 2E_3(\alpha \sqrt{h^2 + r_0^2}). \quad (18.17)$$

Поглощательная способность плоского слоя газовой среды $A(M_1, V) = A_r = 1 - 2E_3(\alpha h)$.

Для расчета лучистого теплообмена в камере, имеющей форму параллелепипеда (рис. 18.10), можно использовать табл. 18.1 и 18.2, в которых приведены средние обобщенные угловые коэффициенты излучения ψ_{AB} и ψ_{AC} . В таблицах обозначено: $\tau_0 = ab$. Значения ψ_{AB} и ψ_{AC} получены С.П. Детковым и А.В. Виноградовым [4].

Таблица 18.1. Значения средних угловых коэффициентов излучения ψ_{AB} для параллелепипеда

$H = h/b$	$\tau_0 = 0,1$						$\tau_0 = 1,0$					
	$A = a/b$						$A = a/b$					
	0,1	0,5	1,0	2,0	5,0	10	0,1	0,5	1,0	2,0	5,0	10
0,1	0,3810	0,7410	0,8118	0,8539	0,8814	0,8870	0,3392	0,6465	0,7035	0,7375	0,7592	0,7630
0,5	0,0659	0,2695	0,3902	0,4765	0,5343	0,5581	0,0399	0,1595	0,2242	0,2663	0,2925	0,3039
1,0	0,0224	0,1047	0,1788	0,2542	0,3167	0,3392	0,0087	0,0400	0,0662	0,0896	0,1062	0,1119
2,0	0,0060	0,0295	0,0557	0,0941	0,1412	0,1616	0,0010	0,0047	0,0086	0,0138	0,0187	0,0204
5,0	0,0008	0,0038	0,0075	0,0144	0,0291	0,0399	—	—	—	—	—	—
10	0,0001	0,0006	0,0012	0,0023	0,0053	0,0087	—	—	—	—	—	—
$\tau_0 = 0,5$						$\tau_0 = 2,0$						
0,1	0,3617	0,6971	0,7612	0,7994	0,8241	0,8287	0,2986	0,5576	0,6032	0,6306	0,6478	0,6504
0,5	0,0527	0,2133	0,3452	0,3570	0,4071	0,4239	0,0230	0,0896	0,1225	0,1423	0,1544	0,1600
1,0	0,0147	0,0683	0,1149	0,1595	0,1934	0,2053	0,0030	0,0138	0,0221	0,0287	0,0330	0,0346
2,0	0,0027	0,0130	0,0243	0,0400	0,0569	0,0634	0,0001	0,0006	0,0011	0,0017	0,0021	0,0023
5,0	0,0001	0,0005	0,0010	0,0019	0,0036	0,0045	—	—	—	—	—	—

Таблица 18.2. Значения средних угловых коэффициентов излучения ψ_{AC} для параллелепипеда

$\frac{H}{b}$ $= \frac{h}{b}$	$\tau_0 = 0,1$						$\tau_0 = 1,0$					
	$A = a/b$						$A = a/b$					
	0,1	0,5	1,0	2,0	5,0	10	0,1	0,5	1,0	2,0	5,0	10
0,1	0,0237	0,0394	0,0431	0,453	0,0466	0,0470	0,0218	0,0349	0,0377	0,0393	0,0402	0,0404
0,5	0,0456	0,1122	0,1405	0,1598	0,1730	0,1781	0,0374	0,0841	0,1008	0,1111	0,1177	0,1202
1,0	0,0522	0,1423	0,1894	0,2264	0,2536	0,2637	0,0405	0,0975	0,1218	0,1383	0,1491	0,1532
2,0	0,0555	0,1577	0,2176	0,2705	0,3138	0,3304	0,0413	0,1015	0,1289	0,1487	0,1622	0,1671
5,0	0,0565	0,1631	0,2281	0,2893	0,3459	0,3695	0,0414	0,1018	0,1297	0,1501	0,1642	0,1694
10	0,0567	0,1637	0,2292	0,2916	0,3511	0,3773	—	—	—	—	—	—
$\tau_0 = 0,5$						$\tau_0 = 2,0$						
0,1	0,0228	0,0373	0,0405	0,0424	0,0435	0,0438	0,0198	0,0310	0,0331	0,0343	0,0350	0,0351
0,5	0,0416	0,0982	0,1204	0,1348	0,1443	0,1479	0,0311	0,0639	0,0739	0,0796	0,0832	0,0845
1,0	0,0463	0,1191	0,1539	0,1793	0,1968	0,2033	0,0324	0,0695	0,0824	0,0902	0,0951	0,0969
2,0	0,0480	0,1275	0,1690	0,2023	0,2269	0,2359	0,0326	0,0704	0,0840	0,0924	0,0977	0,0997
5,0	0,0484	0,1292	0,1723	0,2080	0,2359	0,2463	—	—	—	—	—	—
10	0,0484	0,1292	0,1723	0,2081	0,2361	0,2466	—	—	—	—	—	—

18.4. Зональный метод расчета теплообмена излучением в замкнутой системе тел, заполненной поглощающей средой

Граничную поверхность системы разобьем на конечное число зон n , так что $F = \sum_{i=1}^n F_i$. В пределах каждой зоны температура T_i или плотность потока результирующего излучения $E_{\text{рез}i}$ постоянны. Будем считать поверхности зон серыми, а их поглотительные способности A_i постоянными. Заполняющая система среда (газ) также серая с постоянной во всем объеме температурой T_r .

В случае *абсолютно черной* граничной поверхности плотность потока излучения, падающего на i -ю зону,

$$E_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n E_{0k} \Psi_{ik} + A_{r1} E_{0r}, \quad (18.18)$$

где $E_{0r} = \sigma_0 T_r^4$; $E_{0k} = \sigma_0 T_k^4$; A_{r1} — поглотительная способность газа для потока излучения, выходящего из i -й зоны, т.е. $A_{r1} = A(F_r, V)$.

Для абсолютно черной поверхности i -й зоны

$$E_{\text{рез}i} = E_{\text{пад}i} - E_{0i}. \quad (18.19)$$

Если поверхность *серая*, то вместо (18.19) будем иметь

$$E_{\text{рез}i} = A_i (E_{\text{пад}i} - E_{0i}). \quad (18.19a)$$

Значение $E_{\text{пад}i}$ можно найти по методу Суринова:

$$E_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n A_k E_{0k} \Psi_{ik} + A_{r1}^* E_{0r}, \quad (18.20)$$

где Ψ_{ik} — средний *разрешающий* обобщенный угловой коэффициент излучения, равный отношению потока излучения от поверхности F_k , падающего на поверхность F_k с учетом ослабления излучения средой и многократных отражений от граничной поверхности, к полному потоку собственного излучения, выходящему из i -й зоны (площадь ее поверхности F_i).

Средняя *разрешающая* поглотительная способность A_{r1}^* — это отношение потока собственного излучения i -й зоны, поглощенного средой после многократных отражений от границы системы, к потоку собственного излучения i -й зоны. В частном случае абсолютно черной поверхности $\Psi_{ik} = \Psi_{ik}$, $A_{r1}^* = A_{r1}$.

Система уравнений для нахождения разрешающих угловых коэффициентов (см. § 17.7) имеет вид

$$\Psi_{ik} - \sum_{j=1}^n R_j \Psi_{jk} \Psi_{ij} = \Psi_{ik}. \quad (18.21)$$

Вместо (18.21) можно записать

$$\Psi_{ik} - \sum_{j=1}^n R_j \Psi_{jk} \Psi_{ij} = \Psi_{ik}. \quad (18.21a)$$

Для разрешающих обобщенных угловых коэффициентов излучения справедливы свойства взаимности и замкнутости:

$$\Psi_{ik} F_i = \Psi_{ki} F_k; \quad (18.22)$$

$$\sum_{k=1}^n A_k \Psi_{ik} + A_{r1}^* = 1. \quad (18.22a)$$

Для смешанной постановки задачи величины, входящие в (18.20), (18.21), $E_{\text{соб}k} = A_k E_{0k}$ и R_j следует заменить на обобщенные энергетические и оптические характеристики (см. § 17.7).

Аналогично тому, как это было сделано выше (см. § 17.7), можно ввести локальный разрешающий обобщенный угловой коэффициент излучения $\Psi(M_r, F_k)$ и локальную разрешающую поглотительную способность среды $A_r^*(M_r, V)$.

С учетом этого по методу Суринова можно определить локальные значения $E_{\text{рез}}(M_i)$ или $T(M_i)$ для произвольно взятой i -й зоны. Тогда для смешанной постановки задачи будем иметь:

$$E_{\text{пад}i}(M_i) = \sum_{k=1}^n E_k^* \Psi(M_r, F_k) + A_r^*(M_r, V) E_{0r}; \quad (18.23)$$

$$\sum_{k=1}^n (1 - R_k^*) \Psi(M_r, F_k) + A_r^*(M_r, V) = 1; \quad (18.24)$$

$$\Psi(M_r, F_k) - \sum_{j=1}^n R_j^* \Psi_{jk} \Psi(M_r, F_j) = \Psi(M_r, F_k). \quad (18.25)$$

Для несерой среды указанный метод следует использовать при определении монохроматических характеристик излучения. Если в определенных участках спектра газ прозрачен для излучения, то для них $\Psi_{ik} = \Phi_{ik}$ и $\Psi_{ik} - \Phi_{ik}$.

Кроме метода Суринова, для расчета теплообмена излучением используется метод, рассмотренный ранее (§ 17.5) для случая прозрачной среды. Тогда

$$E_{\text{пад}i} = \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}i} \psi_{ik} + A_{\text{г}i} E_{0\text{г}} \quad (18.26)$$

$$\text{и } E_{\text{эф}i} = E_{\text{соб}i} + R_i E_{\text{пад}i}. \quad (18.26a)$$

Подставив (18.26a) в (18.26), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$E_{\text{эф}i} - R_i \sum_{k=1}^n E_{\text{эф}k} \psi_{ik} = E_{\text{соб}i} + R_i A_{\text{г}i} E_{0\text{г}}. \quad (18.26b)$$

Значения $E_{\text{рез}i}$ могут быть найдены по формуле (17.35a). Систему (18.26b) можно обобщить на случай смешанной постановки задачи.

18.5. Теплообмен излучением в системе типа «серый газ в серой оболочке» и «несерый газ в несерой оболочке»

Обобщим результаты, полученные выше (см. § 18.2), для серой оболочки. Пусть E_1 и A_1 — плотность потока собственного излучения оболочки и ее поглощательная способность ($E_1 = A_1 \sigma_0 T_1^4$); E_{02} и $A_{\text{г}}$ — плотность потока излучения абсолютно черного тела при температуре газа $T_2 = T_{\text{г}}$ и поглощательная способность серого газа; ψ_{11} — обобщенный угловой коэффициент излучения от оболочки на оболочку, причем $\psi_{11} = 1 - A_{\text{г}}$.

Воспользуемся методом многократных отражений—поглощений. Рассчитаем среднюю плотность потока излучения, падающего на оболочку. Энергия излучения газа (в расчете на единицу площади поверхности и единицу времени) равна $A_{\text{г}} E_{02}$. Часть этой падающей энергии поглощается оболочкой (стенкой), а остальная часть, равная $R_1 A_{\text{г}} E_{02}$, отражается. Отраженная энергия поглощается газом и снова (в количестве $R_1 A_{\text{г}} E_{02} \psi_{11}$) попадает на оболочку. В третий раз на оболочку падает энергия газа, равная $A_{\text{г}} E_{02} (R_1 \psi_{11})^2$, и т.д. Окончательно для потока излучения газа на оболочку $E_{\text{г-ст}}$ имеем

$$E_{\text{г-ст}} = A_{\text{г}} E_{02} [1 + R_1 \psi_{11} + (R_1 \psi_{11})^2 + \dots] = \frac{A_{\text{г}} E_{02}}{1 - R_1 \psi_{11}}.$$

Для потока излучения оболочки на саму же оболочку $E_{\text{ст-ст}}$ аналогично можно получить

$$E_{\text{ст-ст}} = E_1 \psi_{11} [1 + R_1 \psi_{11} + (R_1 \psi_{11})^2 + \dots] = \frac{E_1 \psi_{11}}{1 - R_1 \psi_{11}} = \frac{A_1 E_{01} \psi_{11}}{1 - R_1 \psi_{11}}.$$

Плотность потока излучения, падающего на оболочку,

$$E_{\text{пад1}} = E_{\text{г-ст}} + E_{\text{ст-ст}} = \frac{A_{\text{г}} E_{02} + E_1 \psi_{11}}{1 - R_1 \psi_{11}}. \quad (18.27)$$

Плотность потока результирующего излучения получим, если в (18.19a) с учетом того, что $i = 1$, подставим найденное выражение для $E_{\text{пад1}}$. После простых преобразований будем иметь

$$E_{\text{рез1}} = \frac{A_{\text{г}} A_1 (E_{02} - E_{01})}{1 - R_1 \psi_{11}} = \frac{A_{\text{г}} A_1 \sigma_0 (T_2^4 - T_1^4)}{1 - R_1 \psi_{11}}. \quad (18.28)$$

Простой вывод формулы (18.27) получается, если воспользоваться методом Суринова. Из (18.21) легко находим

$$\psi_{11} = \frac{\psi_{11}}{1 - R_1 \psi_{11}}.$$

Тогда разрешающая поглощательная способность газа

$$A_{\text{г}}^* = 1 - A_1 \psi_{11},$$

а поток падающего излучения

$$E_{\text{пад1}} = A_1 E_{01} \psi_{11} + A_{\text{г}}^* E_{02}.$$

Путем простых преобразований приходим к (18.27) и далее — к (18.28).

Формула (18.28) в частном случае абсолютно черной оболочки ($R_1 = 0$) и серого газа с учетом того, что $T_{\text{ст}} = T_1$, а $T_{\text{г}} = T_2$, превращается в (18.10a).

Если несерый газ находится в несерой оболочке, то при использовании (18.28) для монохроматического излучения и интегрировании по всему спектру частот ν (или по всем длинам волн λ) получаем

$$E_{\text{рез1}} = \int_0^\infty \frac{A_{\lambda\text{г}} A_{\lambda1} E_{\lambda02}}{1 - R_{\lambda1} \psi_{\lambda11}} d\lambda - \int_0^\infty \frac{A_{\lambda\text{г}} A_{\lambda1} E_{\lambda01}}{1 - R_{\lambda1} \psi_{\lambda11}} d\lambda. \quad (18.29)$$

В случае серой оболочки, но несерого газа при условии $R_1 \psi_{\lambda11} \ll 1$ из (18.29) можно получить

$$E_{\text{рез1}} = \epsilon_1 \sigma_0 (\epsilon_{\text{г}} T_{\text{г}}^4 - A_{\text{г}} T_{\text{ст}}^4). \quad (18.30)$$

Очевидно, что, пренебрегая $R_1 \psi_{3,11}$ в (18.29), мы занижаем действительное значение $E_{\text{рез1}}$. Поэтому в инженерных расчетах в случае $R_1 < 0,2$ обычно пользуются формулой

$$E_{\text{рез1}} = \frac{\varepsilon_1 + 1}{2} \sigma_0 (\varepsilon_r T_r^4 - A_r T_{\text{ст}}^4). \quad (18.30a)$$

Значения величин ε_r и A_r находятся по формулам, приведенным выше (см. § 18.1).

18.6. Задачи с решениями

Задача 1. Найдите плотность потока собственного излучения смеси газов H_2O и CO_2 ($p_{\text{H}_2\text{O}} = 8$ кПа; $p_{\text{CO}_2} = 12$ кПа) на поверхность стен нагревательной печи, которая имеет объем $V = 12 \text{ м}^3$ и площадь поверхности стен $F = 28 \text{ м}^2$. Температура газов $T_r = 1473 \text{ К}$.

Решение. Эффективная длина луча

$$l_{\text{эф}} = 3,6 \frac{V}{F} = 3,6 \frac{12}{28} = 1,54 \text{ м}.$$

Вычисляем произведения:

$$p_{\text{H}_2\text{O}} l_{\text{эф}} = 8 \cdot 10^3 \cdot 1,54 = 1,24 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{м};$$

$$p_{\text{CO}_2} l_{\text{эф}} = 12 \cdot 10^3 \cdot 1,54 = 1,85 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{м}.$$

По номограммам (см. рис. 18.6 и 18.7) находим: $\varepsilon'_{\text{H}_2\text{O}} = 0,10$; $\varepsilon_{\text{CO}_2} = 0,11$. Из рис. 18.8 определяем $\beta = 1,05$. Тогда $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 0,10 \cdot 1,05 = 0,105$.

Следовательно (см. § 18.1),

$$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2} = 0,105 + 0,11 - 0,105 \cdot 0,11 = 0,203;$$

$$E_{\text{соб.г}} = 0,203 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1473^4 = 5,42 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ. $E_{\text{соб.г}} = 5,42 \text{ кВт/м}^2$.

Задача 2. Камера в форме куба со стороной b заполнена серым газом. Коэффициент поглощения газа равен α . Величина $\tau_0 = \alpha b = 0,1$. Найдите поглощательную способность газа A_r .

Решение. В нашем случае $A = a/b - 1$; $H = h/b - 1$. При этих значениях A , H и $\tau_0 = 0,1$ из табл. 18.1 находим $\psi_{AB} = 0,1788$, а из табл. 18.2 — $\psi_{AC} = 0,1894$. Обозначим через F_1 площадь поверхности основания камеры

Из (18.14) следует, что

$$\begin{aligned} A(F_1, V) &= 1 - \sum_{k=1}^6 \psi_{1k} = 1 - (\psi_{AB} + 4\psi_{AC}) = \\ &= 1 - (0,1788 + 4 \cdot 0,1894) = 0,0636. \end{aligned}$$

Так как $F_1 = F_2 = \dots = F_6$, то средняя поглощательная способность газа $A_r = A(F_1, V)$, т.е. $A_r = 0,0636$.

Рассчитаем поглощательную способность среды по методу эффективной длины луча (обозначим ее через A'_r):

$$A'_r = 1 - e^{-\alpha l'_{\text{эф}}} \approx \alpha \frac{4V}{6F_1} = \frac{2}{3} \alpha b = 0,0667.$$

Найдем поправочный коэффициент $m = l_{\text{эф}}/l'_{\text{эф}}$, где $l_{\text{эф}}$ — эффективная длина луча с учетом самопоглощения среды. Так как $A_r = 1 - e^{-\alpha l_{\text{эф}}} \approx \alpha l_{\text{эф}} = 0,0667m$ и $A_r = 0,0636$, то $m = 0,95$.

Ответ. Поглощательная способность $A'_r = 0,0667$.

Задача 3. Температуры нижнего и верхнего оснований камеры в задаче 2 равны: $T_1 = 770,6 \text{ К}$; $T_2 = 852,9 \text{ К}$. Боковая поверхность камеры поддерживается при температуре $T_3 = 969,1 \text{ К}$. Стены камеры абсолютно черные. Температура газов $T_r = 1275 \text{ К}$. Найдите сумму потоков результирующего излучения для стен камеры, считая $b - 1 \text{ м}$.

Решение. По закону Стефана Больцмана находим: $E_{01} = 20 \text{ кВт/м}^2$; $E_{02} = 30 \text{ кВт/м}^2$; $E_{03} = 50 \text{ кВт/м}^2$; $E_{0r} = 150 \text{ кВт/м}^2$. Используя формулу (18.18), получаем

$$E_{\text{нал1}} = 30 \cdot 0,1788 + 50 \cdot 4 \cdot 0,1894 + 0,0636 \cdot 150 = 52,784 \text{ кВт/м}^2.$$

Тогда $E_{\text{рез1}} = 52,784 - 20 = 32,784 \text{ кВт/м}^2$. Аналогично находим $E_{\text{рез2}} = 20,996 \text{ кВт/м}^2$. Для определения $E_{\text{нал3}}$ необходимо найти ψ_{33} . Из (18.14) получаем $\psi_{33} = 1 - 0,0636 - 2 \cdot 0,1894 = 0,5576$.

Тогда

$$E_{\text{нал3}} = 20 \cdot 0,1894 + 30 \cdot 0,1894 + 50 \cdot 0,5576 + 0,0636 \cdot 150 = 46,890 \text{ кВт/м}^2.$$

$$E_{\text{рез3}} = 46,890 - 50 = -3,11 \text{ кВт/м}^2.$$

Сумма потоков результирующего излучения

$$\sum_{i=1}^6 Q_{\text{рез}i} = E_{\text{рез}1} b^2 + E_{\text{рез}2} b^2 + 4E_{\text{рез}3} b^2 =$$

$$= 32,784 + 20,996 - 4 \cdot 3,11 = 41,34 \text{ кВт.}$$

Ответ. Сумма потоков результирующего излучения равна 41,34 кВт.

Глава девятнадцатая

ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ, ИЗЛУЧАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

19.1. Уравнение переноса энергии излучения и его решение

Для изучения процесса переноса энергии излучения используется понятие вектора плотности потока излучения $\mathbf{q}_R$ (см. § 16.2). Задача о теплообмене излучением считается решенной, если для заданной системы, заполненной излучающей, поглощающей и рассеивающей средой, найдено поле вектора $\mathbf{q}_R$. Если поглощательная способность среды не зависит от частоты ν , то такая среда называется *серой*. На практике чаще встречаются случаи теплообмена излучением, когда излучающую среду серой считать нельзя. В первую очередь это относится к излучению газообразных продуктов сгорания (см. § 18.1). Для определения спектральных характеристик излучения реальных газов и твердых частиц применяются различные модели [3, 4, 29, 42].

Интегральное значение вектора $\mathbf{q}_R$ в данной точке M определяется так:

$$\mathbf{q}_R(M) = \int_0^{\infty} \mathbf{q}_{R\nu}(M, \nu) d\nu, \quad (19.1)$$

где вектор $\mathbf{q}_{R\nu}(M)$ относится к узкому интервалу частот $(\nu, \nu + d\nu)$;

$$\mathbf{q}_{R\nu}(M) = \int_{\omega=4\pi} I_{\nu}(M, s, \nu) \mathbf{r}_1 d\omega. \quad (19.1a)$$

В (19.1a) $I_{\nu}(M, s)$ — спектральная интенсивность излучения в точке M в направлении s , а $\mathbf{r}_1$ — единичный вектор (направлен вдоль луча s). Зная I_{ν} как функцию частоты ν , координат точки M и направления s , по (19.1) можно найти $\mathbf{q}_R(M)$. Чтобы найти выражение для спектральной интенсивности излучения, предварительно составляют уравнение переноса энергии излучения, а затем находят решение этого уравнения.

Свойства среды, в которой осуществляется процесс переноса энергии излучения, описываются коэффициентами излучения, поглощения и рассеяния.

В излучающей среде выделим элементарный объем dV внутри которого находится точка P (рис. 19.1). Обозначим через dQ_{ν} монохроматический

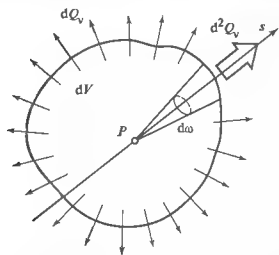


Рис. 19.1. К определению коэффициента поглощения среды

Коэффициент поглощения α_v — это доля падающего в данном направлении излучения, поглощенная элементарным слоем среды ds , деленная на толщину ds :

$$\alpha_v = -\frac{dI_v}{I_v ds}. \quad (19.2)$$

Коэффициент поглощения α_v входит в качестве коэффициента пропорциональности в дифференциальную форму закона Бутера (см. § 18.1).

В общем случае ослабление интенсивности излучения происходит не только за счет поглощения, но и за счет рассеяния энергии в различных направлениях. Суммарный эффект учитывается коэффициентом ослабления $k_v = \alpha_v + \beta_v$, где β_v — коэффициент рассеяния.

Теория и опыт показывают, что интенсивность рассеянного излучения зависит от направления. Функция распределения рассеянного по различным направлениям излучения называется *индикатрисой рассеяния*: $\gamma_v(P, s, s')$, где s — выбранное направление луча (условно назовем этот луч «своим»); s' — направление «чужого» луча (рис. 19.2), проходящего через точку P . Если рассеянное излучение равномерно распределяется по всевозможным направлениям (изотропное рассеяние), то его доля в направлении s' равна $d\omega'/(4\pi)$, а при анизотропном рассеянии она составляет $\gamma_v(P, s, s')d\omega'/(4\pi)$. Вид индикатрисы рассеяния зависит от отношения диаметра частицы к длине волны излучения. Для частиц, диаметр которых $d \ll \lambda$, интенсивности рассеяния вперед по лучу и назад одинаковы и в 2 раза выше, чем в перпендикулярном направлении (закон рассеяния Релея). Индикатриса релеевского рассеяния приведена на рис. 19.3. Если же $d \gg \lambda$, то вследствие дифракции рассеяние вперед значительно превышает рассеяние назад и индикатриса рассеяния вытянута по направлению луча.

поток собственного излучения среды, выходящий из объема dV . Часть этого потока d^2Q_v в пределах элементарного телесного угла $d\omega$ распространяется в направлении s . Коэффициентом излучения ϵ_v называется величина, имеющая вид

$$\epsilon_v = \frac{d^2Q_v}{dV d\omega}.$$

Обычно коэффициент ϵ_v не зависит от направления s , а зависит от частоты ν и является функцией точки: $\epsilon_v = \epsilon_v(\nu, P)$.

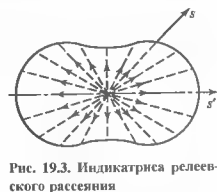
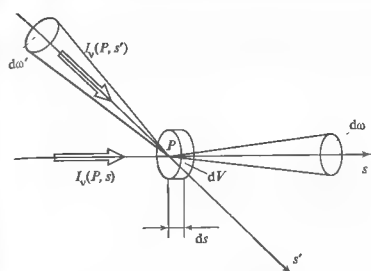


Рис. 19.3. Индикатриса релеевского рассеяния

Рис. 19.2. К определению индикатрисы рассеяния

Изменение интенсивности излучения происходит как за счет ее уменьшения вследствие поглощения и рассеяния, так и за счет увеличения вследствие собственного излучения среды и рассеяния энергии «чужих» лучей в данном направлении s . Составляя уравнение баланса энергии для элементарного слоя dV (рис. 19.2), получаем следующее уравнение переноса энергии излучения:

$$\frac{dI_v(P, s)}{ds} = -k_v(P)I_v(P, s) + \epsilon_v(P) + \frac{\beta_v(P)}{4\pi} \int_{\omega'=4\pi} \gamma_v(P, s, s')I_v(P, s')d\omega'. \quad (19.3)$$

Рассмотрим случай термодинамического равновесия в излучающей системе, при котором $I_v(P, s) = I_{v0} = \text{const}$. Из (19.3) получаем

$$\frac{\epsilon_v}{\alpha_v} = I_{v0} = f(\nu, T). \quad (19.4)$$

Функция I_{v0} описывается законом Планка. Соотношение (19.4) представляет собой закон Кирхгофа для объемного излучения. На основании гипотезы о локальном термодинамическом равновесии закон Кирхгофа распространяется на неравновесное тепловое излучение, т.е. предполагает, что $\epsilon_v(P) - \alpha_v(P)I_{v0}(P)$.

При этом уравнение переноса энергии излучения в поглощающей, излучающей и анизотропно рассеивающей среде будет иметь вид

$$\frac{dI_v(P, s)}{ds} = -k_v(P)I_v(P, s) + \alpha_v(P)I_{v0}(P) + \frac{\beta_v(P)}{4\pi} \int_{\omega'=4\pi} \gamma_v(P, s, s')I_v(P, s')d\omega'. \quad (19.5)$$

Так как искомая функция входит в производную, а также находится в подынтегральном выражении, уравнение (19.5) — интегродифференциальное. При отсутствии рассеяния $\beta_V(P) = 0$ и (19.5) будет дифференциальным уравнением:

$$\frac{dI_V(P, s)}{ds} + \alpha_V(P)I_V(P, s) = \alpha_V(P)I_{V0}(P). \quad (19.6)$$

Далее для простоты полагаем: $\alpha_V(P) = \text{const}$; $\beta_V(P) = \text{const}$ ($k_V = \text{const}$; $\gamma_V(P, s, s') = 1$ (изотропное рассеяние)).

Обозначим:

$$G_V(P) = \int_{\omega'=4\pi} I_V(P, s') d\omega';$$

$$J_V(P) = \alpha_V(P)I_{V0}(P) + \frac{\beta_V}{4\pi}G_V(P).$$

Уравнение (19.5) запишется в виде

$$\frac{dI_V(P, s)}{ds} + k_V I_V(P, s) = J_V(P). \quad (19.7)$$

Будем считать, что $J_V(P)$ — известная функция точки P . Тогда (19.7) — дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого можно получить с помощью интегрирующего множителя $\mu = e^{k_V r_s}$, где r_s — координата точки P (рис. 19.4). Умножая левую и правую части (19.7) на μ , получаем

$$\frac{d[I_V(P, s)e^{-k_V r_s}]}{ds} = J_V(P)e^{k_V r_s}$$

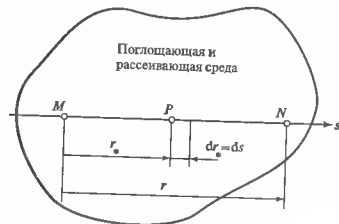


Рис. 19.4. К выводу формулы (19.8)

Последнее равенство проинтегрируем на отрезке $[0; r]$. При $r = 0$ $I(P, s) = I(M, s)$, а при текущем значении r $I(P, s) = I(N, s)$. В результате интегрирования получаем решение уравнения (19.7) в виде

$$I_V(N, s) = I_V(M, s)e^{-k_V r} + \int_0^r J_V(P)e^{-k_V(r-s)} ds. \quad (19.8)$$

Как видно из (19.8), интенсивность излучения в точке N зависит от интенсивности излучения, выходящего из точки M , и процесса ослабления последнего излучения (за счет поглощения и рассеяния) слоем среды толщиной r (фактор ослабления учитывается множителем $e^{-k_V r}$). Второе слагаемое характеризует приток энергии в точку N вследствие собственного и рассеянного излучения точками P , находящимися между точками M и N . Множитель $e^{-k_V(r-s)}$ учитывает тот факт, что собственное и рассеянное в направлении s излучение точки P ослабляется слоем среды толщиной $r-s$. При анализе уравнения (19.8) мы условно считали, что излучает и рассеивает точка, а не элементарный (но конечный) объем среды.

19.2. Интенсивность и плотность потока излучения в плоском слое среды

Пусть имеется слой однородной среды, заключенной между двумя безграничными пластинами (рис. 19.5). Допустим, что среда изотропно рассеивает излучение, ее температура изменяется только вдоль координаты z , а коэффициенты α_V и β_V постоянны (не зависят от z). Посмотрим, как бу-

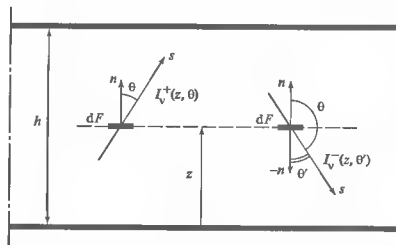


Рис. 19.5. К постановке задачи о переносе энергии излучения в плоском слое

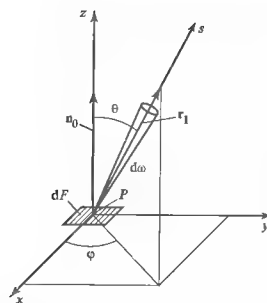


Рис. 19.6. Координаты, определяющие направление луча s

дуг выглядят уравнения (19.8) и (19.1а) в данном случае.

Произвольная точка P в слое среды характеризуется координатами x, y, z , а направление луча s , проходящего через эту точку, — углами θ и φ (рис. 19.6). Таким образом, $I_V(P, s) = I_V(x, y, z, \theta, \varphi)$. Из постановки задачи следует, что $\partial I_V / \partial x = 0$; $\partial I_V / \partial y = 0$; $\partial I_V / \partial \varphi = 0$. Следовательно, в нашем случае $I_V(P, s) = I_V(z, \theta)$.

Обозначим через $I_V^+(z, \theta)$ интенсивность излучения при $0 \leq \theta \leq \pi/2$, а через $I_V^-(z, \theta')$ интенсивность излучения при $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ (см. рис. 19.5). Проекция вектора q_{RV} на ось Oz (см. § 16.2) имеет вид

$$q_{RV}(z) = \int_{\omega=2\pi} I_V^+(z, \theta) \cos \theta \, d\omega - \int_{\omega=2\pi} I_V^-(z, \theta') \cos \theta' \, d\omega =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_V^+(z, \theta) \sin \theta \cos \theta \, d\theta - \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} I_V^-(z, \theta') \sin \theta' \cos \theta' \, d\theta'.$$

Обозначим $\mu = \cos \theta - \cos \theta'$. С учетом того, что $\sin \theta \, d\theta = -d\mu$, для q_{RV} получим

$$q_{RV}(z) = 2\pi \int_0^1 I_V^+(z, \mu) \, d\mu - 2\pi \int_0^1 I_V^-(z, \mu) \, d\mu. \quad (19.9)$$

Введем оптическую координату $\tau_v = k_v z$ и оптическую толщину слоя $\tau_{v0} = k_v h$. Тогда вместо (19.9) можно записать

$$q_{RV}(\tau_v) = 2\pi \int_0^1 I_V^+(\tau_v, \mu) \, d\mu - 2\pi \int_0^1 I_V^-(\tau_v, \mu) \, d\mu. \quad (19.9a)$$

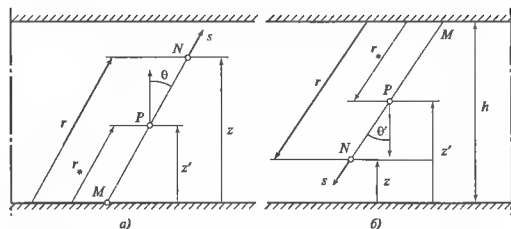


Рис. 19.7. К выводу формул (19.10) и (19.11)

Используя (19.8), получаем выражения для $I_V^+(\tau_v, \mu)$ и $I_V^-(\tau_v, \mu)$. Так как (рис. 19.7, а) $k_v r = k_v z / \cos \theta = \tau_v / \mu$; $k_v(r - r_s) = k_v(z - z') / \cos \theta = (\tau_v - \tau_v') / \mu$; $I_V(M, s) = I_V(0, \mu)$, то

$$I_V^+(\tau_v, \mu) = I_V^+(0, \mu) e^{-\tau_v / \mu} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_v} S_V(t_v) e^{-(\tau_v - t_v) / \mu} \frac{dt_v}{\mu}, \quad (19.10)$$

где $t_v = k_v z'$;

$$S_V(t_v) = \frac{1}{k_v} \left[\alpha_v E_{v0}(t_v) + \frac{\beta_v}{4} G_v(t_v) \right]. \quad (19.10a)$$

Из рассмотрения рис. 19.7, б можно заключить, что для лучей, направленных в сторону нижней границы слоя,

$$k_v r = (\tau_{v0} - \tau_v) / \mu; \quad k_v(r - r_s) = (t_v - \tau_v) / \mu; \quad I_V(M, s) = I_V(\tau_{v0}, \mu).$$

Тогда

$$I_V^-(\tau_v, \mu) = I_V^-(\tau_{v0}, \mu) e^{-(\tau_{v0} - \tau_v) / \mu} + \frac{1}{\pi} \int_{\tau_v}^{\tau_{v0}} S_V(t_v) e^{-(t_v - \tau_v) / \mu} \frac{dt_v}{\mu}. \quad (19.11)$$

Далее примем, что граничные поверхности слоя излучают и отражают энергию в соответствии с законом Ламберта. Тогда

$$I_V^+(0, \mu) = E_{v\text{эф}}(0) / \pi; \quad I_V^-(\tau_{v0}, \mu) = E_{v\text{эф}}(\tau_{v0}) / \pi.$$

Выражения (19.10) и (19.11) подставим в (19.9а) и выполним преобразования. В результате получим

$$q_{Rv}(\tau_v) = 2E_{v\phi}(0)E_3(\tau_v) - 2E_{v\phi}(\tau_{v0})E_3(\tau_{v0} - \tau_v) + \\ + 2 \int_0^{\tau_v} S_v(t_v)E_2(\tau_v - t_v) dt_v - 2 \int_{\tau_v}^{\tau_{v0}} S_v(t_v)E_2(t_v - \tau_v) dt_v. \quad (19.12)$$

В (19.12) введены интегралэкспоненциальные функции:

$$E_2(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} d\mu;$$

$$E_3(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} \mu d\mu.$$

Значения функции $E_3(x)$ приведены в табл. 19.1.

Общее выражение для интегралэкспоненциальной функции $E_n(x)$ имеет вид:

$$E_n(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} \mu^{n-2} d\mu.$$

Значение функции $E_n(x)$ при $x = 0$ можно определить по формуле

$$E_n(0) = \int_0^1 \mu^{n-2} d\mu = \frac{1}{n-1}.$$

Дифференцируя $E_n(x)$ по параметру x , при $n > 1$ получаем

$$E'_n(x) = -E_{n-1}(x).$$

Для $E_2(x)$ и $E_3(x)$ справедливы следующие разложения:

$$E_2(x) = 1 + (\gamma - 1 + \ln x)x - \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \dots \quad (19.13)$$

$$E_3(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \ln x \right) x^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 3!} + \dots \quad (19.14)$$

Таблица 19.1. Значения интегралэкспоненциальной функции $E_3(x)$

x	$E_3(x)$	x	$E_3(x)$
0	0,5000	0,60	0,1916
0,01	0,4903	0,70	0,1661
0,02	0,4810	0,80	0,1443
0,03	0,4720	0,90	0,1257
0,04	0,4633	1,00	0,1097
0,05	0,4549	1,25	0,0786
0,06	0,4468	1,50	0,0567
0,07	0,4388	1,75	0,0412
0,08	0,4311	2,00	0,0301
0,09	0,4236	2,25	0,0221
0,10	0,4163	2,50	0,0163
0,20	0,3519	2,75	0,0120
0,30	0,3000	3,00	0,0089
0,40	0,2573	3,25	0,0066
0,50	0,2216	3,50	0,049

В приведенных формулах постоянная Эйлера $\gamma = 0,5772$.

Если среда не рассеивает излучение ($\beta_v = 0$), то $S_v(t_v) = E_{v0}(t_v) = E_{v0}(v, T)$, где T — температура в точке с оптической координатой t_v . Для рассеивающей среды необходимо знать функцию $G_v(t_v)$, называемую пространственной плотностью падающего излучения. Она находится в результате решения интегрального уравнения:

$$G_v(t_v) - \frac{\beta_v}{2k_v} \int_0^{\tau_{v0}} G_v(\xi_v) E_1(|t_v - \xi_v|) d\xi_v = 2\pi \int_0^1 I_v^+(0, \mu') e^{-t_v/\mu'} d\mu' +$$

$$+ 2\pi \int_0^1 I_v^-(\tau_{v0}, \mu') e^{-(\tau_{v0} - t_v)/\mu'} d\mu' + \frac{2\alpha_v}{k_v} \int_0^{\tau_{v0}} E_{v0}(\xi_v) E_1(|t_v - \xi_v|) d\xi_v. \quad (19.15)$$

Уравнение (19.15) получим после того, как функцию $G_V(t_V)$ представим в виде

$$G_V(t_V) = 2\pi \int_0^{\tau_V} I_V^+(t_V, \mu') d\mu' + 2\pi \int_0^{\tau_V} I_V^-(t_V, \mu') d\mu',$$

учтем (19.10), (19.11) и выполним преобразования.

При решении задач сложного теплообмена (см. § 19.4) требуется знать производную $dq_{RV}/d\tau_V$. Ее можно получить из (19.12) с использованием теоремы о дифференцировании интеграла по параметру, когда пределы интегрирования сами зависят от параметра. Окончательное выражение имеет вид

$$-\frac{dq_{RV}}{d\tau_V} = 2E_{V\Phi}(0)E_2(\tau_V) + 2E_{V\Phi}(\tau_{V0})E_2(\tau_{V0} - \tau_V) + \\ + 2 \int_0^{\tau_{V0}} S_V(t_V)E_1(|\tau_V - t_V|) dt_V - 4S_V(\tau_V). \quad (19.16)$$

Для серой среды формулы (19.10)–(19.12), а также интегральное уравнение (19.15) упрощаются. Для абсолютно черных граничных поверхностей слоя среды $E_{V\Phi}(0) = E_{V0}(0)$; $E_{V\Phi}(\tau_{V0}) = E_{V0}(\tau_{V0})$, где E_{V0} определяется по закону Планка при температуре границы слоя.

Предположим, что горизонтальный слой среды ограничен серыми, диффузно излучающими и диффузно отражающими стенками, температуры которых равны T_1 (нижняя стенка) и T_2 (верхняя стенка). Поглощательные способности стенок A_1 и A_2 , а плотности потока эффективного излучения $E_{\Phi 1}$ и $E_{\Phi 2}$. В этом случае, используя (19.12), нетрудно получить уравнения для определения $E_{\Phi 1}$ и $E_{\Phi 2}$:

$$E_{\Phi 1} = A_1 E_{01} + 2R_1 \left[E_{\Phi 2} E_3(\tau_0) + \int_0^{\tau_0} S(t) E_2(t) dt \right]; \quad (19.17)$$

$$E_{\Phi 2} = A_2 E_{02} + 2R_2 \left[E_{\Phi 1} E_3(\tau_0) + \int_0^{\tau_0} S(t) E_2(\tau_0 - t) dt \right]. \quad (19.17a)$$

В приведенных уравнениях $E_{01} = \sigma_0 T_1^4$; $E_{02} = \sigma_0 T_2^4$; $R_1 = 1 - A_1$ и $R_2 = 1 - A_2$. После того, как будут найдены $E_{\Phi 1}$ и $E_{\Phi 2}$, можно будет определить $E_{\text{ре}1}$ и $E_{\text{ре}2}$.

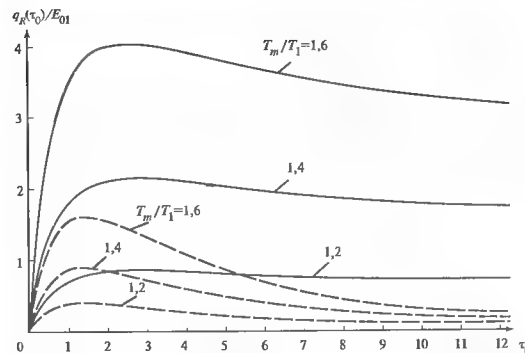


Рис. 19.8. Зависимость плотности потока результирующего излучения на граничной поверхности слоя от оптической толщины слоя при различных значениях T_m/T_1
— распределение температуры в слое по закону (19.18); - - - то же по закону (19.19)

В качестве примера применения изложенной теории рассмотрим слой серой среды с абсолютно черными граничными поверхностями. Температуры стенок $T_1 = T_2$, а температуру среды $T = T(\tau)$ зададим в виде одного из двух уравнений:

$$\frac{T(\tau)}{T_1} = 1 + \left(\frac{T_m}{T_1} - 1 \right) \left[1 - \left| 1 - \frac{2\tau}{\tau_0} \right| \right]^{1/8}; \quad (19.18)$$

$$\frac{T(\tau)}{T_1} = 1 + \left(\frac{T_m}{T_1} - 1 \right) \left[1 - \left[1 - \frac{2\tau}{\tau_0} \right]^{1.5} \right]^{1.6}, \quad (19.19)$$

где T_m — температура среды при $\tau = \tau_0/2$.

Температурная кривая, описываемая формулой (19.18), справедлива в том случае, когда среда интенсивно перемешивается (например, при турбулентном течении в канале), а кривая (19.19) соответствует распределению температуры в топках некоторых паровых котлов. Если в первом случае температура в основной массе слоя изменяется незначительно, а лишь в пристенной зоне резко, то во втором случае существенно неоднородное распределение температуры наблюдается во всем слое.

Влияние оптической толщины слоя на $q_R(\tau_0)$ иллюстрирует рис. 19.8. Обращает на себя внимание тот факт, что при распределении температуры в слое по закону (19.19) с повышением τ_0 увеличение количества переносимой к стенкам теплоты наблюдается лишь при $\tau_0 < 1.5$, а при больших значениях τ_0 значение $q_R(\tau_0) \rightarrow 0$. Другими словами, в последнем случае в пределе $\tau_0 \rightarrow \infty$ (практически $\tau_0 > 100$) наблюдается эффект «запирания» излучения.

19.3. Оптически тонкий и оптически толстый слон

Слой среды называется *оптически тонким*, если $\tau_{v0} \ll 1$. В этом случае длина «свободного пробега» фотона $l_{v\phi} = 1/k_v$ много больше толщины слоя h и каждый элемент среды непосредственно взаимодействует с граничными поверхностями слоя (самопоглощение в среде пренебрежимо мало).

При $\tau_{v0} \ll 1$ формулы (19.12) и (19.16) упрощаются и приобретают вид:

$$q_{RV} = E_{v\phi}^{(1)} - E_{v\phi}^{(2)}; \quad (19.20)$$

$$-\frac{dq_{RV}}{d\tau_v} = \frac{2\alpha_v}{k_v} [E_{v\phi}^{(1)} + E_{v\phi}^{(2)} - 2E_{v0}(\tau_v)]. \quad (19.21)$$

В (19.20) и (19.21) $E_{v\phi}^{(1)} = E_{v\phi}(0)$, а $E_{v\phi}^{(2)} = E_{v\phi}(\tau_{v0})$. Из формул (19.17) и (19.17а), записанных для спектральных величин, следует, что

$$E_{v\phi}^{(1)} = \frac{A_{v1}E_{v0}^{(1)} + R_{v1}A_{v2}E_{v0}^{(2)}}{1 - R_{v1}R_{v2}};$$

$$E_{v\phi}^{(2)} = \frac{A_{v2}E_{v0}^{(2)} + R_{v2}A_{v1}E_{v0}^{(1)}}{1 - R_{v1}R_{v2}},$$

где $E_{v0}^{(1)}$ и $E_{v0}^{(2)}$ — спектральные плотности потока излучения абсолютно черного тела при $T = T_1$ и $T = T_2$ соответственно. Величины $E_{v\phi}^{(1)}$ и $E_{v\phi}^{(2)}$ имеют такой же вид, как и в случае прозрачной среды.

Уравнение (19.21) можно представить в виде

$$-\frac{dq_{RV}}{dz} = 2\alpha_v [E_{v\phi}^{(1)} + E_{v\phi}^{(2)} - 2E_{v0}(z)], \quad (19.21a)$$

отсюда следует, что в случае оптически тонкого слоя перенос энергии излучения от одних элементов среды к другим не зависит от коэффициента рассеяния и, следовательно, отпадает необходимость решения интегрального уравнения (19.15).

Слой среды называют *оптически толстым*, если $\tau_{v0} \gg 1$. В этом случае $l_{v\phi} \ll h$ и каждый элемент среды взаимодействует только с соседними элементами. Перенос энергии излучения осуществляется подобно процессу теплопроводности.

Функцию $S_v(t_v)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $t_v = \tau_v$:

$$S_v(t_v) = S_v(\tau_v) + \frac{dS_v}{d\tau_v}(t_v - \tau_v) + \frac{1}{2} \frac{d^2S_v}{d\tau_v^2}(t_v - \tau_v)^2 + \dots$$

и в таком виде подставим в (19.12). Введем обозначения: $z_v = \tau_v - t_v$; $z'_v = t_v - \tau_v$. Учитывая, что при $\tau_{v0} \rightarrow \infty$, $\tau_v \rightarrow \infty$ $E_3(\tau_v) = 0$, $E_3(\tau_{v0} - \tau_v) = 0$, в результате преобразования (19.12) получаем

$$q_{RV}(\tau_v) = -4 \frac{dS_v}{d\tau_v} \int_0^\infty z_v E_2(z_v) dz_v = -\frac{4}{3} \frac{dS_v}{d\tau_v}. \quad (19.22)$$

Преобразовывая интегральное уравнение (19.13), находим, что

$$G_v(\tau_v) = 4S_v(\tau_v) \int_0^\infty E_1(z) dz = 4S_v(\tau_v).$$

Из (19.10а) следует, что при этом $S_v(\tau_v) = E_{v0}$ и

$$q_{RV}(\tau_v) = -\frac{4}{3} \frac{dE_{v0}(\tau_v)}{d\tau_v} = -\frac{4}{3k_v} \frac{dE_{v0}(y)}{dy}. \quad (19.23)$$

Формула (19.23) аналогична закону Фурье. Для серой среды

$$q_R = -\frac{4}{3k} \frac{d(\sigma_0 T^4)}{dy} = -\frac{16}{3} \frac{\sigma_0 T^3}{k} \frac{dT}{dy} = -\lambda_R \frac{dT}{dy},$$

где радиационная теплопроводность

$$\lambda_R = \frac{16}{3} \frac{\sigma_0 T^3}{k}. \quad (19.24)$$

В случае оптически тонкого слоя, ограниченного абсолютно черными стенками, при условии, что коэффициент поглощения α_v не зависит от температуры, из (19.21а) следует соотношение

$$-\frac{dq_R}{dz} = 2\sigma_0 \alpha_P(T) [T_1^4 + T_2^4 - 2T^4(z)],$$

где планковский коэффициент поглощения

$$\alpha_p(T) = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_v E_{v0}(T) dv}{E_0(T)}.$$

Для оптически толстого слоя, используя (19.23), можно получить

$$q_R = -\frac{4}{3k_R} \frac{dE_0}{dy},$$

где α_R — коэффициент ослабления

$$\frac{1}{k_R} = \int_0^{\infty} \frac{1}{k_v} \frac{dE_{v0}}{E_0} dv = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{k_v} \frac{dE_{v0}}{dy} dv}{dE_0/dy}.$$

Для серой нерассеивающей среды $\alpha_p = \alpha_R$ (α_R — коэффициент поглощения, определяемый по последней формуле, в которой $k_R = \alpha_R$).

19.4. Сложный тепломассообмен

Сложным теплообменом часто называют радиационно-кондуктивный или радиационно-конвективный теплообмен. В первом случае в неподвижной среде осуществляется совместный перенос теплоты излучением и теплопроводностью, а во втором (в движущейся среде) — излучением, теплопроводностью и конвекцией. Если перенос теплоты излучением, теплопроводностью и конвекцией сопровождается переносом массы вещества (диффузией), то такой процесс тепломассопереноса называют *сложным тепломассообменом*.

Процесс сложного тепломассообмена описывается системой уравнений, в число которых входит уравнение энергии. Это уравнение можно получить, если учесть, что в любой точке сплошной излучающей среды наряду с вектором теплопроводности q , который по закону Фурье определяется как $q = -\lambda \text{grad} T$, существует еще вектор излучения q_R . Подводимое к элементу среды объемом ΔV за время Δt количество теплоты равно $-\text{div} q \Delta V \Delta t$, где $q = q + q_R$. Уравнение энергии при отсутствии переноса теплоты излучением было выведено выше (см. § 14.5). Заменяя в этом

уравнении вектор q на вектор q_R , получаем уравнение энергии для процесса сложного тепломассообмена:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) - \text{div} \sum_{i=1}^n j_i h_i + \frac{dp}{dt} + \varepsilon - \text{div} q_R. \quad (19.25)$$

Обозначения величин в (19.25) те же, что были введены выше (см. § 14.5).

Кроме уравнения (19.25), в математическое описание сложного тепломассообмена входят уравнения движения, неразрывности и диффузии. Дополнительно задаются начальные и граничные условия, уравнение состояния смеси компонентов, зависимость энтальпии компонентов от температуры. Кроме того, для среды должны быть известны коэффициенты поглощения и рассеяния, а для стенок канала, в котором движется среда, — поглощательная способность. Если в состав смеси входят n компонентов, то неизвестными функциями будут: концентрации компонентов (с учетом уравнения неразрывности их число равно $n-1$); скорости v_x, v_y, v_z ; плотность ρ ; давление p ; энтальпия h и температура T . Задача усложняется, если течение среды турбулентное. Как видно, сложный тепломассообмен описывается сложной системой уравнений. Если массоперенос отсутствует, в правой части (19.25) следует отбросить второе слагаемое, а при малых скоростях движения газа — третье и четвертое слагаемые.

Важно отметить, что в общем случае процессы переноса энергии излучением и теплопроводностью взаимосвязаны. Это объясняется тем, что для нахождения векторного поля q_R необходимо знать температуру во всех точках изучаемого пространства. Но величина $\text{div} q_R$ входит в уравнение энергии, и, следовательно, от нее зависит температурное поле в среде и векторное поле $\text{grad} T$, т.е. величина q .

При течении излучающей среды в длинных каналах часто можно пренебречь переносом энергии излучения в продольном направлении. Тогда для плоского канала $\text{div} q_{RV} = dq_{RV}/dz$. значение этой величины может быть рассчитано по (19.16). При этом зависимость $q_{RV}(z)$ можно найти по (19.12).

При течении газа в круглой трубе с радиусом r_0 в случае, когда радиационный перенос энергии в аксиальном направлении пренебрежимо мал, а рассеяние энергии отсутствует, коэффициент α_v не зависит от координат, значения $q_{RV}(r)$ и $\text{div} q_{RV}$ могут быть рассчитаны по формулам Хислета—Уорминга:

$$q_{Rv}(\tau_v) = -4\tau_{v0}E_{v0}^{(1)} \int_1^{\infty} \frac{K_1(\tau_{v0}y)I_1(\tau_v y)}{y^2} dy + 4 \int_0^{\tau_v} E_{v0}(t_v)I_v dt_v \int_1^{\infty} \frac{K_1(\tau_v y)I_0(t_v y)}{y} dy -$$

$$- 4 \int_0^{\tau_v} E_{v0}(t_v)I_v dt_v \int_1^{\infty} \frac{K_0(t_v y)I_1(\tau_v y)}{y} dy; \quad (19.26)$$

$$\frac{1}{\tau_v} \frac{d(\tau_v q_{Rv})}{d\tau_v} = 4\tau_{v0}E_{v0}^{(1)} \int_0^{\infty} \frac{K_1(\tau_v y)I_0(\tau_v y)}{y} dy +$$

$$+ 4 \int_0^{\tau_{v0}} K(\tau_v, t_v) E_{v0}(t_v) I_v dt_v - 4E_{v0}(\tau_v), \quad (19.27)$$

$$\text{где } K(\tau_v, t_v) = \begin{cases} \int_1^{\infty} K_0(\tau_v y) I_0(t_v y) dy & \text{при } t_v < \tau_v; \\ \int_1^{\infty} K_0(t_v y) I_0(\tau_v y) dy & \text{при } \tau_v < t_v. \end{cases}$$

В формулах (19.26) и (19.27) $\tau_v = \alpha_v r'$, $t_v = \alpha_v r$ (r и r' — текущие радиусы); $\tau_{v0} = \alpha_v r_0$; $E_{v0}^{(1)}$, $E_{v0}(t_v)$ и $E_{v0}(\tau_v)$ — спектральные плотности потока излучения абсолютно черного тела соответственно при температуре стенки трубы и температурах в точках с координатами r' и r ; $K_0(x)$, $K_1(x)$, $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — функции Бесселя. Предполагается, что стенки трубы абсолютно черные.

Простые решения задач радиационно-кондуктивного теплообмена могут быть получены в случаях оптически тонкого и оптически толстого слоев.

В первом случае, как было доказано выше (см. § 19.3), перенос энергии излучения от одной стенки к другой не зависит от распределения температуры в серой среде и

$$q_R = \frac{\sigma_0(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}.$$

Кроме того, в стационарном процессе теплообмена $dq_{\Sigma}/dz = 0$, откуда с учетом закона Фурье следует, что

$$q_{\Sigma} = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{h} + q_R,$$

где h — толщина слоя; T_1 и T_2 — температуры граничных поверхностей.

Видно, что общий тепловой поток является суммой независимых друг от друга потоков вследствие теплопроводности и излучения. Если же имеет место радиационно-конвективный теплообмен в плоском канале, то $dq_{\Sigma}/dz \neq 0$ и закон аддитивности тепловых потоков в случае оптически тонкого слоя не выполняется.

Для оптически толстого слоя можно записать

$$q_R = -\frac{16\sigma_0 T^3}{3k} \frac{dT}{dy}.$$

Тогда имеем

$$q_{\Sigma} = -\left(\lambda + \frac{16\sigma_0 T^3}{3k}\right) \frac{dT}{dy}.$$

В плоском слое $q_{\Sigma} = \text{const}$. В последнем уравнении разделим переменные, а затем проинтегрируем его. В результате получим

$$q_{\Sigma} = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{h} + \frac{4\sigma_0}{3kh}(T_1^4 - T_2^4).$$

Таким образом, в двух рассмотренных частных случаях два различных процесса переноса энергии не зависят друг от друга.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТАХ

20.1. Основное назначение теплообменных аппаратов

Во многих отраслях промышленности используются устройства, в которых осуществляется теплообмен между двумя или несколькими теплоносителями или между теплоносителями и твердыми телами (стенкой, насадкой). Такие устройства называются *теплообменными аппаратами*.

Устройства, в которых осуществляется процесс массообмена (т.е. имеет место взаимное проникновение веществ), называются *массообменными аппаратами*. В *тепломассообменных аппаратах* процессы массо- и теплообмена протекают одновременно.

По своему назначению теплообменные и тепломассообменные аппараты разнообразны и часто имеют специальные названия (подогреватель, испаритель и др.). На ТЭС и АЭС одним из теплообменных аппаратов является подогреватель питательной воды. В нем требуется подогреть воду от T_2' до T_2'' . Вода нагревается паром, отбираемым от турбины. Температура перегретого пара на входе равна T_1' , а на выходе — T_1'' .

Как видно из $T-Q$ -диаграммы (рис. 20.1, а), в подогревателе происходит охлаждение пара до температуры насыщения (при этом к воде подводится тепловой поток Q_1), его конденсация (под-

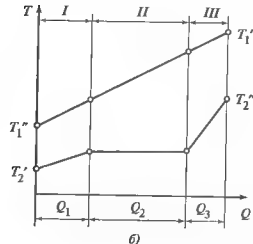
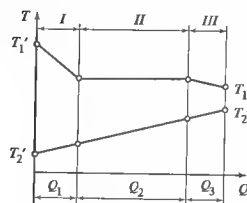


Рис. 20.1. $T-Q$ -диаграмма

а — для подогревателя питательной воды; I — зона охлаждения пара, II — то же конденсация пара, III — то же охлаждение конденсата; б — для испарителя; I — экономизаторный участок; II — участок кипения воды; III — то же перегрева пара

водится Q_2) и охлаждение конденсата (подводится Q_3). Подогреватель выполняется из труб, собранных в герметичном корпусе (кожухе).

На рис. 20.1, б изображена $T-Q$ -диаграмма теплообменного аппарата, предназначенного для получения перегретого пара с помощью высоконагретого теплоносителя (например, жидкого металла). Как и в предыдущем случае, на диаграмме имеются три участка: подогрева воды, ее испарения и перегрева пара. Соответствующие тепловые потоки, подводимые к воде, равны Q_1 , Q_2 и Q_3 .

Как в первом, так и во втором рассмотренном случае требуется определить площадь поверхности теплообмена F (при заданном диаметре труб требуется найти их число и длину). Для расчета F необходимы данные о термических сопротивлениях переносу теплоты. При этом для нахождения коэффициентов теплоотдачи используется теория теплообмена, изложенная в предыдущих главах книги.

Тепловой расчет теплообменного аппарата, целью которого является определение площади F , называется *конструкторским*. Допустим, что имеется готовый теплообменный аппарат (например, серийно выпускаемый заводом), требуется узнать, будет в нем обеспечен подогрев или охлаждение теплоносителя до заданной температуры. Тепловой расчет, выполняемый для решения указанной задачи, называется *поверочным*. Его целью является нахождение конечных температур теплоносителей, а также температуры поверхности при заданных начальных температурах теплоносителей. Массовые расходы теплоносителей в любом типе расчета считаются заданными величинами.

От значения площади поверхности тепло- и массообмена зависят значения потоков теплоты и массы вещества. Поэтому в технологических установках часто используется метод распыления жидкости (ее дробление на мелкие капли) и применяются тепломассообменные аппараты с псевдоожженным («кипящим») слоем твердых частиц. В последнем случае скорость газа, подаваемого в нижнюю часть слоя частиц, подбирается таким образом, чтобы частицы не были неподвижными и в то же время не уносились из слоя потоком газа. Частицы, находящиеся во взвешенном состоянии, интенсивно перемешиваются с газом, что обеспечивает высокую интенсивность процессов тепло- и массопереноса.

Следует отметить, что тепломассообменные аппараты отличаются разнообразием и их можно классифицировать по различным признакам. Подробное изложение конструкций и принципов действия тепломассообменных аппаратов входит в программу специальных, изучаемых студентами курсов. Применительно к тепловым электрическим станциям конструктивные характеристики и другие вопросы, связанные с работой теплообменных аппаратов, подробно излагаются в учебном пособии [27]. Сведения о тепломассообменных аппаратах можно получить из [38, 45].

Теплообменные аппараты подразделяются на: рекуперативные, регенеративные и смешивающего типа. Несмотря на особенности, присущие теплообменным и теплоемкообменным аппаратам, они работают таким образом, что в любом случае для них выполняются законы сохранения энергии, массы вещества и количества движения. Эти законы необходимо учитывать в любых тепловых и гидромеханических расчетах аппаратов.

20.2. Рекуперативные теплообменники

Рассмотренные в § 20.1 теплообменные аппараты относятся к рекуперативным (рекуператорам). Передача теплоты от одного теплоносителя к другому в них происходит через разделяющую стенку (например, стенку трубы). Возможны различные схемы движения теплоносителей: прямоточная (теплоносители движутся вдоль поверхности нагрева в одном направлении); противоточная (теплоносители движутся в противоположных направлениях); сложная (например, перекрестный ток).

На рис. 20.2 схематично показан конденсатор паровой турбины. В нем осуществляется процесс фазового перехода, в котором температура остается постоянной, а охлаждающая вода имеет два хода (один ход слева направо, в второй — в противоположном направлении). Наличие нескольких ходов позволяет сократить габаритные размеры аппарата.

На рис. 20.3 приведена схема аппарата с U-образными трубами. Схема движения теплоносителей в нем близка к противоточной.

Теплообменным аппаратом со сложной схемой потоков теплоносителей является кожухотрубный теплообменник с перегородками в межтрубном пространстве (рис. 20.4).

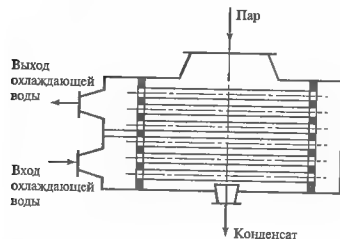


Рис. 20.2. Конденсатор паровой турбины

→
Рис. 20.3. Теплообменный аппарат с U-образными трубами

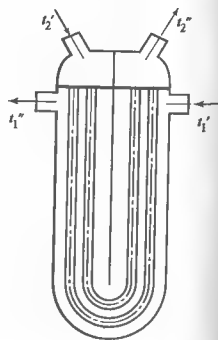


Рис. 20.4. Кожухотрубный теплообменник с перегородками в межтрубном пространстве

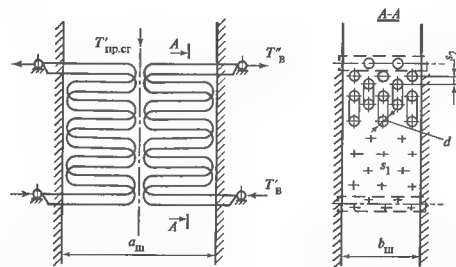
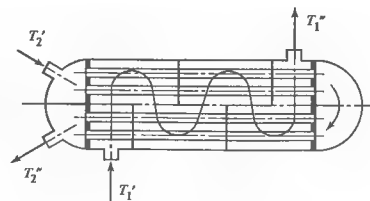


Рис. 20.5. Водяной экономайзер парового котла

$\sigma_{ш}$, $b_{ш}$ — размеры конвективной шахты; s_1 , s_2 — продольный и поперечный шаги шахматного пучка труб

Водяной экономайзер (его схема приведена на рис. 20.5) не имеет отдельного корпуса. Он расположен в конвективной шахте парогенератора. В экономайзере подогрев питательной воды осуществляется продуктами сгорания (дымовыми газами). Схема движения близка к перекрестному току. Трубы экономайзера могут располагаться как в коридорном, так и шахматном порядке (на рис. 20.5 трубы расположены в шахматном порядке).

В данном теплообменнике значение теплового потока зависит от разности температур теплоносителей и коэффициента теплопередачи. Как известно, коэффициент теплопередачи — величина, обратная сумме термических сопротивлений. Наибольшее из всех термических сопротивлений определяет интенсивность процесса теплопередачи. Поскольку при течении воды в трубах коэффициенты теплоотдачи велики ($\alpha > 10^3$ Вт/(м²·К)), а при омывании газом трубных пучков $\alpha \approx 10^2$ Вт/(м²·К), то основное термическое сопротивление находится на газовой стороне экономайзера. Габарит-

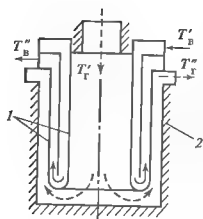


Рис. 20.6. Радиационный рекуператор
1 — поверхность нагрева; 2 — огнеупорная кладка

ные размеры экономайзера можно уменьшить, заменив гладкие трубы на ребренные.

Наряду с оребрением для интенсификации процесса теплопередачи в рекуператорах используются различные методы, о которых будет сказано ниже (см. гл. 21).

На рис. 20.6 схематично показан рекуператор, использующийся для регенерации теплоты отходящих газов высокотемпературной технологической установки. В нем можно подогреть воду от $T'_{\text{в}}$ до $T''_{\text{в}}$. Особенностью этого аппарата является то, что поверхностью нагрева служит не стенка трубы (что чаще всего встречается в теплообменниках), а обечайка, также то, что перенос теплоты от газов к обечайке осуществляется преимущественно за счет излучения.

20.3. Регенеративные теплообменные аппараты

На рис. 20.7 показан воздухоподогреватель вращающегося типа (воздухоподогреватель Юнгстрема). В данном случае теплота передается с помощью набивки, выполненной из тонких металлических листов. В тот период времени, когда набивка находится на стороне горячих газов, она нагревается и аккумулирует теплоту, которая затем передается воздуху. Вращающийся воздухоподогреватель служит примером теплообменника *регенеративного типа*.

В другом случае теплоносители протекают в одном и том же канале, но попеременно. Когда через аппарат протекает горячий теплоноситель, он омывает неподвижную насадку, аккумулирующую теплоту. Период нагревания насадки сменяется периодом ее охлаждения, когда она омывается холодным теплоносителем. В регенеративном подогревателе имеет место нестационарный процесс теплопередачи.

В качестве насадочной поверхности часто используется кирпичная кладка (рис. 20.8, а—в). В течение первого цикла работы аппарата поверхность кирпичной кладки омывается высокотемпературным потоком продуктов сгорания, а в течение второго цикла — холодным воздухом или другими компонентами горения, использующимися в технологических установках.

Насадка не обязательно должна быть неподвижной. Пример подвижной насадки рассмотрен выше. Насадку, выполненную в виде шаров, можно перемещать из одной области в другую. В последнем случае для увеличения теплоаккумулирующей способности насадки ее можно изготовить в виде гранул (рис. 20.8, г) с ядром из плавящегося материала. При омывании гранул горячими газами от потока отбирается дополнительное коли-

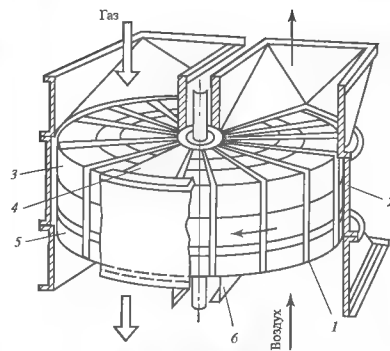
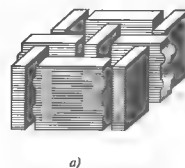


Рис. 20.7. Регенеративный вращающийся воздухоподогреватель

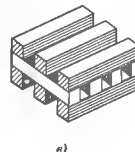
1 — ротор, 2 — кожух; 3 — пакеты «горячей» набивки; 4 — секторная плита радиального уплотнения; 5 — пакеты «холодной» набивки; 6 — опорная балка



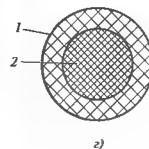
а)



б)



в)



г)

Рис. 20.8. Различные насадки в регенеративных теплообменных аппаратах
а — кирпичные насадки; б — гранулы; в — оболочка; 2 — ядро

чество теплоты, равное скрытой теплоте плавления ядра. При перемещении гранул в область холодного теплоносителя происходит процесс затвердевания ядра с выделением теплоты плавления.

20.4. Аппараты смешивающего типа

В смесительных аппаратах осуществляется непосредственный контакт двух или более веществ, находящихся в жидком или газообразном состоянии.

На ТЭС и АЭС применяются подогреватели смешивающего типа, в которых подогрев питательной воды происходит вследствие ее смешения

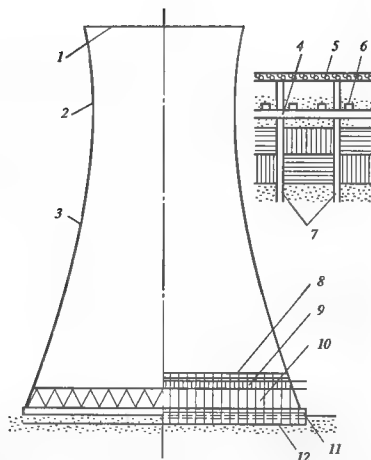


Рис. 20.9. Градири с естественной тягой и прямым контактом воды и воздуха

1 — выход воздуха; 2 — горловина; 3 — вытяжная башня; 4 — водораспределительные трубы; 5, 6 — водоотделитель; 7 — разбрызгиватель; 8 — опорные колонны; 9 — насадка; 10 — вход воздуха; 11 — бортик водосборного бассейна, 12 — водосборный бассейн

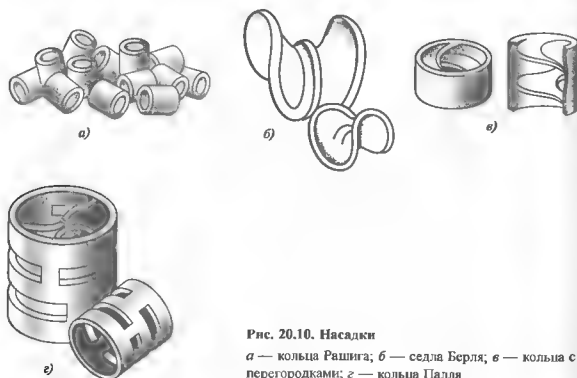


Рис. 20.10. Насадки

а — кольца Рашига; б — седла Берля; в — кольца с перегородками; г — кольца Палля

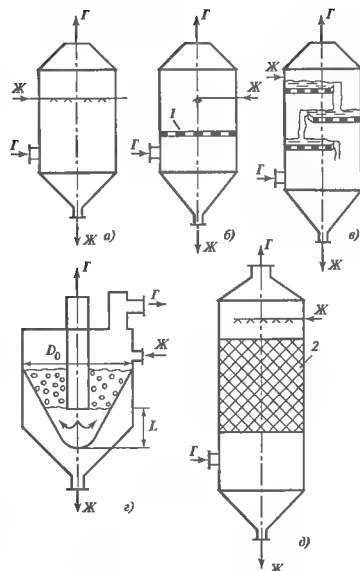


Рис. 20.11. Газожидкостные смесительные теплообменники

а — полый форсунный; б — пенный; в — барботажный тарельчатый каскадного типа; г — водоподогреватель с погружным трубчатым барботером; д — насадочный; Г — газ; Ж — жидкость; 1 — решетка (тарелка); 2 — насадка

с паром, отобранном от турбины (обычно пар отбирается от цилиндра низкого давления турбины). Ввиду отсутствия твердой поверхности теплообмена стоимость подогревателя смешивающего типа меньше, чем подогревателя поверхностного типа. Кроме того, из-за отсутствия разности температур теплообменивающихся сред на выходе рассматриваемые подогреватели имеют меньшие энтропийные потери, поэтому они более экономичны.

Смесительным аппаратом является градири (рис. 20.9), в которой вода, циркулирующая по трубам конденсатора паровой турбины, охлаждается атмосферным воздухом.

Для эффективной работы смесительного аппарата важное значение имеет площадь соприкосновения рабочих сред, для увеличения которой

часто используются различные насадки в виде колец или другой формы (рис. 20.10). Жидкость стекает вниз по поверхности насадки, а газ в противоположном направлении движется вверх. Газожидкостные смесительные аппараты (скрубберы) применяются как для охлаждения или нагревания газов (или воды), так и для очистки их от вредных примесей. Различные типы смесительных аппаратов приведены на рис. 20.11.

Отличительной особенностью смесительных аппаратов является то, что в них часто осуществляются совместные процессы тепло- и массообмена. Например, в градирне происходит процесс испарения воды в паровоздушную среду, в скруббере вредные примеси, содержащиеся в газе, диффундируют в слой жидкости и т.д.

Глава двадцать первая

РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

21.1. Уравнение теплового баланса. Уравнения баланса массы

Далее будем рассматривать аппараты с двумя теплоносителями. Нижние индексы «1» и «2» будут характеризовать параметры соответственно горячего и холодного теплоносителей. Верхний индекс «один штрих» будет соответствовать условиям на входе, а «два штриха» — на выходе.

Рассматривая контрольный объем, граничная поверхность которого совпадает с граничной поверхностью теплообменного аппарата, на основании первого закона термодинамики можно записать:

$$G_1(h_1'' - h_1') + G_2(h_2'' - h_2') = 0; \quad (21.1)$$

$$G_1(h_1' - h_1'') = G_2(h_2'' - h_2'), \quad (21.1a)$$

где G_1 и G_2 — массовые расходы теплоносителей, кг/с; h — удельная энтальпия кДж/кг.

Уравнение (21.1a) представляет собой уравнение теплового баланса. Оно справедливо в случае стационарного режима работы аппарата и в том случае, если можно пренебречь потерями теплоты в окружающую среду и изменением кинетической энергии теплоносителей.

Количество теплоты, передаваемое в единицу времени через поверхность теплообмена от горячего теплоносителя к холодному (тепловая мощность аппарата), равно изменению энтальпии теплоносителей, т.е.

$$Q = G_1(h_1' - h_1''); \quad (21.2)$$

$$Q = G_2(h_2'' - h_2'). \quad (21.2a)$$

Если $c_{p1} = \text{const}$ и $c_{p2} = \text{const}$, то вместо (21.2) и (21.2a) будем иметь¹

$$Q = G_1 c_{p1} (T_1' - T_1''); \quad (21.3)$$

$$Q = G_2 c_{p2} (T_2'' - T_2'). \quad (21.3a)$$

Для удобства будем обозначать: $C_1 = G_1 c_{p1}$; $C_2 = G_2 c_{p2}$. Величины C_1 и C_2 иногда называют водяными эквивалентами. В приведенных уравнениях

¹ При использовании (21.3) и (21.3a) для решения задач температура может быть выражена в градусах Цельсия, так как разности температур, измеренные в кельвинах и градусах Цельсия, совпадают.

ях h — средняя массовая энтальпия; T — средняя массовая температура (см. § 8.3).

Если в аппарате происходит массообмен между теплоносителями, то, согласно закону сохранения массы,

$$G'_1 + G'_2 = G''_1 + G''_2. \quad (21.4)$$

Соотношение (21.4) является уравнением баланса массы теплоносителей. Оно справедливо и в том случае, если в аппарате происходят химические реакции. Следует подчеркнуть, что при наличии массообмена $G'_1 \neq G''_1$ и $G'_2 \neq G''_2$, но справедливо равенство

$$G'_1 - G''_1 = G''_2 - G'_2 = \sum_i G_{i1-2}, \quad (21.5)$$

где G_{i1-2} — масса i -го компонента, перешедшая в единицу времени из первого теплоносителя во второй (через межфазную поверхность).

Очевидно, что

$$\sum_i G_{i1-2} = \sum_i G_{i2-1}. \quad (21.5a)$$

Из (21.5) и (21.5a) получаем уравнения баланса массы для первого и второго теплоносителя:

$$G''_1 + \sum_i G_{i1-2} = G'_1; \quad (21.6)$$

$$G'_2 + \sum_i G_{i2-1} = G''_2. \quad (21.6a)$$

Пусть c'_{1i} и c''_{1i} — массовые концентрации i -го компонента в первом теплоносителе соответственно на входе и выходе из аппарата, а c'_{2i} и c''_{2i} — то же, но для второго теплоносителя. Тогда можно записать уравнение баланса массы компонента в виде

$$G'_1 c'_{1i} + G'_2 c'_{2i} = G''_1 c''_{1i} + G''_2 c''_{2i}. \quad (21.7)$$

Соотношение (21.7) справедливо при отсутствии химических реакций. Оно следует из уравнения (14.20).

21.2. Средний температурный напор

На рис. 21.1 показана расчетная схема к выводу формулы усредненного по поверхности температурного напора для *прямотока*.

Выделим на расстоянии F_x элемент поверхности теплообмена dF_x . Запишем для него уравнение теплопередачи

$$dQ = k(T_1 - T_2) dF_x = k \Delta T dF_x \quad (21.8)$$

и уравнение теплового баланса

$$dQ = -G_1 c_{p1} dT_1 = G_2 c_{p2} dT_2, \quad (21.9)$$

где dQ — количество теплоты, передаваемое от горячего теплоносителя холодному в единицу времени через элемент dF_x .

Из (21.9) следует

$$dT_1 = -\frac{dQ}{G_1 c_{p1}} = -\frac{dQ}{C_1},$$

$$dT_2 = \frac{dQ}{G_2 c_{p2}} = \frac{dQ}{C_2}.$$

Тогда изменение температурного напора

$$d(T_1 - T_2) = d(\Delta T) = dT_1 - dT_2 = -\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) dQ = -m dQ, \quad (21.10)$$

где $m = 1/C_1 + 1/C_2$.

Подставляя в (21.10) значение dQ из (21.8), получаем

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -mk dF_x. \quad (21.11)$$

Принимая для упрощения, что вдоль поверхности теплообмена $k = \text{const}$, $m = \text{const}$ и интегрируя (21.11), получаем

$$\begin{aligned} \Delta T' &= \frac{F_x}{\Delta T'} \\ \int \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} &= -mk \int dF_x \\ \ln \frac{\Delta T'}{\Delta T} &= -mkF_x, \end{aligned} \quad (21.11a)$$

или

$$\Delta T = \Delta T' e^{-mkF_x}. \quad (21.12)$$

Из (21.12) видно, что вдоль поверхности теплообмена F_x температурный напор уменьшается по экспоненциальному закону.

Усредненный температурный напор

$$\bar{\Delta T} = \frac{1}{F} \int \Delta T dF = \frac{\Delta T'}{F} \int_0^F e^{-mkF_x} dF_x = \frac{\Delta T'}{-mkF} (e^{-mkF} - 1). \quad (21.13)$$

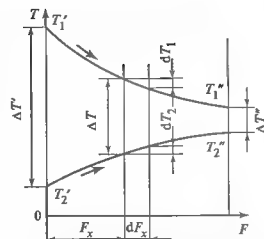


Рис. 21.1. Изменение разности температур теплоносителей вдоль поверхности теплообмена

При подстановке в (21.13) $m k F$ и $e^{-m k F}$ из (21.11а) и (21.12) получим

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T'' - \Delta T'}{\ln(\Delta T'' / \Delta T')} = \frac{\Delta T' - \Delta T''}{\ln(\Delta T' / \Delta T'')}, \quad (21.14)$$

или

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T'_1 - T'_2) - (T''_1 - T''_2)}{\ln \frac{T'_1 - T'_2}{T''_1 - T''_2}}, \quad (21.14a)$$

где $\overline{\Delta T}$ — среднелогарифмический температурный напор.

Для противотока уравнение (21.10) примет вид

$$d(T_1 - T_2) = d(\Delta T) = dT_1 - dT_2 = -\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) dQ = -m dQ,$$

где $m = 1/C_1 - 1/C_2$.

При этом формула (21.12) сохраняет свой вид, а для среднелогарифмического температурного напора будем иметь

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T'_1 - T'_2) - (T''_1 - T''_2)}{\ln \frac{T'_1 - T'_2}{T''_1 - T''_2}}. \quad (21.15)$$

Если $C_1 = C_2$, то в случае противотока $m = 0$ и из (21.12) следует, что $\Delta T = \Delta T'$, т.е. средний температурный напор постоянен вдоль поверхности теплообмена:

$$\Delta T = \Delta T' = T'_1 - T''_2 = T''_1 - T'_2.$$

Формулы (21.14а) и (21.15) можно свести в одну формулу, если независимо от направления движения теплоносителя в конца теплообменника через ΔT_6 обозначить большую разность температур, а через ΔT_m — меньшую.

Тогда

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T_6 - \Delta T_m}{\ln(\Delta T_6 / \Delta T_m)}.$$

В ряде случаев температуры теплоносителей вдоль поверхности нагрева изменяются незначительно. Тогда средний температурный напор можно вычислить как среднеарифметическое от ΔT_6 и ΔT_m :

$$\overline{\Delta T} = \frac{1}{2}(\Delta T_6 + \Delta T_m) = \frac{\Delta T_6}{2} \left(1 + \frac{\Delta T_m}{\Delta T_6}\right).$$

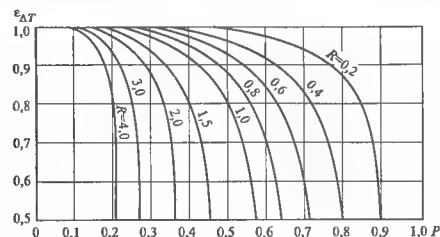


Рис. 21.2. К определению $\epsilon_{\Delta T}$

Среднеарифметический температурный напор больше среднелогарифмического. Однако при $\Delta T_m / \Delta T_6 > 0,6$ они отличаются меньше чем на 3 %, что допустимо в приближенных технических расчетах.

Для сложных схем температурный напор можно выразить как среднелогарифмический температурный напор для противотока $\overline{\Delta T}_{\text{прот}}$, соответствующий наиболее эффективному теплопереносу, умноженному на поправочный коэффициент $\epsilon_{\Delta T}$, являющийся функцией параметров R и P , т.е.

$$\overline{\Delta T} = \epsilon_{\Delta T} \overline{\Delta T}_{\text{прот}} = \epsilon_{\Delta T} \frac{\Delta T_6 - \Delta T_m}{\ln(\Delta T_6 / \Delta T_m)},$$

где $\epsilon_{\Delta T} = f(P, R)$; здесь

$$P = \frac{\delta T_2}{\Delta T_6} = \frac{T'_2 - T'_2}{T'_1 - T'_2},$$

$$R = \frac{\delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{T'_1 - T''_1}{T'_2 - T'_2}.$$

Аналитические выражения $\epsilon_{\Delta T} = f(P, R)$ для разных схем движения теплоносителей довольно сложные. Поэтому на практике для нахождения $\epsilon_{\Delta T}$ пользуются графиками $\epsilon_{\Delta T} = f(P, R)$, при этом R берется в качестве параметра. На рис. 21.2 изображен график определения $\epsilon_{\Delta T}$ для теплообменника, показанного на рис. 20.4.

Для определения значения $\overline{\Delta T}$ при сложном движении теплоносителей используется метод, основанный на понятиях эффективности или КПД теплообменника ϵ ,

числа единиц переноса N и отношения меньшего значения водяного эквивалента C_m к большему C_6 ($\omega = C_m/C_6$). Согласно этому методу,

$$\overline{\Delta T} = \epsilon \overline{\Delta T}_{\text{прот.}}$$

КПД теплообменника представляет собой отношение фактически переданного количества энергии к предельному, соответствующему полиому использованию располагаемого температурного напора $\Delta T_p = T'_1 - T'_2$, которое может иметь место лишь в теплообменнике с бесконечно большой поверхностью теплообмена:

$$\epsilon = \frac{C_1(T'_1 - T''_1)}{C_2(T'_1 - T'_2)} = \frac{C_1(T'_2 - T'_2)}{C_2(T'_1 - T'_2)}.$$

Число единиц переноса определяется соотношением

$$N = \frac{1}{C_m} \int k dF = \frac{\bar{k}F}{C_m}. \quad (21.16)$$

Между ϵ и N существует взаимосвязь, форма которой определяется характером относительного движения теплоносителей.

Нетрудно доказать следующие соотношения:

$$\frac{T'_1 - T'_2}{T'_1 - T'_2} = e^{-\left(\frac{\bar{k}F}{C_1}\right)\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)}. \quad (21.17)$$

Предположим, что $C_m = C_1$ и $C_6 = C_2$, тогда левую часть уравнения перепишем в виде

$$\frac{T'_m - T'_6}{T'_m - T'_6}.$$

Для числителя и знаменателя этого выражения справедливы тождества

$$T'_m - T'_6 = T'_m - T'_6 - (T'_m - T'_6),$$

$$T'_m - T'_6 = T'_m - T'_6 - (T'_6 - T'_6).$$

Последнее соотношение на основании теплового баланса представим в виде

$$T'_m - T'_6 = T'_m - T'_6 - \frac{C_m}{C_6}(T'_m - T'_m).$$

Тогда левая часть (21.17) перепишется в виде

$$\frac{T'_m - T'_6}{T'_m - T'_6} = \frac{1 - \left(\frac{T'_m - T'_m}{T'_m - T'_6}\right)}{1 - \frac{C_m}{C_6} \left(\frac{T'_m - T'_m}{T'_m - T'_6}\right)}.$$

Выражения, стоящие в правой части, представляют собой эффективность ϵ , определенную при условии, что $C_m = C_1$. Тогда уравнение (21.17) можно преобразовать к виду

$$\frac{1 - \epsilon}{1 - \frac{C_m}{C_6}\epsilon} = e^{-N\left(1 - \frac{C_m}{C_6}\right)},$$

или

$$\frac{1 - \epsilon}{1 - \omega\epsilon} = e^{-N(1 - \omega)}, \quad (21.18)$$

где $N = \frac{\bar{k}F}{C_m} = \frac{\bar{k}F}{C_1}$ по (21.16), так как $C_m = C_1$ и $\omega = C_m/C_6$.

Решая (21.18) относительно ϵ , имеем

$$\epsilon = \frac{1 - e^{-N(1 - \omega)}}{1 - \omega e^{-N(1 - \omega)}}. \quad (21.19)$$

Для случая, когда $C_m = C_2$, получается такой же результат.

Из анализа зависимости ϵ от N для противоточного теплообменника следует, что для всех ω значение $\epsilon \rightarrow 1$ в области высоких значений N . При $N = \text{const}$ ϵ тем выше, чем меньше ω . Значение $\omega = 0$ соответствует случаю, когда один из теплоносителей имеет постоянную температуру (кипение или конденсация одного из теплоносителей, либо при $C_{6(\text{водян})} \gg C_{m(\text{газ})}$). Тогда

$$\epsilon = 1 - e^{-N}. \quad (21.20)$$

В случае, когда $C_{\text{газ}} \approx C_{\text{вод}}$ (теплообменники газотурбинных установок), $\omega = 1$ и

$$\epsilon = \frac{N}{1 + N}. \quad (21.21)$$

Для прямоточных теплообменников формулы (21.19)–(21.21) соответственно принимают вид:

$$\epsilon = 1 - \frac{e^{-N(1 + \omega)}}{1 + \omega};$$

$$\epsilon = 1 - e^{-N};$$

$$\epsilon = \frac{1 - e^{-2N}}{2}.$$

Обобщенная характеристика для любых схем движения теплоносителей имеет вид

$$\epsilon_2 = \frac{1 - e^{\{-N_2[1 + \omega_2(1 - 2f_\phi)]\}}}{1 + \omega_2(1 - f_\phi) - \omega_2 f_\phi e^{\{-N_2[1 + \omega_2(1 - 2f_\phi)]\}}},$$

где $\epsilon_2 = \frac{\delta T_2}{\Delta T_m}$; $\omega_2 = \frac{C_2}{C_1}$; $N_2 = \frac{\bar{k}F}{C_2}$; f_ϕ — характеристика схемы тока ($0 \leq \phi \leq 1$).

Для прямотока $\phi = 0$, для противотока $\phi = 1$.

21.3. Уравнение теплопередачи

Для элемента поверхности теплообмена площадью dF_x уравнение теплопередачи имеет вид

$$dQ = k\Delta T dF_x,$$

где k — коэффициент теплопередачи; ΔT — местный температурный напор.

Тепловая мощность теплообменника

$$Q = \int_0^F k\Delta T dF_x. \quad (21.22)$$

Коэффициент теплопередачи в случае плоской стенки представляет собой величину, обратную сумме термических сопротивлений:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (21.23)$$

Как коэффициент теплопередачи, так и температурный напор изменяются вдоль поверхности теплообмена. В простейшем случае (при относительно малом изменении k) можно принять $k \approx \text{const}$.

Тогда из (21.22) получаем *уравнение теплопередачи*:

$$Q = k\bar{\Delta T}F, \quad (21.24)$$

где $\bar{\Delta T}$ — средний интегральный температурный напор;

$$\bar{\Delta T} = \frac{1}{F} \int_0^F \Delta T dF_x.$$

Формулы для вычисления $\bar{\Delta T}$ получены в § 21.2. В случае прямо- или противоточной схемы движения теплоносителей

$$\bar{\Delta T} = \frac{\Delta T_6 - \Delta T_m}{\ln \frac{\Delta T_6}{\Delta T_m}}. \quad (21.25)$$

Если коэффициент теплопередачи сильно изменяется вдоль поверхности теплообмена и к тому же зависит от разности температур ΔT , уравнение (21.24) теряет смысл. В ряде случаев значение k существенно зависит от температуры стенки. Тогда для расчета площади поверхности теплообмена необходимо использовать поинтервальный метод расчета (т.е. разбивать всю искомую поверхность на достаточно большое число участков) или прибегать к методу «шаг за шагом» (см. § 12.7).

Уравнение (21.22) можно также представить в виде

$$Q = \bar{k}\Delta T F, \quad (21.26)$$

где $\bar{k}\Delta T$ — среднее интегральное значение произведения $k\Delta T$.

Из (21.26) видно, что от значения коэффициента теплопередачи существенно зависит площадь поверхности теплообмена. Чем больше k , тем (при одном и том же среднем температурном напоре) меньше F . Уменьшая термические сопротивления процессу теплопередачи, можно уменьшить F , т.е. сократить габаритные размеры теплообменника. Поскольку с увеличением скорости течения теплоносителя коэффициент теплоотдачи возрастает, уменьшение площади проходного сечения теплообменника (при заданном расходе) способствует увеличению значения k . Однако всегда надо иметь в виду, что с увеличением скорости возрастает (причем более резко) гидравлическое сопротивление и увеличиваются затраты мощности на прокачку теплоносителя (см. § 21.5). Увеличить коэффициент теплоотдачи можно искусственным путем с помощью *методов интенсификации* [12], используя специально изготовленные трубы с шероховатостью или иной поверхностью, применяя закрутку потока и т.п. Задач, связанные с интенсификацией теплопередачи и выбором оптимальной скорости течения теплоносителя в теплообменном аппарате, решаются путем анализа результатов технико-экономических расчетов.

21.4. Поверочный расчет теплообменного аппарата.

Сравнение прямого и противотока

Прямоточная схема движения теплоносителей. Температурный напор на выходе из теплообменника

$$\Delta T'' - \Delta T' e^{-mkF}.$$

Имея в виду, что $m = 1/C_1 + 1/C_2$, а $\Delta T' = T_1' - T_2'$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{T_1'' - T_2''}{T_1' - T_2'} = e^{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)kF}$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$1 - \frac{T_1'' - T_2''}{T_1' - T_2'} = 1 - e^{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)kF},$$

$$(T'_1 - T''_1) + (T''_2 - T'_2) = (T'_1 - T'_2) \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)kF} \right).$$

Далее учтем, что

$$T''_2 - T'_2 = (T'_1 - T''_1) \frac{C_1}{C_2}.$$

После простых преобразований получим

$$\delta T_1 = T'_1 - T''_1 = (T'_1 - T'_2) \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}}{1 + C_1/C_2} = (T'_1 - T'_2) \Pi. \quad (21.27)$$

Уравнение (21.27) показывает, что изменение температуры горячего теплоносителя равно некоторой доле Π располагаемого температурного напора $T'_1 - T'_2$. Эта доля зависит от двух безразмерных параметров C_1/C_2 и kF/C_1 :

$$\Pi = f\left(\frac{C_1}{C_2}; \frac{kF}{C_1}\right) = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}}{1 + C_1/C_2}.$$

Для холодного теплоносителя аналогичным образом получаем

$$\delta T_2 = T''_2 - T'_2 = (T'_1 - T'_2) \frac{C_1}{C_2} \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}}{1 + C_1/C_2} = (T'_1 - T'_2) \frac{C_1}{C_2} \Pi. \quad (21.28)$$

Из выражений (21.27) и (21.28) легко определить конечные температуры теплоносителей:

$$T''_1 = T'_1 - (T'_1 - T'_2) \Pi;$$

$$T''_2 = T'_2 + (T'_1 - T'_2) \frac{C_1}{C_2} \Pi.$$

Тепловой поток Q_{Π} , передаваемый через поверхность теплообмена при прямом токе, определяется с учетом (21.27) по формуле

$$Q_{\Pi} = C_1 \delta T_1 = C_1 (T'_1 - T'_2) \Pi. \quad (21.29)$$

Противоточная схема движения теплоносителей. Для противотока расчетные формулы выводятся так же, как и для прямого тока. Они имеют следующий вид:

$$\delta T_1 = T'_1 - T''_1 = (T'_1 - T'_2) \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}}{1 - \left(\frac{C_1}{C_2}\right) e^{-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}} = (T'_1 - T'_2) Z; \quad (21.30)$$

$$\delta T_2 = T''_2 - T'_2 = (T'_1 - T'_2) \frac{C_1}{C_2} \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}}{1 - \left(\frac{C_1}{C_2}\right) e^{-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}} = (T'_1 - T'_2) \frac{C_1}{C_2} Z; \quad (21.30a)$$

$$Q_Z = C_1 \delta T_1 = C_1 (T'_1 - T'_2) Z, \quad (21.30b)$$

$$\text{где } Z = f\left(\frac{C_1}{C_2}; \frac{kF}{C_1}\right) = \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}}{1 - \left(\frac{C_1}{C_2}\right) e^{-\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)\left(\frac{kF}{C_1}\right)}} \text{ — вспомогательная функция}$$

для расчета конечной температуры и количества теплоты при противотоке.

Из выражений (21.30a) и (21.30b) находятся конечные температуры теплоносителей:

$$T''_1 = T'_1 - (T'_1 - T'_2) Z; \quad (21.31)$$

$$T''_2 = T'_2 + (T'_1 - T'_2) \frac{C_1}{C_2} Z. \quad (21.31a)$$

В случае необходимости расчета промежуточных значений температур теплоносителей в приведенные формулы (21.30)–(21.30b) вместо F следует подставлять текущее значение F_x . В частном случае, когда $C_1/C_2 = 1$, т.е. $C_1 = C_2 = C$, эти формулы упрощаются:

$$\delta T_1 = T'_1 - T''_1 = (T'_1 - T'_2) \frac{1}{1 + \frac{C}{kF}};$$

$$\delta T_2 = T_2'' - T_2' = (T_1' - T_2') \frac{1}{1 + \frac{C}{kF}};$$

$$Q_Z = (T_1' - T_2') \frac{C}{1 + \frac{C}{kF}}.$$

Сравнение прямого тока с противотоком. Если разделить количество теплоты, переданное при прямом токе, на количество теплоты, переданное при противотоке при прочих равных условиях, то получим новую безразмерную функцию от C_1/C_2 и kF/C_1 (рис. 21.3), показывающую, какая доля теплоты противотока передается при прямой схеме движения теплоносителей:

$$\frac{Q_{\Pi}}{Q_Z} = \varphi\left(\frac{C_1}{C_2}; \frac{kF}{C_1}\right).$$

Как следует из рис. 21.3, прямые и противоточные схемы могут быть равноценны только при очень больших и очень малых значениях C_1/C_2 ($C_1/C_2 > 10$ и $C_1/C_2 < 0,05$) или очень малых значениях kF/C_1 . Первое условие соответствует случаю, когда изменение температуры одного теплоносителя мало по сравнению с изменением температуры другого. Второе условие равнозначно случаю, когда средний температурный напор значительно превышает изменение температуры теплоносителей, так как

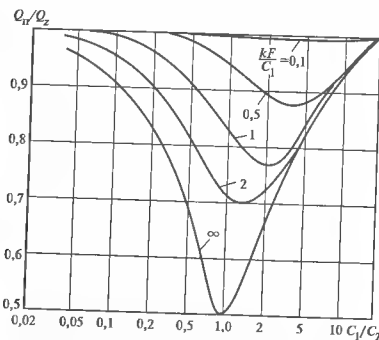


Рис. 21.3. Сравнение прямого тока с противотоком

$kF/C_1 = \delta T_1/\Delta T$ (либо $kF/C_1 = \delta T_2/\Delta T$). Во всех остальных случаях при прочих равных условиях противоток предпочтителен по сравнению с прямотоком. Однако надо иметь в виду, что температурные условия для конструктивных материалов при противотоке более жесткие, чем при прямотоке.

21.5. Гидравлический расчет аппаратов

Целью гидравлического расчета является определение потерь давления при прохождении теплоносителя через теплообменный или теплоемкообменный аппарат. Потери давления в первую очередь обусловлены сопротивлением трения, возникающим из-за вязкости жидкости. Это сопротивление существенно зависит от скорости теплоносителя. В первом приближении можно принять, что при турбулентном течении жидкости в трубе (см. § 8.2) перепад давлений Δp на ее концах пропорционален квадрату скорости. От Δp зависит значение мощности, необходимой для перемещения жидкости, так как

$$N = \frac{G \Delta p}{\rho}, \quad (21.32)$$

где N — мощность, Вт; G — массовый расход жидкости, кг/с; ρ — плотность жидкости, кг/м³; Δp — гидравлическое сопротивление, Па.

Зная значения N и G , можно подобрать насос или вентилятор, который будет обеспечивать прокачку теплоносителя через аппарат. При этом надо учитывать также КПД насоса или вентилятора.

Так как расход G пропорционален скорости, а гидравлическое сопротивление Δp приблизительно скорости в квадрате (для турбулентного режима течения, который наиболее часто встречается на практике), то в первом приближении мощность N пропорциональна скорости в кубе. В связи с этим расчет гидравлического сопротивления и выбор оптимальной скорости теплоносителя имеет большое значение.

Полное гидравлическое сопротивление складывается из трех частей. Первая часть — это сопротивление трения, которое для течения в каналах рассчитывается по формуле

$$\Delta p_T = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2},$$

где ξ — коэффициент сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса (см. § 8.2); l и d — длина и диаметр трубы; v — скорость теплоносителя.

Вторая составляющая потеря давления обусловлена местными сопротивлениями (на входе в трубу или в межтрубное пространство, повороте потока и др.). Она рассчитывается по формуле

$$\Delta p_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2},$$

где ζ — местный коэффициент сопротивления.

Для конкретных условий значения ζ выбираются из таблиц или номограмм, которые имеются в специальной литературе. Для приближенного расчета ζ_m можно воспользоваться следующими данными:

	ζ_m
На входе в трубу из коллектора или барабана.....	0,5
На выходе из трубы в коллектор или барабан.....	1,0
На входе в межтрубное пространство или на выходе из него	1,5
На повороте на 180° в межтрубном пространстве	1,0

При наличии нескольких местных сопротивлений для расчета местных потерь давлений берется сумма всех сопротивлений, т.е. в общем случае

$$\Delta p_m = \sum_{i=1}^n \Delta p_{mi},$$

где Δp_{mi} — конкретное местное сопротивление; n — число местных сопротивлений.

Третья составляющая гидравлических потерь связана с ускорением потока:

$$\Delta p_{\text{уск}} = \rho_{\text{вых}} v_{\text{вых}}^2 - \rho_{\text{вх}} v_{\text{вх}}^2,$$

где индексы «вх» и «вых» соответствуют условиям на входе и выходе из теплообменного аппарата.

Если аппарат сообщается с атмосферой, при расчете Δp следует учитывать гидростатические потери. Для замкнутых систем они равны нулю.

При ламинарном стабилизированном течении в трубе

$$\xi = 0,64 / \text{Re}.$$

При турбулентном стабилизированном течении в технически гладкой трубе

$$\xi = (0,790 \ln(\text{Re}/8))^{-2}.$$

Если высота шероховатости стенки трубы $\delta_{\text{ш}}$ соизмерима с толщиной вязкого подслоя, то оказывается, что гидравлическое сопротивление этой трубы больше, чем гладкой. При этом

$$\xi = 0,11(\delta_{\text{ш}}/d + 68/\text{Re})^{0,25},$$

если $\delta_{\text{ш}}/d > 15/\text{Re}$ и $\text{Re} < 120d/\delta_{\text{ш}}$;

$$\xi = [1,74 + 0,868 \ln(d/(2\delta_{\text{ш}}))]^2,$$

если $\delta_{\text{ш}}/d > 15/\text{Re}$ и $\text{Re} > 120d/\delta_{\text{ш}}$.

При неизоотермическом течении в формулы следует вводить поправку $c_t = (\text{Pr}_c/\text{Pr}_{\text{ж}})^{1/3}$, где Pr_c и $\text{Pr}_{\text{ж}}$ — числа Прандтля при температуре стенок и средней температуре жидкого теплоносителя.

Гидравлическое сопротивление при поперечном обтекании пучка труб

$$\Delta p = \zeta_n \frac{\rho v^2}{2},$$

где v — скорость в узком сечении пучка;

$$\zeta_n = [3,2 + 0,66(1,7 - \varphi)^{1,5}](z + 1)\text{Re}^{-0,27},$$

если $s_1/d \geq 1,44$ и $0,1 \leq \varphi = (s_1 - d)/(s'_2 - d) \leq 1,7$, а расположение труб шахматное;

$$\zeta_n = 2\left(\frac{s_1}{d} - 1\right)^{-0,5} z \text{Re}^{-0,2/\varphi^2},$$

если $s_1 \leq s_2$ и $0,06 \leq \varphi = (s_1 - d)/(s_2 - d) \leq 1$, а расположение труб коридорное;

$$\zeta_n = 0,38\left(\frac{s_1}{d} - 1\right)^{-0,5} (\varphi - 0,94)^{-0,59} z \text{Re}^{-0,2/\varphi^2},$$

если $s_1 > s_2$ и $1 < \varphi = (s_1 - d)/(s_2 - d) \leq 8$, а расположение труб коридорное.

В этих формулах z — число рядов; s_1 — шаг труб в поперечном направлении; s_2 — шаг труб в направлении потока; d — наружный диаметр трубы; $s'_2 = (s_1^2/4 + s_2^2)^{1/2}$ — диагональный шаг труб. Указанные формулы справедливы для газа с постоянными свойствами.

21.6. Тепловой расчет регенеративных теплообменников

Рассмотрим регенеративный теплообменник с неподвижной насадкой из керамических или огнеупорных материалов. Введем следующие обозначения: τ_1 — период нагрева насадки горячим газом; τ_2 — период охлаждения насадки нагреваемым воздухом; $T''_{1н}$, $T''_{2н}$, $T''_{1к}$ и $T''_{2к}$ — температуры горячего и холодного теплоносителей в конце регенератора в начале и конце циклов нагрева и охлаждения; T^M_{c1} и T^M_{c2} — температуры поверхности насадки в начале цикла нагрева и в конце цикла охлаждения; T^6_{c1} — температура поверхности насадки в конце цикла нагрева.

Наиболее точные расчеты регенеративных теплообменников можно провести с помощью уравнений конвективного и радиационного теплообмена (для потока газа) и уравнения теплопроводности в насадке. Такие расчеты сложны; выполнить их можно только численными методами с применением компьютеров.

В приближенных инженерных расчетах используют уравнение теплового баланса, которое записывают в виде

$$Q = G_1 c_{p1} (T'_1 - \bar{T}''_1) \tau_1 \eta = G_2 c_{p2} (\bar{T}''_2 - T'_2) \tau_2,$$

где Q — тепловая нагрузка, т.е. количество теплоты, передаваемое газом воздуху за цикл; $\bar{T}''_1$ и $\bar{T}''_2$ — средние во времени значения температур газа и нагреваемого воздуха на выходе из регенератора; причем

$$\bar{T}''_1 = T'_1 - \frac{T''_{1к} - T''_{1н}}{\ln \frac{T'_1 - T''_{1н}}{T'_1 - T''_{1к}}};$$

$$\bar{T}''_2 = \frac{T''_{2н} - T''_{2к}}{\ln \frac{T''_{2н} - 273}{T''_{2к} - 273}}.$$

Для расчета площади поверхности насадки F используется уравнение теплопередачи:

$$Q = k F \Delta T,$$

где средний температурный напор за цикл (время цикла $\tau_{ц} = \tau_1 + \tau_2$) имеет вид

$$\Delta T = \frac{(T'_1 - \bar{T}''_2) - (\bar{T}''_1 - T'_2)}{\ln \frac{T'_1 - \bar{T}''_2}{\bar{T}''_1 - T'_2}}.$$

Средний коэффициент теплопередачи рассчитывают по формуле

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2} + R},$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты теплоотдачи соответственно для газа и воздуха; R — термическое сопротивление насадки.

При расчете α_1 следует учитывать радиационный перенос теплоты от газов к насадке. Формулы для расчета α_1 и α_2 и R приводятся в литературе (см. [38]).

21.7. Задачи с решениями

Задача 1. Выполните тепловой расчет и определите площадь поверхности теплообмена противоточного водо-водяного теплообменника (см. рис. 20.3) для охлаждения потока горячей воды от $t'_1 = 80^\circ\text{C}$ до $t''_1 = 60^\circ\text{C}$ с расходом $G_1 = 2$ кг/с. Температура охлаждающей воды на входе в теплообменный аппарат $t'_2 = 10^\circ\text{C}$, ее расход $G_2 = 0,75$ кг/с. Известно, что $\alpha_1 = 2000$ Вт/(м² · К), $\alpha_2 = 4000$ Вт/(м² · К), $\delta_{ст}/\lambda_{ст} = 2 \cdot 10^{-3}/100$.

Решение. Тепловой расчет теплообменного аппарата и определение площади поверхности теплообмена проводится по уравнению теплопередачи (21.24), из которого следует

$$F = \frac{Q}{k \Delta T} = \frac{Q}{k \bar{\Delta T}},$$

т.е. решение поставленной задачи заключается в последовательном определении Q , k , $\bar{\Delta T}$ (рис. 21.4).

Из уравнений (21.1а), (21.3) и (21.3а) следует

$$Q = G_1 c_{p1} (t'_1 - t''_1) = G_2 c_{p2} (t''_2 - t'_2).$$

Подставляя исходные данные, получаем

$$Q = G_1 c_{p1} (t'_1 - t''_1) = 2 \cdot 4187 (80 - 60) = 167\,480 \text{ Вт}.$$

Среднелогарифмическую разность температур между теплоносителями определяем по формуле (21.25):

$$\bar{\Delta T} = \frac{\Delta t_6 - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_6}{\Delta t_m}} = \frac{(t'_1 - t'_2) - (t''_1 - t''_2)}{\ln \frac{(t'_1 - t'_2)}{(t''_1 - t''_2)}}.$$

При этом неизвестную температуру t''_2 найдем из уравнения (21.3а):

$$t''_2 = t'_2 + \frac{Q}{G_2 c_{p2}} = 10 + \frac{167\,480}{0,75 \cdot 4191} = 63,3^\circ\text{C},$$

после чего получим

$$\bar{\Delta T} = \frac{(60 - 10) - (80 - 63,3)}{\ln \frac{(60 - 10)}{(80 - 63,3)}} = 30,4^\circ\text{C}.$$

Рассчитаем коэффициент теплопередачи по формуле (21.23):

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2000} + \frac{0,002}{100} + \frac{1}{4000}} =$$

$$= 1299 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

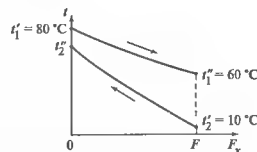


Рис. 21.4. К задаче 1

Определим площадь поверхности теплообмена:

$$F = \frac{Q}{k\Delta t} = \frac{167\,480}{1299 \cdot 30,4} = 4,24 \text{ м}^2.$$

Чтобы выполнить проверку, пересчитаем температурный перепад на выходе из теплообменника по формуле $\Delta t'' = \Delta t' \exp(-mkF)$, используя полученное значение $F = 4,24 \text{ м}^2$, где

$$m = \frac{1}{G_1 c_{p1}} - \frac{1}{G_2 c_{p2}} = \frac{1}{2 \cdot 4187} - \frac{1}{0,75 \cdot 4191} = -0,000199.$$

Таким образом,

$$\Delta t'' = (80 - 63,3) \exp(0,000199 \cdot 1299 \cdot 4,24) = 16,7 \cdot 2,99 = 49,9 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Это значение $\Delta t'' = 49,9 \text{ }^\circ\text{C}$ практически совпадает с заданной разностью температур $\Delta t'' = (t_1'' - t_2'') = (60 - 10) = 50 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ответ. Площадь поверхности теплообмена противоточного водо-водяного теплообменника $F = 4,24 \text{ м}^2$.

Задача 2. Проведите поверочный расчет конструируемого теплообменника (см. задачу 1) при изменении схемы движения теплоносителей с противотока (см. рис. 20.3.) на прямоток и перекрестный ток (см. рис. 20.4).

Решение. В такой постановке при решении задачи следует определять температуру охлаждаемого теплоносителя на выходе из теплообменного аппарата t_1'' , так как охлаждение горячего потока теплоносителя – это изначальное значение теплообменника.

Будем считать, что известна площадь теплообменной поверхности $F = 4,24 \text{ м}^2$, температуры теплоносителей (горячего и холодного) на входе $t_1' = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ и $t_2' = 10 \text{ }^\circ\text{C}$, их расходы $G_1 = 2 \text{ кг/с}$ и $G_2 = 1 \text{ кг/с}$ (рис. 21.5).

При изменении схемы движения теплоносителей в теплообменном аппарате с известной площадью поверхности теплообмена F изменится средняя разность температур между теплоносителями Δt и переданный тепловой поток $Q = kF\Delta t$.

Рассмотрим прямоточную схему.

По зависимости $\Delta t'' = \Delta t' \exp(-mkF)$ определим температурный перепад $\Delta t''$ на выходе из теплообменного аппарата при известных $k = 1299 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, $F = 4,24 \text{ м}^2$ (см. решение задачи 1) и

$$m = \frac{1}{G_1 c_{p1}} + \frac{1}{G_2 c_{p2}} = \frac{1}{2 \cdot 4187} + \frac{1}{0,75 \cdot 4191} = 0,000437.$$

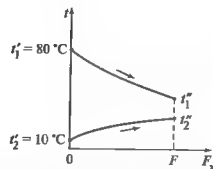


Рис. 21.5. К задаче 2

Таким образом,

$$\Delta t'' = (80 - 10) \exp(-0,000437 \cdot 1299 \cdot 4,24) = 70 \cdot 2,99 = 6,29 \text{ }^\circ\text{C} \text{ и } \bar{\Delta t} = \frac{(80 - 10) - 6,29}{\ln \frac{(80 - 10)}{6,29}} = 26,4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Тепловой поток рассчитаем по уравнению теплопередачи:

$$Q = kF\bar{\Delta t} = 1299 \cdot 4,24 \cdot 26,4 = 145\,405 \text{ Вт}.$$

Находим температуру охлаждаемого теплоносителя t_1'' на выходе из теплообменного аппарата:

$$Q = G_1 c_{p1} (t_1' - t_1''),$$

откуда

$$t_1'' = t_1' - \frac{Q}{G_1 c_{p1}} = 80 - \frac{145\,405}{2 \cdot 4187} = 63,3 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Чтобы выполнить проверку, пересчитаем температурный перепад на выходе из теплообменника по формуле для $\Delta t''$. Для второго теплоносителя

$$Q_2 = G_2 c_{p2} (t_2'' - t_2'),$$

тогда

$$t_2'' = t_2' + \frac{Q}{G_2 c_{p2}} = 10 + \frac{145\,405}{0,75 \cdot 4191} = 56,3 \text{ }^\circ\text{C},$$

отсюда

$$\Delta t'' = (t_1'' - t_2'') = (62,6 - 56,3) = 6,3 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Полученное значение $\Delta t'' = 6,3 \text{ }^\circ\text{C}$ практически совпадает со значением $\Delta t'' = 6,29 \text{ }^\circ\text{C}$, найденным ранее.

Рассмотрим схему перекрестного тока.

Определим температурный напор при перекрестном токе теплоносителей в виде произведения $\Delta t_{\text{прот}}$ на поправочный коэффициент $\epsilon_{\Delta t}$. $\Delta t = \epsilon_{\Delta t} \Delta t_{\text{прот}}$ где $\epsilon_{\Delta t}$ является функцией параметров P и R .

На рис. 21.2 представлен график этой функции. Определим P и R :

$$P = \frac{t_2' - t_2''}{t_1' - t_2'} = \frac{63,3 - 10}{80 - 10} = \frac{53,3}{70} = 0,761;$$

$$R = \frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{80 - 60}{63,3 - 10} = \frac{20}{53,3} = 0,375.$$

По рис. 21.2 найдем, что $\epsilon_{\Delta t} = 0,8$. В связи с этим средний температурный напор при перекрестном токе будет меньше, т.е. $\bar{\Delta t} = 0,8 \cdot 30,4 = 24,3 \text{ }^\circ\text{C}$.

Рассчитаем тепловой поток и температуру охлажденного теплоносителя. Из уравнения теплопередачи и теплового баланса для горячего теплоносителя получим:

$$Q = kF\Delta t = 1299 \cdot 4,24 \cdot 24,3 = 133\,839 \text{ Вт};$$

$$Q_1 = G_1 c_p (t_1' - t_1''),$$

тогда

$$t_1'' = t_1' - \frac{Q}{G_1 c_p} = 80 - \frac{133\,839}{2 \cdot 4187} = 64,0^\circ \text{С}.$$

Ответ. Полученные результаты позволяют увидеть, что для охлаждения потока воды подходит только противоточная схема движения теплоносителей, так как прямоток и перекрестный противоток не позволяют при заданных расходах теплоносителей ($G_1 = 2 \text{ кг/с}$ и $G_2 = 0,75 \text{ кг/с}$) и одинаковой площади поверхности теплообмена $F = 4,24 \text{ м}^2$ охладить поток горячей воды от $t_1' = 80^\circ \text{С}$ до $t_1'' = 60^\circ \text{С}$.

Задача 3. Проведите конструктивный тепловой расчет кожухотрубчатого горизонтального теплообменника (см. рис. 20.2), в котором насыщенным паром с давлением $p_n = 0,6 \text{ МПа}$ проходящая по трубам вода нагревается от $t_2' = 10^\circ \text{С}$ до $t_2'' = 70^\circ \text{С}$. Объемный расход воды $V_2 = 1 \text{ л/с} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$. Для труб из латуни $\lambda = 106 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Внутренний $d_{\text{вн}}$ и наружный $d_{\text{н}}$ диаметры труб составляют соответственно 16 и 18 мм.

Скорость течения воды в трубах теплообменников v_2 обычно принимается равной около 1 м/с . Теплофизические свойства найдите из справочника: для воды при средней температуре $\bar{t}_2 = 40^\circ \text{С}$, а для конденсата при температуре насыщения $\bar{t}_1 = t_n = 158,8^\circ \text{С}$.

Решение. Для нагревания воды необходим тепловой поток

$$Q_2 = \rho_2 V_2 (c_2'' t_2'' - c_2' t_2') = 992,2 \cdot 10^{-3} (293 - 46,2) = 245 \cdot 10^3 \text{ Вт}.$$

Средний перепад температур $\bar{\Delta t}$ можно рассчитывать по разности средних температур (рис. 21.6):

$$\Delta t = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = 158,8 - 40 = 118,8^\circ \text{С},$$

поскольку отношение $\Delta t_6 / \Delta t_m = 148,8/88,8 < 2$.

Суммарная площадь сечения труб для прохода воды

$$S_{\text{тр}} = V_2 / v_2 = 10^{-3} / 1 = 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Площадь внутреннего сечения одной трубы $S'_{\text{тр}} = \pi d_{\text{вн}}^2 / 4 = 3,14 (16 \cdot 10^{-3})^2 / 4 = 2,01 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, следовательно, число параллельно включенных труб $n = S_{\text{тр}} / S'_{\text{тр}} = 10^3 / (2,01 \cdot 10^4) \approx 5$.

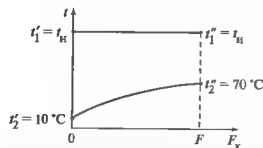


Рис. 21.6. К задаче 3

Уточненное значение скорости течения воды в трубах $v_2 = V_2 / (n S'_{\text{тр}}) = 10^{-3} / (5 \cdot 2,01 \cdot 10^{-4}) = 0,995 \text{ м/с}$.

Для расчета коэффициентов теплоотдачи в первом приближении температуру стенки трубы принимаем равной средней температуре теплоносителей $t_{c1} - t_{c2} = 0,5(\bar{t}_1 + \bar{t}_2) \approx 100^\circ \text{С}$.

Рассмотрим теплоотдачу при конденсации.

Теплофизические свойства конденсата и воды следующие: при $t_n = 158,8^\circ \text{С}$

$$\lambda = 0,683 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \rho = 909 \text{ кг/м}^3, \mu = 172 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}, r = 2086 \text{ кДж/кг};$$

$$\text{при } t_c = 100^\circ \text{С } \lambda_c = 0,683 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \mu_c = 282 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

По формуле Нуссельта находим

$$\bar{\alpha} = 0,728 \sqrt[4]{\frac{\lambda_c^3 \rho^2 g r}{\mu(t_n - t_c) d_n} \left[\frac{\lambda_c}{\lambda} \right]^3 \frac{\mu}{\mu_c}}^{1/8} =$$

$$= 0,728 \sqrt[4]{\frac{0,683^3 \cdot 909^2 \cdot 9,81 \cdot 2086 \cdot 10^3}{172 \cdot 10^{-6} (158,8 - 100) 0,018} \left[\frac{0,683}{0,683} \right]^3 \frac{172 \cdot 10^{-6}}{282 \cdot 10^{-6}}}^{1/8} = 8980 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Рассмотрим конвективную теплоотдачу.

$$\text{Для воды при } \bar{t}_2 = 40^\circ \text{С } \lambda_{\text{ж}} = 0,634 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, v_{\text{ж}} = 0,659 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$\text{Pr}_{\text{ж}} = 4,3; \text{ при } t_c = 100^\circ \text{С } \text{Pr}_c = 1,75.$$

Рассчитаем число $\text{Re}_{\text{ж}}$:

$$\text{Re}_{\text{ж}} = (v_{\text{ж}} d_{\text{вн}}) / \nu_{\text{ж}} = 0,995 \cdot 0,016 / (0,659 \cdot 10^{-6}) = 24\,200.$$

Поскольку $\text{Re}_{\text{ж}} > 10^4$, режим течения турбулентный.

Для определения $\text{Nu}_{\text{ж}}$ воспользуемся формулой Михеева:

$$\text{Nu}_{\text{ж}} = 0,021 \text{Re}_{\text{ж}}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,43} (\text{Pr}_{\text{ж}} / \text{Pr}_c)^{0,25} =$$

$$= 0,021 (2,42 \cdot 10^4)^{0,8} (4,3)^{0,43} (4,3/1,75)^{0,25} = 158.$$

Тогда коэффициент теплоотдачи на участке стабилизированного течения

$$\alpha_{\text{ст}} = \frac{\text{Nu}_{\text{ж}} \lambda_{\text{ж}}}{d} = \frac{158 \cdot 0,634}{0,016} = 6260 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Учитывая, что $d_n / d_{\text{вн}} < 1,5$, будем пользоваться формулой теплопередачи через плоскую стенку, причем площадь боковой поверхности трубы $F_{\text{тр}}$ будем считать по среднему диаметру $d = 0,5(d_{\text{вн}} + d_n) = 0,5(16 + 18) = 17 \text{ мм}$, поскольку $\alpha_1 \approx \alpha_2$.

Рассчитаем коэффициент теплопередачи:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{8980} + \frac{0,001}{106} + \frac{1}{6260}} = 3560 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Согласно уравнению теплопередачи, площадь теплообмена

$$F = Q_2 / (k \Delta t) = 245 \cdot 10^3 / (3560 \cdot 118,8) = 0,58 \text{ м}^2.$$

Уточним температуры поверхностей стенки трубы:

со стороны пара (по уравнению теплоотдачи)

$$t_{c1} = t_1' - Q_2 / (\alpha_1 F) = 158,8 - 245 \cdot 10^3 / (8980 \cdot 0,58) = 111 \text{ }^\circ\text{C};$$

со стороны воды (по формуле для теплопроводной стенки)

$$t_{c2} = t_{c1} - Q_2 \delta / (\lambda F) = 111 - 245 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} / (106 \cdot 0,58) = 107 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Повторив расчет (начиная с коэффициентов теплоотдачи) с использованием уточненных значений температур t_{c1} и t_{c2} , получим $F = 0,567 \text{ м}^2$.

Так как расхождение уточненного и ранее полученного значений F менее 10 %, то дальнейших расчетов можно не проводить.

Ответ. Если задаться коэффициентом использования поверхности теплообмена $\eta_F = 0,8$, то площадь поверхности теплообмена реального теплообменника $F' = F / \eta_F = 0,567 / 0,8 = 0,71 \text{ м}^2$, а длина труб $L = F' / (\pi d) = 0,71 / (5 \cdot 3,14 \cdot 0,017) = 2,66 \text{ м}$.

Рассчитывать (или выбирать) все размеры теплообменника обычно не имеет смысла, поскольку на специализированных предприятиях можно заказать лишь теплообменник, соответствующий тем стандартам, которые определяют их основные типоразмеры. Проще всего после расчета площади поверхности теплообмена выбрать в каталогах и заказать подходящий серийно выпускаемый теплообменник. Обычно заказывают теплообменник с большей площадью поверхности. В нашем случае $F = 0,8 \text{ м}^2$.

Задача 4. Определите площадь поверхности теплообмена регенератора с металлическим вращающимся ротором (см. рис. 20.7) при следующих условиях.

Расход дымовых газов $V_1 = 36\,000 \text{ м}^3/\text{ч}$, его начальная и конечная температуры $t_1' = 700 \text{ }^\circ\text{C}$ и $t_1'' = 140 \text{ }^\circ\text{C}$, расход нагреваемого воздуха $V_2 = 30\,000 \text{ м}^3/\text{ч}$, начальная температура $t_2' = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Примите следующие коэффициенты теплоотдачи:

$$\alpha_1 = 120 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}; \quad \alpha_2 = 70 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Средние теплоемкости газов $c_1 = 1,354 \text{ кДж/(м}^3 \cdot \text{К)}$, $c_2 = 1,4 \text{ кДж/(м}^3 \cdot \text{К)}$.

Решение. Количество теплоты, передаваемое дымовыми газами воздуху,

$$Q = V_1 c_1 (t_1' - t_1'') \eta = \frac{30\,000}{3600} 1,354 (700 - 140) 0,95 = 6003 \text{ кВт}.$$

Температура воздуха на выходе из регенератора

$$t_2'' = t_2' + \frac{Q}{V_2 c_2} = 20 + \frac{6003}{\frac{30\,000}{3600} 1,4} = 534,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Фронтальное сечение ротора (насадки) регенератора делим на две равные части так, чтобы

$$\alpha_1 \chi_1 \approx \alpha_2 \chi_2.$$

Следовательно, $\chi_1 = 0,37$ и $\chi_2 = 0,63$. Действительно,

$$\alpha_1 \chi_1 = \alpha_2 (1,0 - \chi_1),$$

откуда

$$\chi_1 = \frac{\alpha_2 / \alpha_1}{1 + \alpha_2 / \alpha_1} = \frac{70 / 120}{1 + 70 / 120} = 0,37.$$

Коэффициент теплопередачи

$$k = \frac{1}{\alpha_1 \chi_1} + \frac{1}{\alpha_2 \chi_2} = \frac{1}{120 \cdot 0,37} + \frac{1}{70 \cdot 0,63} = 22,1 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Средний температурный напор (принимая противоточную схему)

$$\Delta t = \frac{(t_1' - t_2'') - (t_1'' - t_2')}{\ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}} = \frac{(700 - 534,5) - (140 - 20)}{\ln \frac{700 - 534,5}{140 - 20}} = 141,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Площадь поверхности теплообмена ротора

$$F = \frac{Q}{k \Delta t} = \frac{6003 \cdot 10^3}{22,1 \cdot 141,5} = 1919 \text{ м}^2.$$

Ответ. Площадь поверхности теплообмена вращающегося металлического ротора насадки $F = 1919 \text{ м}^2$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1. Плотность ρ , теплопроводность λ , теплоемкость c_p некоторых материалов

Наименование материала	t , °C	ρ , кг/м ³	λ , Вт/(м · К)	c_p , кДж/(кг · К)
Асбошифер	20	1800	0,64	—
Асфальт	30	2120	0,74	1,67
Бетон с каменным щебнем	0	2000	1,28	0,84
Бетон сухой	0	1600	0,84	—
Бумага обыкновенная	20	—	0,14	1,51
Вата хлопчатобумажная	30	80	0,042	—
Гипс сухой	20	1250	0,43	0,85
Глина	20	2000	0,90	0,84
Глина огнеупорная	450	1845	1,04	1,09
Дерево:				
дуб поперек волокон	0	825	0,20	2,39
дуб вдоль волокон	10	825	0,35	2,39
сосна поперек волокон	0	546	0,14	2,72
сосна вдоль волокон	20	546	0,35	2,72
Картон	20	—	0,14	1,51
Кожа	20	—	0,15	—
Котельная накипь:				
богатая гипсом	100	2000	0,7	—
богатая известью	100	1000	0,15	—
богатая силикатом	100	300	0,08	—
Кварц кристаллический:				
поперек оси	0	—	0,72	—
вдоль оси	0	—	1,94	—
Ламповая сажа	40	165	0,10	—
Лед	0	917	2,2	2,26
Льняная ткань	—	—	0,088	—
Мел	50	2000	0,9	0,88
Мрамор	0	2800	3,5	0,92
Песок речной (сухой)	0	1520	0,30	0,80
Песок речной (влажный)	20	1650	1,13	2,09
Плексиглас	20	—	0,184	—
Пробковые плиты	80	150	0,044	1,76

Окончание табл. П.1

Наименование материала	t , °C	ρ , кг/м ³	λ , Вт/(м · К)	c_p , кДж/(кг · К)
Резина:				
твердая обыкновенная	0	1200	0,157	1,38
мягкая	20	—	0,13	1,38
Сахарный песок	0	1600	0,58	1,26
Сланец	94	—	1,49	—
Снег:				
свежевыпавший	—	200	0,10	2,09
уплотненный	—	400	0,46	2,09
Стекло:				
обыкновенное	20	2500	0,74	0,67
термометрическое	20	2590	0,96	—
кварцевое	800	—	2,40	—
Текстолит	20	1300	0,23	1,46
Фанера клееная	0	600	0,15	2,51
Фарфор	95	2400	1,04	1,09
Эбонит	20	1200	0,16	—
Шлак котельный	0	1000	0,29	0,75
Штукатурка:				
известковая	0	1600	0,70	0,84
цементно-песчаная	0	1800	1,2	0,84

Таблица П.2. Плотность ρ , теплопроводность λ и предельная температура t применения теплоизоляционных и огнеупорных материалов, изделий и некоторых металлов

Наименование материала или изделия	ρ , кг/м ³	λ , Вт/(м · К)	t , °C
Материалы			
Асбест	500	0,107 + 0,00019 <i>t</i>	700
	III	0,140 + 0,00019 <i>t</i>	700
Асбозонолит	520	0,143 + 0,00019 <i>t</i>	700
Асбозурит	700	0,162 + 0,000169 <i>t</i>	300
Асбоствола	600	0,120 + 0,000148 <i>t</i>	600
Асботермит	560	0,109 + 0,000145 <i>t</i>	550
Диатомит молотый	450	0,091 + 0,00028 <i>t</i>	III
Зонолит (вермикулит)	200	0,072 + 0,000262 <i>t</i>	1100

Окончание табл. П.2

Наименование материала или изделия	ρ , кг/м ³	λ , Вт/(м·К)	t , °С
Минеральная стеклянная вата	200	0,052 + 0,00064 <i>t</i>	500
Новосазурит	600	0,144 + 0,00014 <i>t</i>	250
Ньювель	450	0,087 + 0,000064 <i>t</i>	350
Совелит	500	0,090 + 0,000087 <i>t</i>	450
Ферригипс (паста феррон)	500	0,101 + 0,000015 <i>t</i>	600
Шлаковая вата (сорт 0)	200	0,06 + 0,000145 <i>t</i>	750
Изделия			
Альфоль гофрированный, сегменты	200	0,0535 + 0,000221 <i>t</i>	500
Асбоцементные сегменты	400	0,0919 + 0,000128 <i>t</i>	450
Вермикулитовые плиты	380	0,081 + 0,00015 <i>t</i>	700
Вулканитовые плиты	400	0,080 + 0,00021 <i>t</i>	600
Войлок строительный	300	0,05 при 0 °С	190
Кирпич:			
диатомитовый	550	0,113 + 0,00023 <i>t</i>	850
диасовый	1500	0,9 + 0,0007 <i>t</i>	1700
красный	1800	0,77 при 0 °С	—
магнезитовый	2700	4,65 – 0,0017 <i>t</i>	1700
пеношамотный	600	0,10 + 0,000145 <i>t</i>	1300
пенодиатомитовый	230	0,07 при 70 °С	700
хромитовый	3050	1,3 + 0,00041 <i>t</i>	1700
шамотный	1850	0,84 + 0,0006 <i>t</i>	1400
Минеральный войлок	250	0,058 при 50 °С	—
Пенобетонные блоки	500	0,122 при 50 °С	300
Торфяные сегменты	425	0,0686 + 0,000116 <i>t</i>	60
Шлаковая и минеральная пробка	270	0,064 при 50 °С	150
Металлы			
Сталь 15	7800	58,7 – 0,0423 <i>t</i>	600
Сталь 30	7900	54,6 – 0,0422 <i>t</i>	600
Сталь нержавеющая (1Х18Н9Т)	7950	14,4 + 0,016 <i>t</i>	600
Медь (99,9 %)	8900	392 – 0,0685 <i>t</i>	800
Летунь (67 % Cu, 33 % Zn)	8500	101 + 0,165 <i>t</i>	600
Нихром (Ni + Cr + Fe + Mn)	8200	11,6 + 0,003 <i>t</i>	1000

Таблица П.3. Физические свойства воды в состоянии насыщения

t , °С	ρ , кг/м ³	c_p , кДж/(кг·К)	λ , 10 ⁻² Вт/(м·К)	ν , 10 ⁻⁶ м ² /с	β , 10 ⁻⁴ К ⁻¹	σ , 10 ⁻⁴ Н/м	Pr
0	999,9	4,212	55,1	1,789	-0,63	756,4	13,67
10	999,7	4,191	57,4	1,306	+0,70	741,6	9,52
20	998,2	4,183	59,9	1,006	1,82	726,9	7,02
30	995,7	4,174	61,8	0,805	3,21	712,2	5,42
40	992,2	4,174	63,5	0,659	3,87	696,5	4,31
50	988,1	4,174	64,8	0,556	4,49	676,9	3,54
60	983,2	4,179	65,9	0,478	5,11	662,2	2,98
70	977,8	4,187	66,8	0,415	5,70	643,5	2,55
80	971,8	4,195	67,4	0,365	6,32	625,9	2,21
90	965,3	4,208	68,0	0,326	6,95	607,2	1,95
100	958,4	4,220	68,3	0,295	7,52	588,6	1,75
110	951,0	4,233	68,5	0,272	8,08	569,0	1,60
120	943,1	4,250	68,6	0,252	8,64	548,4	1,47
130	934,8	4,266	68,6	0,233	9,19	528,8	1,36
140	926,1	4,287	68,5	0,217	9,72	507,2	1,26
150	917,0	4,313	68,4	0,203	10,3	486,6	1,17
160	907,4	4,346	68,3	0,191	10,7	466,0	1,10
170	897,3	4,380	67,9	0,181	11,3	443,4	1,05
180	886,9	4,417	67,4	0,173	11,9	422,8	1,00
190	876,0	4,459	67,0	0,165	12,6	400,2	0,96
200	863,0	4,505	66,3	0,158	13,3	376,7	0,93
210	852,8	4,555	65,5	0,153	14,1	354,1	0,91
220	840,3	4,614	64,5	0,149	14,8	331,6	0,89
230	827,3	4,681	63,7	0,145	15,9	310,0	0,88
240	813,6	4,756	62,8	0,141	16,8	285,5	0,87
250	799,0	4,844	61,8	0,137	18,1	261,9	0,86
260	784,0	4,949	60,5	0,135	19,7	237,4	0,87
270	767,9	5,070	59,0	0,133	21,6	214,8	0,88
280	750,7	5,230	57,4	0,131	23,7	191,3	0,90
290	732,3	5,485	55,8	0,129	26,2	168,7	0,93
300	712,5	5,736	54,0	0,128	29,2	144,2	0,97
310	691,1	6,071	52,3	0,128	32,9	120,7	1,03
320	667,1	6,574	50,6	0,128	38,2	98,10	1,11
330	640,2	7,244	48,4	0,127	43,3	76,71	1,22
340	610,1	8,165	45,7	0,127	53,4	56,70	1,39
350	574,4	9,504	43,0	0,126	66,8	38,16	1,60
360	528,0	13,984	39,5	0,126	109	20,21	2,35
370	450,5	40,321	33,7	0,126	264	4,71	6,79

Таблица П.4. Физические свойства водяного пара в состоянии насыщения

$t, ^\circ\text{C}$	$p, 10^5 \text{ Па}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$r, \text{кДж/кг}$	$c_p, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$	$\lambda, 10^2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$	$v, 10^6 \text{ м}^3/\text{с}$	Pr
0,01	0,0061	0,00485	2500	1,861	1,697	1888	1,00
10	0,0123	0,00939	2477	1,869	1,770	1011	1,00
20	0,0234	0,01729	2453	1,877	1,824	563,7	1,00
30	0,0424	0,03037	2430	1,885	1,883	328,9	1,00
40	0,0738	0,05117	2406	1,895	1,953	200,7	1,00
50	0,1233	0,08303	2382	1,907	2,034	127,5	0,99
60	0,1992	0,1302	2358	1,923	2,122	83,88	0,99
70	0,3116	0,1981	2333	1,942	2,214	56,90	0,99
80	0,4736	0,2932	2309	1,967	2,309	39,63	0,99
90	0,7011	0,4232	2283	1,997	2,407	28,26	0,99
100	1,013	0,598	2256,8	2,135	2,372	20,02	1,08
110	1,43	0,826	2230,0	2,177	2,489	15,07	1,09
120	1,98	1,121	2202,8	2,206	2,593	11,46	1,09
130	2,70	1,496	2174,3	2,257	2,686	8,85	1,11
140	3,61	1,966	2145,0	2,315	2,791	6,89	1,12
150	4,76	2,547	2114,3	2,395	2,884	5,47	1,16
160	6,18	3,258	2092,6	2,479	3,012	4,39	1,18
170	7,92	4,122	2049,5	2,583	3,128	3,57	1,21
180	10,03	5,157	2015,2	2,709	3,268	2,93	1,25
190	12,55	6,397	1978,8	2,856	3,419	2,44	1,30
200	15,55	7,862	1940,7	3,023	3,547	2,03	1,36
210	19,08	9,588	1900,5	3,199	3,722	1,71	1,41
220	23,20	11,62	1857,8	3,408	3,896	1,45	1,47
230	27,98	13,99	1813,0	3,634	4,094	1,24	1,54
240	33,48	16,76	1765,6	3,881	4,291	1,06	1,61
250	39,78	19,98	1715,8	4,158	4,512	0,913	1,68
260	46,94	23,72	1661,4	4,468	4,803	0,794	1,75
270	55,05	28,09	1604,4	4,815	5,106	0,688	1,82
280	64,19	33,19	1542,9	5,234	5,489	0,600	1,90
290	74,45	39,15	1476,3	5,694	5,827	0,526	2,01
300	85,92	46,21	1404,3	6,280	6,268	0,461	2,13
310	98,70	54,58	1325,2	7,118	6,838	0,403	2,29
320	112,90	64,72	1238,1	8,206	7,513	0,353	2,50
330	128,65	77,10	1139,7	9,881	8,257	0,310	2,86
340	146,08	92,76	1027,1	12,35	9,304	0,272	3,35
350	165,37	113,6	893,1	16,24	10,70	0,234	4,03
360	186,74	144,0	719,7	23,03	12,79	0,202	5,23
370	210,53	203,0	438,4	56,52	17,10	0,166	11,10

Таблица П.5. Физические свойства перегретого водяного пара при $p = 0,1 \text{ МПа}$

$t, ^\circ\text{C}$	$v, \text{м}^3/\text{кг}$	$\lambda, \text{МВт/(м} \cdot \text{K)}$	$\mu, \text{мПа} \cdot \text{с}$	$c_p, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$
200	2,172	33,3	16,18	1,974
210	2,219	34,2	16,58	1,976
220	2,266	35,2	16,99	1,978
230	2,313	36,2	17,40	1,981
240	2,359	37,2	17,81	1,984
250	2,406	38,2	18,22	1,988
260	2,453	39,2	18,63	1,992
270	2,499	40,2	19,04	1,996
280	2,546	41,3	19,46	2,001
290	2,592	42,3	19,87	2,006
300	2,639	43,4	20,29	2,011
310	2,685	44,5	20,70	2,016
320	2,732	45,6	21,12	2,021
330	2,778	46,7	21,53	2,026
340	2,824	47,8	21,95	2,032
350	2,871	49,0	22,37	2,038
360	2,917	50,1	22,78	2,044
370	2,964	51,3	23,20	2,050
380	3,010	52,4	23,61	2,056
390	3,056	53,5	24,03	2,061
400	3,103	54,8	24,44	2,068
410	3,149	55,9	24,86	2,074
420	3,195	57,1	25,27	2,080
430	3,242	58,3	25,69	2,086
440	3,288	59,5	26,10	2,093
450	3,334	60,8	26,51	2,099
460	3,380	62,0	26,93	2,106
470	3,427	63,2	27,34	2,111
480	3,473	64,5	27,75	2,119
490	3,519	65,7	28,16	2,125
500	3,565	67,0	28,57	2,132
510	3,612	68,2	28,98	2,139
520	3,658	69,5	29,38	2,146
530	3,704	70,8	29,79	2,152

Окончание табл. П.5

$t, ^\circ\text{C}$	$\nu, \text{м}^3/\text{кг}$	$\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	$\mu, \text{мПа} \cdot \text{с}$	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
540	3,750	72,1	30,20	2,159
550	3,797	73,4	30,60	2,166
560	3,843	74,6	31,01	2,173
570	3,889	75,9	31,41	2,180
580	3,935	77,3	31,81	2,187
590	3,982	78,6	32,22	2,194
600	4,028	79,9	32,62	2,200
610	4,074	81,2	33,01	2,206
620	4,120	82,4	33,41	2,213
630	4,166	83,9	33,81	2,220
640	4,213	85,2	34,20	2,227
650	4,259	86,6	34,60	2,234
660	4,305	87,9	34,99	2,241
670	4,351	89,8	35,39	2,248
680	4,397	90,6	35,77	2,255
690	4,444	92,0	36,16	2,262

Таблица П.6. Физические свойства сухого воздуха ($p = 0,101 \text{ МПа}$)

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$\lambda, 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	$\mu, 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$	$\nu, 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	Pr
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	12,79	0,716
0	1,342	1,009	2,36	16,7	12,43	0,712
10	1,293	1,005	2,44	17,2	13,28	0,707
20	1,247	1,005	2,51	17,6	14,16	0,705
30	1,205	1,005	2,59	18,1	15,06	0,703
40	1,165	1,005	2,67	18,6	16,00	0,701
50	1,128	1,005	2,76	19,1	16,96	0,699
60	1,093	1,005	2,83	19,6	17,95	0,698
70	1,060	1,005	2,90	20,1	18,97	0,696
80	1,029	1,009	2,96	20,6	20,02	0,694
90	1,000	1,009	3,05	21,1	21,09	0,692
100	0,972	1,009	3,13	21,5	22,10	0,690
110	0,946	1,009	3,21	21,9	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,34	22,8	25,45	0,686

Окончание табл. П.6

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$\lambda, 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	$\mu, 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$	$\nu, 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	Pr
140	0,854	1,013	3,49	23,7	27,80	0,684
160	0,815	1,017	3,64	24,5	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,78	25,3	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,93	26,0	34,85	0,680
250	0,674	1,038	4,27	27,4	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,60	29,7	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,91	31,4	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,21	33,6	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,74	36,2	79,38	0,687
600	0,404	1,114	6,22	39,1	96,89	0,699
700	0,362	1,135	6,71	41,8	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	44,3	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	46,7	155,1	0,717
1000	0,277	1,185	8,07	49,0	177,1	0,719
1100	0,257	1,197	8,50	51,2	199,3	0,722
1200	0,239	1,210	9,15	53,5	233,7	0,724

Таблица П.7. Физические свойства дымовых газов
($p = 0,101 \text{ МПа}$; $r_{\text{CO}_2} = 0,13$; $r_{\text{H}_2\text{O}} = 0,11$; $r_{\text{N}_2} = 0,76$)

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$	$c_p, \text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$\lambda, 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	$\nu, 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	Pr
0	1,295	1,042	2,28	12,20	0,72
100	0,950	1,068	3,13	21,54	0,69
200	0,748	1,097	4,01	32,80	0,67
300	0,617	1,122	4,84	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,70	60,38	0,64
500	0,457	1,185	6,56	76,30	0,63
600	0,405	1,214	7,42	93,61	0,62
700	0,363	1,239	8,27	112,1	0,61
800	0,330	1,264	9,15	131,8	0,60
900	0,301	1,290	10,0	152,5	0,59
1000	0,275	1,306	10,90	174,3	0,58
1100	0,257	1,323	11,75	197,1	0,57
1200	0,240	1,340	12,62	221,0	0,56

Таблица П.8. Физические свойства трансформаторного масла в зависимости от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$c_p, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$	$\lambda, \text{Вт/(м} \cdot \text{K)}$	$\mu, 10^{-4} \text{Па} \cdot \text{с}$	$\nu, 10^{-6} \text{м}^2/\text{с}$	$\beta, 10^{-4} \text{K}^{-1}$	Pr
0	892,5	1,549	0,1123	629,8	70,5	6,80	866
10	886,4	1,620	0,1115	335,5	37,9	6,85	484
20	880,3	1,666	0,1106	198,2	22,5	6,90	298
30	874,2	1,729	0,1098	128,5	14,7	6,95	202
40	868,2	1,788	0,1090	89,4	10,3	7,00	146
50	862,1	1,846	0,1082	65,3	7,58	7,05	111
60	856,0	1,905	0,1072	49,5	5,78	7,10	87,8
70	850,0	1,964	0,1064	38,6	4,54	7,15	71,3
80	843,9	2,026	0,1056	30,8	3,66	7,20	59,3
90	837,8	2,085	0,1047	25,4	3,03	7,25	50,5
100	831,8	2,144	0,1038	21,3	2,56	7,30	43,9
110	825,7	2,202	0,1030	18,1	2,20	7,35	38,8
120	819,6	2,261	0,1022	15,7	1,92	7,40	34,9

Таблица П.9. Физические свойства масла МК в зависимости от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$c_p, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$	$\lambda, \text{Вт/(м} \cdot \text{K)}$	$\mu, 10^{-4} \text{Па} \cdot \text{с}$	$\nu, 10^{-6} \text{м}^2/\text{с}$	$\beta, 10^{-4} \text{K}^{-1}$	Pr
10	911,0	1,645	0,1510	35 414	3883	8,56	39 000
20	903,0	1,712	0,1485	18 560	1514	8,64	15 800
30	894,5	1,758	0,1461	6180	691,2	8,71	7450
40	887,5	1,804	0,1437	3031	342,0	8,79	3810
50	879,0	1,851	0,1413	1638	186,2	8,86	2140
60	871,5	1,897	0,1389	961,4	110,6	8,95	1320
70	864,0	1,943	0,1363	603,3	69,3	9,03	858
80	856,0	1,989	0,1340	399,3	46,6	9,12	591
90	848,2	2,035	0,1314	273,7	32,3	9,20	424
100	840,7	2,081	0,1290	202,1	24,0	9,28	327
110	838,0	2,127	0,1264	145,2	17,4	9,37	245
120	825,0	2,173	0,1240	110,4	13,4	9,46	193,5
130	817,0	2,219	0,1214	87,31	10,7	9,54	160,0
140	809,2	2,265	0,1188	70,34	8,70	9,65	133,3

Таблица П.10. Физические свойства масла МС-20 в зависимости от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$c_p, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$	$\lambda, \text{Вт/(м} \cdot \text{K)}$	$\mu, 10^{-4} \text{Па} \cdot \text{с}$	$\nu, 10^{-6} \text{м}^2/\text{с}$	$\beta, 10^{-4} \text{K}^{-1}$	Pr
-10	990,3	1,951	0,136	—	—	—	—
0	903,6	1,980	0,135	—	—	—	—
+10	897,9	2,010	0,135	—	—	—	—
20	892,3	2,043	0,134	10 026	1125	6,35	15 400
30	886,6	2,072	0,132	4670	526	6,38	7310
40	881,0	2,106	0,131	2433	276	6,42	3890
50	875,3	2,135	0,130	1334	153	6,46	2180
60	869,6	2,165	0,129	789,5	91,9	6,51	1340
70	864,0	2,198	0,128	498,3	58,4	6,55	865
80	858,3	2,227	0,127	336,5	39,2	6,60	588
90	852,7	2,261	0,126	234,4	27,5	6,64	420
100	847,0	2,290	0,126	171,7	20,3	6,69	315
110	841,3	2,320	0,124	132,4	15,7	6,73	247
120	835,7	2,353	0,123	101,0	12,1	6,77	193
130	830,0	2,382	0,122	79,76	9,61	6,82	156
140	824,4	2,420	0,121	61,80	7,50	6,87	123
150	818,7	2,445	0,120	53,17	6,50	6,92	108

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.А., Григорьев Б.А. Теплофизические свойства воды и водяного пара. М.: Издательство МЭИ, 1998.
2. Аметистов Е.В., Клименко В.В., Павлов Ю.М. Кипение криогенных жидкостей. М.: Энергоатомиздат, 1995.
3. Блох А.Г. Теплообмен в топках паровых котлов. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1984.
4. Блох А.Г. Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.
5. Галин Н.М., Кириллов П.Л. Тепломассообмен (в ядерной энергетике): Учебное пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
6. Дорожук В.Е. Кризисы теплообмена при кипении воды в трубах. М.: Энергоатомиздат, 1983.
7. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. М.: Наука, 1982.
8. Задачник по технической термодинамике и теории тепломассообмена: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.И. Крутова и Г.Б. Петратидского. М.: Высшая школа, 1986.
9. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
10. Исаченко В.П. Теплообмен при конденсации. М.: Энергия, 1977.
11. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача: Учебник для вузов. — 4-е изд. перераб. и доп. М.: Энергоиздат, 1981.
12. Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. Интенсификация теплообмена в каналах. М.: Машиностроение, 1990.
13. Киртанов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1985.
14. Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П. Справочник по теплогидравлическим расчетам (Ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы). М.: Энергоатомиздат, 1990.
15. Краснощекоев Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче: Учебное пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1980.
16. Крейт Ф., Блок У. Основы теплопередачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
17. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
18. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1990.
19. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергоатомиздат, 1985.
20. Кутепов А.М., Стерман Л.С., Стюшин Н.Г. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1986.
21. Лабораторный практикум по термодинамике и теплопередаче: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.И. Крутова, Е.В. Шишова. М.: Высшая школа, 1988.
22. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебник для вузов. М.: Наука, 1987.
23. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
24. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978.
25. Машиностроение. Энциклопедия / Под общ. ред. К.С. Колесникова, А.И. Леонтьева. М.: Машиностроение, 1999. Т. 1, 2: Теоретическая механика. Термодинамика. Теплообмен.
26. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.
27. Назмеев Ю.Г., Лавыгин В.М. Теплообменные аппараты ТЭС: Учебное пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1998.
28. Осипова В.А. Экспериментальное исследование процессов теплообмена. М.: Энергия, 1979.
29. Огниск М.Н. Сложный теплообмен: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
30. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
31. Пятакир С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984.
32. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967.
33. Петухов Б.С. Вопросы теплообмена: Избранные труды. М.: Наука, 1987.
34. Петухов Б.С. Теплообмен в движущейся однофазной среде: Ламинарный пограничный слой / Под ред. А.Ф. Полякова. М.: Издательство МЭИ, 1993.
35. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках: Учебное пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1986.
36. Петухов Б.С., Поляков А.Ф. Теплообмен при смешанной турбулентной конвекции. М.: Наука, 1986.
37. Практикум по теплопередаче: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.П. Солодова. М.: Энергоатомиздат, 1986.
38. Промышленная теплоэнергетика и теплотехника: Справочник / Под общ. ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. М.: Энергоатомиздат, 1991. Кн. 4: Теплоэнергетика и теплотехника.
39. Себеси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
40. Седов Л.И. Механика сплошных сред. В 2-х томах. М.: Наука, 1973.
41. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
42. Сперроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением: Пер. с англ. Л.: Энергия, 1971.
43. Сполдинг Д.Б. Конвективный массообмен: Пер. с англ. М.: Энергия, 1965.
44. Сполдинг Д.Б. Горение и массообмен: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1985.
45. Справочник по теплообменникам. В 2-х томах: Пер. с англ. / Под ред. Б.С. Петухова, В.К. Шикова. М.: Энергоатомиздат, 1987.
46. Теория тепломассообмена: Учебник для вузов / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
47. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. М.: Энергоатомиздат, 1991. Кн. 2: Теплоэнергетика и теплотехника.

48. Теплообменные аппараты холодильных установок / Под ред. Г.Н. Даниловой. М.: Машиностроение, 1986.
49. Теплоэнергетика и теплотехника. Общие вопросы: Справочник / Под общ. ред. В.В. Клименко, В.М. Зорина. М.: Издательство МЭИ, 1999. Кн. 1: Теплоэнергетика и теплотехника.
50. ФраНК-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.
51. Цветков Ф.Ф., Керимов Р.В., ВелНЧКО В.И. Задачник по тепломассообмену: Учебное пособие для вузов. М.: Издательство МЭИ, 1997.
52. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
53. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно черное тело 425
Автомодельная переменная 166
Адиабатная температура стенки 172
Адиабатное испарение 400
Аналогия Рейнольдса 201, 265, 393

Бародиффузия 375
Биарная смесь 369
Буферная зона пограничного слоя 193

Вектор плотности диффузионного потока массы 370
— — — потока излучения 423
— — — потока массы 370
— — — теплового потока 19

Внешний поток 148
Вынужденное движение 14
Вязкий подслон 193
Вязкостный режим 257
Вязкость динамическая 132
— кинематическая 132
— турбулентная 198

Гетерогенная химическая реакция 403
Гидравлическое сопротивление 239, 523

Гидрофобизатор 321
Гипотеза локального термодинамического равновесия 426
Гомогенная химическая реакция 403
Градиент температуры 18
Граничное условие 28, 29

Динамическая скорость 193
Дисперсно-кольцевой режим 350
Дисперсный режим 350
Диссипативная функция 138
Диффузионный поток массы 370

Жидкость несжимаемая 129

Задача Блазиуса 156
— Гретца—Нуссельта 252
— Польгаузена 162
Закон Бугера 464
— Вина 429
— внутреннего трения Ньютона 132
— Кирхгофа 425
— Ламберта 421

— Ньютона—Рихмана 29
— Планка 427
— Релея—Джинса 429
— Стефана—Больцмана 430
— Фика 372
— Фурье 22

Замороженная теплоемкость 380
Замороженный поток 404

Изотермическая поверхность 18
Индиатриса рассеяния 486
Интеграл Лайбона 267
Интенсивность излучения 420
Интенсификация теплоотдачи 37

Кипение в большом объеме 339
— насыщенной жидкости 352
— пленочное 341
— пузырьковое 340
Кольцевой режим 350
Конденсация из парогазовой смеси 401
— капельная 298, 321
— пленочная 298
Коридорный пучок труб 291
Кризис теплоотдачи при кипении 356
Критическая плотность теплового потока 346
— тепловая нагрузка 342
Критический радиус пузырька 331

Коэффициент восстановления температуры 172
 — диффузии 372
 — излучения 486
 — массоотдачи 388
 — объемного расширения 135
 — ослабления 486
 — перемежаемости 192
 — поглощения 419, 464, 486
 — рассеяния 486
 — сопротивления 288
 — теплоотдачи 29
 — теплопередачи 36, 518
 — трения 154
 — эффективности ребра 65, 68

Ламинарный режим течения 141, 144
 Линия теплового тока 19

Массовая координата 370
 — скорость 131
 Межфазная поверхность 382
 Минимальный радиус пузырька 331
 Молярная концентрация 371
 Монохроматическое излучение 431
 Мощность источников теплоты 25

Направляющая точка 30
 Напряжения Рейнольдса 146
 Начальный гидродинамический участок 237
 — термический участок 243

Объемная доля компонента 371
 Объемное паросодержание 349
 Оптическая толщина слоя 465
 Относительная влажность 371
 Отрывной диаметр пузырька 338

Параметр проицаемости 389
 Перемежаемость течения 189
 Плотность турбулентного теплового потока 146
 Пограничный слой динамический 148
 — — диффузионный 385
 — — ламинарный 147
 — — тепловой 150

— — турбулентный 188
 Поверхностное кипение 352
 Поглощательная способность интегральная 431
 — — спектральная 431
 Полупроницаемая поверхность 383
 Поток излучения 420
 Простая химическая реакция 404

Равновесное тепловое излучение 424
 Радиационно-конвективный теплообмен 15
 Радиационно-кондуктивный теплообмен 15
 Расходное массовое паросодержание 348
 Регулярный режим теплопроводности 112
 Рейнольдсов поток 393

Свободная конвекция 143
 Серое тело 432
 Серый газ 481
 Сложный теплообмен 498
 Смешанная конвекция 14
 Смешанный режим течения пленки 310
 Спаряющий режим движения парожидкостной смеси 350
 Сопротивление фазового перехода 299
 Средняя массовая скорость 350, 369
 — — температура 242
 — — энтальпия 241
 Степень турбулентности 188
 — — черноты 432
 Стефанов поток массы 397
 Субстанциональная производа 126

Темп регулярного режима 112
 Температура торможения 171
 Температуропроводность 27
 Температурное поле 17
 Температурный напор 514
 Тепловой поток 18
 Теплообменный аппарат 502
 — — регенеративный 506

— — рекуперативный 504
 Теплоотдача 14
 Теплопередача 36
 Теплопроводность 22
 Термическое сопротивление 32, 298
 Термогравитационная сила 136
 — коинекция 14
 Термодиффузия 375
 Толщина вытеснения 178
 — потери импульса 178
 — потери энтальпии 180
 Точка отрыва пограничного слоя 155
 Тройная аналогия 392, 396
 Турбулентный режим течения 144

Угловой коэффициент излучения 445
 — — обобщенный 474
 — — разрешающий 457, 458
 Уравнение диффузии 375
 — Навье—Стокса 134
 — неразрывности 128, 129, 376
 — Прандтля 152, 154
 — Рейнольдса 146
 — теплового баланса 511
 — теплопередачи 518
 — теплопроводности 25
 — Фолкнера—Скэн 167
 — Фурье—Остроградского 137
 — энергии 136, 379

Число Био 56, 59, 99
 — Грасгофа 143
 — Грасгофа диффузионное 391
 — Дамкеллера 405
 — единиц переноса 516
 — Льюиса 380
 — Маха 130
 — Нуссельта 142
 — Нуссельта диффузионное 390
 — Пекле 140
 — Прандтля 142, 380
 — Прандтля диффузионное 381
 — — турбулентное 198
 — Рейнольдса 140
 — Релея 221
 — Стантона 162
 — Стантона диффузионное 392
 — Фурье 95
 — Эккерта 173

Центры конденсации 297
 — паробразования 331

Шахматный пучок труб 291
 Шероховатость стенки 272

Эквивалентный диаметр 239
 Энтальпия образования 405
 — торможения 173
 Эффективная длина луча 466

Учебное издание

ЦВЕТКОВ Федор Федотович
ГРИГОРЬЕВ Борис Афанасьевич

ТЕПЛОМАССООБМЕН

Редактор *Н.Н. Сошникова*
Технический редактор *З.Н. Ратникова*
Корректор *В.В. Самого*
Компьютерная верстка *Н.В. Пустошиной*

Подписано в печать с оригинала-макета 16.06.05

Бумага офсетная

Усл. печ. л. 34,5

Тираж 1000 экз.

Гарнитура Times.

Усл. кр.-отт 34,5

Заказ № 277г

Формат 60×90/16

Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 32,4

C-020

Издательство МЭИ, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.

Отпечатано в типографии НИИ «Геодезия», Московская обл., г. Красноармейск, ул. Центральная, 16

Ф.Ф. Цветков, Б.А. Григорьев

ТЕПЛОМАССОБМЕН

Допущено Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по энергетическим специальностям

2-е издание, исправленное и дополненное

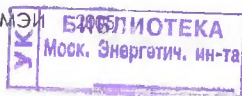
НТБ МЭИ



231398



Москва Издательство МЭИ



Ф.Ф. Цветков, Б.А. Григорьев

ТЕПЛОМАССООБМЕН

Учебное пособие для вузов



Издательство МЭИ